

# Инженерная геометрия и компьютерная графика

УДК 514.18(075.8)

DOI: 10.14529/build200407

## НЕИЗВЕСТНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВЗАИМНОГО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ТЕТРАЭДРА И КВАДРИКИ (ТЕОРЕМА ШАЛЯ)

**А.Л. Хейфец**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия*

Рассмотрены геометрические особенности линии взаимного пересечения поверхностей второго порядка и тетраэдра, являющиеся содержанием исторической теоремы М. Шаля. Разработаны и приведены 3D-модели, наглядно иллюстрирующие различные варианты теоремы. Приведена методика построения 3D-моделей, позволяющая применять их в учебном курсе теоретических основ геометрического моделирования. Приведено доказательство теоремы для одного из вариантов теоремы. Для основных вариантов теоремы получено подтверждение ее выводов. Для одного из вариантов получены выводы, отличающиеся от выводов Шаля. Сделан общий вывод о необходимости разработки универсального доказательства теоремы. Работа выполнена компьютерным 3D-моделированием в пакете AutoCAD с применением программирования на AutoLisp, а также в пакете SolidWorks.

*Ключевые слова:* 3D-компьютерное геометрическое моделирование, Мишель Шаль, теорема Шаля, шестиугольник Паскаля, AutoCAD, AutoLisp.

### Введение

Многогранники и квадрики (поверхности второго порядка) являются распространенными геометрическими элементами в архитектурно-строительном проектировании. Форма и взаимодействие этих элементов подробно изучены и исследованы за многовековую историю развития геометрии. Тем не менее в работе [1] нами найдена теорема, раскрывающая еще одну сторону этого взаимодействия. Это теорема М. Шаля, которая показывает некоторые ранее не исследованные особенности пересечения многогранников с квадриками.

Приведем формулировку теоремы Шаля, данную в работе [2]:

*«Плоскости, определяемые точками пересечения некоторой поверхности второго порядка с тремя рёбрами тетраэдра, сходящимися в одной вершине, пересекают противоположные грани по прямым, которые являются прямолинейными образующими одного гиперболоида».*

Научная новизна этой теоремы состоит в следующем. Известно, что однополостный гиперболоид (*Гипер*) задается тремя скрещивающимися прямыми [3–6], которые принимаются за его направляющие. Применение алгоритма теоремы Шаля приводит к получению *четырёх* отрезков, принадлежащих семейству направляющих единого *Гипера*. То есть, если построить *Гипер* по трем произвольно выбранным из этой четверки отрезкам, то и оставшийся отрезок также будет принадлежать поверхности этого *Гипера*.

Шаль не привел доказательство своей теоремы, а показал многочисленные ее проявления, вызывающие и сегодня удивление и восхищение. Шаль провел аналогию своей теоремы с теоремой Паскаля [7, 8], которая ее автором также не была доказана и поэтому вызывала у современников мистическое чувство [9, с. 73] («мистический шестиугольник Паскаля»). Такое же чувство сегодня вызывает и теорема Шаля.

Актуальность теоремы Шаля вызвана развитием 3D-компьютерного геометрического моделирования в архитектурно-строительном проектировании, широким применением многогранников и квадрик как объектов архитектурных проектов.

Теорема Шаля и приведенные им ссылки на работы XIX века [10] сложны для восприятия. Отсутствуют какие-либо иллюстрации, поясняющие теорему. Возможно, по этим причинам теорема оказалась забытой. За полтора века, прошедших с даты ее опубликования, по теореме Шаля найдена единственная статья [2] и краткое упоминание в работе [11, с. 99].

В работе [2] приведено доказательство для одного из вариантов теоремы Шаля на примере эллипсоида. Вероятно, на основе проективных преобразований его также можно распространить на остальные квадрики. Однако такой подход затрудняет понимание теоремы.

Цель нашей работы: построение наглядных 3D-моделей, раскрывающих содержание теоремы Шаля и ее многочисленных вариантов.

Шаль рассмотрел следующие варианты взаимного положения тетраэдра и квадрики, в которых проявляется его теорема:

- 1) каждое ребро тетраэдра дважды пересекает квадрикой;
- 2) все вершины тетраэдра принадлежат квадрике;
- 3) все ребра тетраэдра касаются квадрики;
- 4) все грани тетраэдра касаются квадрики;
- 5) через каждое ребро построены по две касательные плоскости, охватывающие квадрикой;
- 6) ряд примеров из проективной геометрии.

В данной работе рассмотрены варианты 1–5. В границах каждого варианта форма тетраэдра, тип и параметры квадрики могут быть произвольными.

При создании моделей применялись известные методы построений в пакете AutoCAD [12], Lisp-программы построения модели *Гипера* по трем направляющим [13], построения коника по пяти параметрам [14]. Учтен опыт по изучению и применению шестиугольника Паскаля [15], по построению 3D-моделей квадрик [16], по применению 3D-параметризации пакета SolidWorks [17].

## 1. Ребра тетраэдра дважды пересекают квадрикой (вариант 1)

Каждое ребро тетраэдра должно пересекаться с поверхностью квадрики в двух точках. Ребра могут пересекать квадрикой на своем действительном участке или на продолжении.

Рассмотрим пример пересечения тетраэдра  $ABCD$  с параболоидом вращения (рис. 1, *а*). Каждое ребро дважды пересекает квадрикой на своем действительном участке. Находим точки пересечения ребер с квадрикой. Эти точки со стороны каждой вершины объединяем в треугольники, (рис. 1, *б*). Далее находим пересечение каждого треугольника с противоположной ему гранью тетраэдра. Например, со стороны вершины  $A$  построен треугольник  $sA(1,2,3)$ . При его пересечении с гранью  $BCD$ , противоположной вершине  $A$ , образуется прямая  $a$  (рис. 1, *в*). Для четырех вершин  $A, B, C, D$  найдены четыре отрезка прямых  $a, b, c, d$ :  $a = sA \cap (BCD)$ ;  $b = sB \cap (ACD)$ ;  $c = sC \cap (ABD)$ ;  $d = sD \cap (ABC)$ .

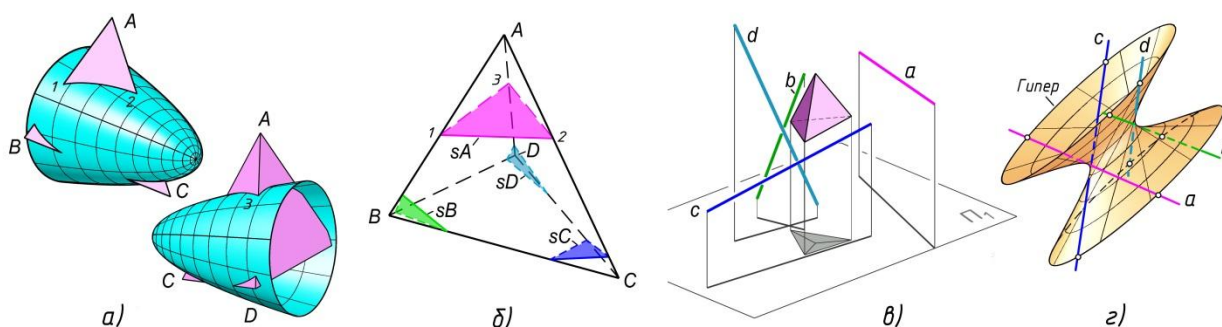


Рис. 1. Пересечение тетраэдра с параболоидом: *а* – модель; *б* – треугольные секторы; *в* – четыре отрезка направляющих; *г* – контрольный *Гипер*

Согласно теореме Шаля полученные отрезки  $a, b, c, d$  являются направляющими единого *Гипера* (рис. 1, *г*).

## 2. Экспериментальная проверка точности построений

Необходимо экспериментально проверить, что четыре построенных отрезка  $a, b, c, d$  являются направляющими единого *Гипера*. Первоначально убеждаемся, что отрезки принадлежат скрещивающимся прямым. Для этого проверяем отсутствие парных пересечений этих отрезков. Затем применим два метода проверки.

По первому методу из четырех отрезков выбираем произвольные три, например,  $a, b, c$ . Принимаем эти отрезки за направляющие и с помощью Lisp-программы [13] строим поверхность контрольного гиперболоида – *Гипера* (см. рис. 1, *г*). Проверяем, что четвертый отрезок  $d$  также принадлежит поверхности этого *Гипера*.

Для проверки и оценки точности построений определяли расстояние от отрезка  $d$  до эллиптических оснований *Гипера* или сечения, построенного по конечным точкам отрезка  $d$  и центру *Гипера*. Расстояние не превышало 0,01 % от характерных размеров тетраэдра, что указывает на высокую точность построений и экспериментально подтверждает теорему Шаля. Для наглядности точки пересечения отрезков  $a-d$  с эллипсами оснований *Гипера* отмечены маркерами (см. рис. 1, *г*).

Второй метод проверки основан на том, что на поверхности *Гипера* существуют два семейства прямых линий: направляющие и образующие [3–6]. Все образующие пересекают все направляющие. Поэтому проверяется возможность построения некоторого отрезка  $m$ , пересекающего все четыре найденные отрезки  $a, b, c, d$ . Если отрезок  $m$  найден, то теорема Шаля получает подтверждение.

Отрезки  $a, b, c, d$  экспортировали из AutoCAD'a в пакет SolidWorks. Применяя 3D-параметризацию, находили пятый отрезок  $m$ , пересекающий первые четыре [17]. Известно, что в общем случае существует два отрезка, пересекающих четыре произвольно заданные скрещивающиеся прямые [17]. Однако в данном примере отрезок  $m$  можно перемещать в пространстве, со-

храняя пересечение с четырьмя найденными. Следовательно, отрезок  $m$  принадлежит семейству образующих *Гипер*, в котором отрезки  $a, b, c, d$  являются направляющими, что подтверждает теорему Шаля.

**3. Доказательство теоремы Шаля**

Впервые доказательство теоремы Шаля дано в работе [2]. Оно приведено для пересечения тетраэдра с эллипсоидом, в котором точки пересечения расположены на действительной части ребер. Такое же доказательство мы повторили [18] для примера параболоидом (см. рис. 1).

Сейчас выполним доказательство для более общего примера с комбинированным расположением вершин тетраэдра. В качестве квадрики выбран трехосный эллипсоид (рис. 2, а). Вершины  $A, C$  находятся вне квадрики, а вершины  $B, D$  – внутри квадрики.

Находим точки пересечения ребер с квадрикой. Для внешних вершин  $A, C$  эти точки расположены на действительных участках ребер, для внутренних  $B, D$  – на продолжении ребер. Точки со стороны каждой вершины объединяем в треугольники (рис. 2, б). Находим отрезки  $a, b, c, d$  пересечения треугольников с противоположными им гранями тетраэдра. По трем из них, например,  $a, b, c$ , строим контрольный *Гипер* (рис. 2, в) и экспериментально проверяем, что отрезок  $d$  принадлежит поверхности *Гипера*.

Для доказательства теоремы выберем одну из граней тетраэдра, например,  $ABC$  (рис. 2, з). Выбор определяется лишь наглядностью последующих построений. При пересечении квадрики с этой гранью получим конику, в нашем примере – эллипс  $e$ .

Соединяя точки 1–6 пересечения ребер грани с коникой, получим один из вариантов шестиугольника Паскаля (рис. 2, д). Выбор порядка соединения точек влияет лишь на наглядность построений. Находим точки  $P1 = (1-2) \cap (4-5), P2 = (2-3) \cap (5-6), P3 = (3-4) \cap (6-1)$ . Согласно теореме Паскаля точки  $P1, P2, P3$  принадлежат единой прямой – прямой Паскаля *line*. (Это несложно проверить экспериментально).

Поскольку  $P1 \in (1-2)$ , то  $P1 \in sA$ . Также  $P1 \in (4-5)$  и  $P1 \in (BCD)$ . Следовательно, точка  $P1$  принадлежит линии пересечения треугольников  $sA$  и  $BCD$ . Но линией пересечения этих треугольников согласно алгоритму теоремы является прямая  $a$ , следовательно ( $\Rightarrow$ ),  $P1$  принадлежит прямой  $a$ .

Аналогичный вывод запишем для точек  $P2, P3$ :

$$P2 \in (5-6), P2 \in sC; P2 \in (2-3), P2 \in (ABD) \Rightarrow P2 \in c (c = sC \cap ABD);$$

$$P3 \in (3-4), P3 \in sB; P3 \in (6-1), P3 \in (ACD) \Rightarrow P3 \in b (b = sB \cap ACD).$$

Поскольку точки  $P1, P2, P3$  принадлежат прямой *line*, то прямая *line* пересекает прямые  $a, b, c$ .

Прямая  $d$  получена при пересечении плоскости  $ABC$  с треугольником  $sD$ . Следовательно,  $d \subset ABC$ . Прямая *line* по построению также находится в плоскости  $ABC$ . Поэтому прямые  $d$  и *line* пересекаются. Точка их пересечения обозначена  $P4$ .

Итак, прямая *line* пересекает все прямые  $a, b, c, d$ . Из этого следует (см. выше второй метод проверки), что прямые  $a-d$  являются направляющими некоторого единого *Гипера*. Теорема доказана.

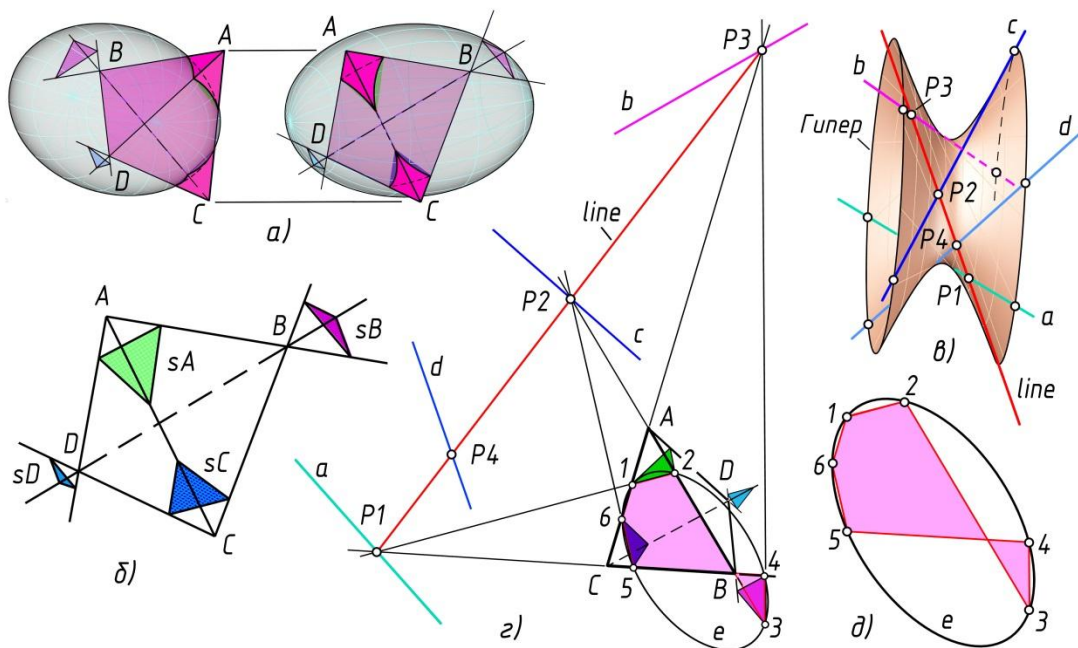


Рис. 2. Пересечение тетраэдра с эллипсоидом: а – модель; б – треугольные секторы; в – контрольный *Гипер*; г – к доказательству теоремы; д – шестиугольник Паскаля

Поскольку прямая *line* пересекает направляющие *Гипера*, то она принадлежит его семейству образующих. Это подтвердила и модель *Гипера*, на которой видно и экспериментально проверено, что прямая *line* принадлежит его поверхности (см. рис. 2, в).

Если вместо эллипсоида выбрать другую квадрику, то ход доказательства прежний. Построения приведут к другой конике, в том числе гиперболе или параболе. По теореме Паскаля точки  $P_1, P_2, P_3$  будут принадлежать единой прямой *line*. Этой прямой также будет принадлежать точка  $P_4$ , что приведет к доказательству теоремы Шаля.

#### 4. Дополнительные примеры к варианту 1

Были построены модели для всех видов квадрик. Во всех примерах было получено подтверждение теоремы Шаля.

Для гиперболического параболоида (*ГунАр*) (рис. 3, а) и двуполостного гиперboloида (рис. 3, в) часть ребер пересекают квадрику на действительном участке, а часть – на продолжении (комбинированный вариант). Для однополостного гиперboloида (рис. 3, б) и цилиндра (рис. 3, г) пересечение

всех ребер происходит на действительном участке.

Были получены и другие модели с многочисленными вариантами пресечения ребер тетраэдра с квадрикой. Исключение составляет *ГунАр*, для которого удалось построить модель только с комбинированным вариантом пересечения.

Модель для двуполостного гиперboloида реализуется как с пересечением двух чаш (рис. 3, в), так с одной чашей, подобно параболоиду (см. рис. 1, а).

#### 5. Все вершины тетраэдра принадлежат квадрике (вариант 2)

Шаль рассмотрел этот вариант как предельный переход при приближении вершин тетраэдра к поверхности квадрики, в ходе которого треугольные сечения преобразуются в касательные плоскости к квадрике. С учетом такого допущения для этого варианта можно применить приведенное выше доказательство.

Рассмотрим пример, в котором вершины тетраэдра  $ABCD$  расположены на сфере (рис. 4, а). В вершинах строим касательные плоскости, перпендикулярные к отрезкам, соединяющим верши-

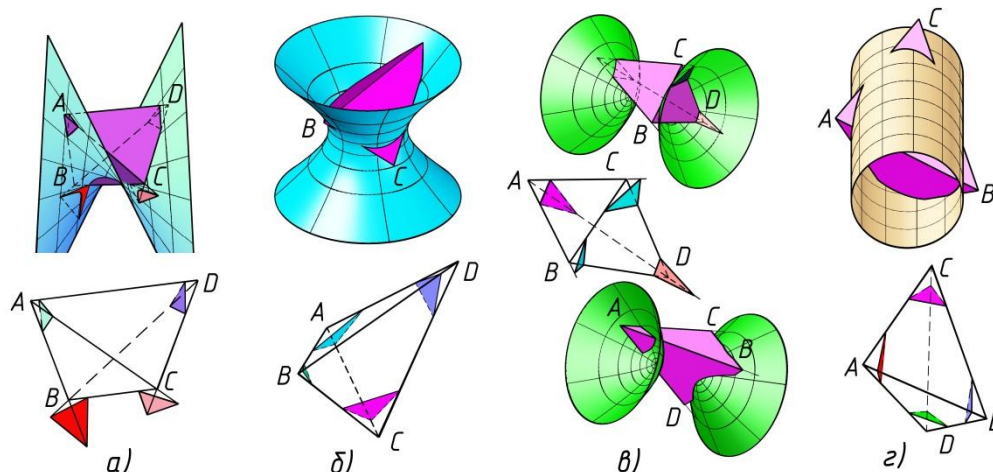


Рис. 3. Пересечение тетраэдра с различными квадриками: а – гиперболический параболоид; б – однополостный гиперboloид; в – двуполостный гиперboloид; г – цилиндр

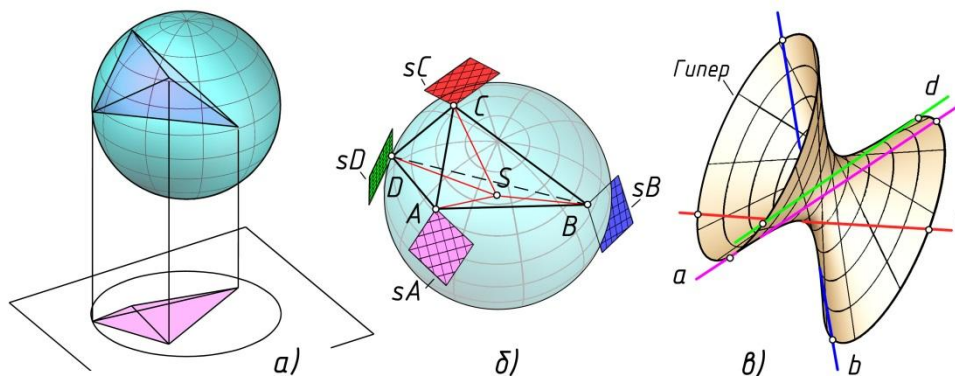


Рис. 4. Тетраэдр вписан в сферу: а – модель; б – касательные плоскости; в – направляющие *Гипера*

ны с центром сферы  $S$ . Эти плоскости показаны как секторы  $sA...sD$  (рис. 4, б). Строим отрезки линий пересечения касательных плоскостей с гранями тетраэдра, противоположными вершинам. Например, отрезок  $a = sA \cap (BCD)$ . Из четырех отрезков  $a, b, c, d$  выбираем произвольные три и строим по ним *Гипер* (рис. 4, в). Проверяем, что четвертый отрезок также принадлежит поверхности *Гипера*, что подтверждает теорему Шаля.

Второй пример – вершины тетраэдра расположены на поверхности *ГипАра* (рис. 5, а). Вершины тетраэдра (рис. 5, б) и касательные плоскости в вершинах (рис. 5, в) задавали по линейчатому каркасу *ГипАра*. Построение контрольного *Гипера* (рис. 5, г) и в этом примере подтвердило выводы теоремы Шаля.

В моделях (см. рис. 4, рис. 5) были получены контрольные *Гиперы* с узкой эллиптической горловиной. Такие *Гиперы* возникали и в других экспериментах. Для придания наглядности *Гиперы* вместе с отрезками направляющих масштабировали, задавая различные масштабы по осям.

### 6. Ребра тетраэдра касаются квадрики (вариант 3)

Тетраэдр, ребра которого касаются квадрики, называют каркасным. Каркасный тетраэдр (*КТ*) можно построить только к выпуклым квадрикам (сфера, эллипсоид, параболоид, двуполостный гиперболоид). Поэтому рассматриваемый вариант теоремы имеет ограниченное проявление.

*КТ* для сферы построим на основе его свойств [19]: суммы длин скрещивающихся ребер равны между собой. Для тетраэдра  $ABCD$  (рис. 6, а) запишем:  $AB+CD = AC+BD = AD+BC = S$ . Например, приняв  $S = 140$ , получим значения  $AB = 70$ ;  $BC = 50$ ;  $AC = 60$ ;  $AD = 90$ ;  $CD = 70$ ;  $BD = 80$ . Строим грань  $ABC$ . Вершину  $D$  находим на пересечении трех вспомогательных сфер с центрами в вершинах  $A, B, C$  и радиусами соответственно  $AD, BD, CD$ . На двух гранях строим вписанные окружности. Строим перпендикуляры из центров этих окружностей и на их пересечении находим центр вписанной сферы [20]. После этого определяем радиус вписанной сферы и шесть точек касания 1–6.

Для остальных квадрики – эллипсоида, параболоида (рис. 6, б) и двуполостного гиперболоида (рис. 7, а) – указанное свойство сторон *КТ* не выполняется. Поэтому построения *КТ* выполняли в пакете SolidWorks применением 3D-параметризации. Строили поверхность квадрики и шесть отрезков, касательных к квадрике. Вершины отрезков объединяли. Для задания касательных плоскостей в точках касания строили отрезки, перпендикулярные квадрике.

В теореме Шаля есть два пункта для каркасных тетраэдров – пункт 3 и пункт 7. По этим пунктам предусмотрены различные алгоритмы построений. Рассмотрим их на примере двуполостного гиперболоида (рис. 7).

Согласно пункту 3 точки касания, принадлежащие ребрам, выходящим из одной вершины,

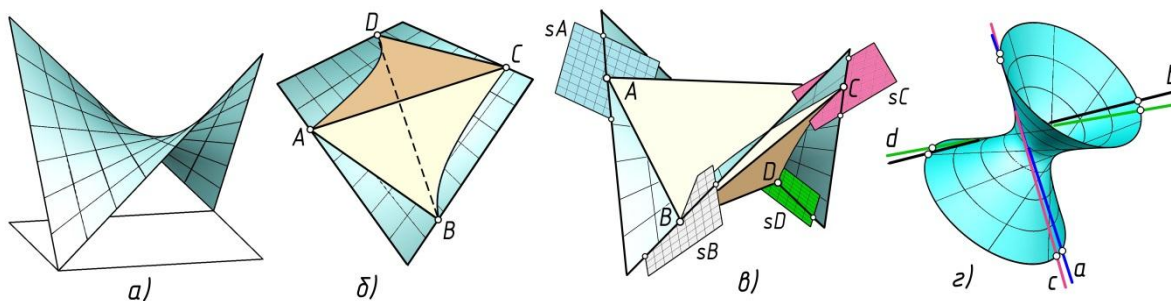


Рис. 5. Тетраэдр вписан в гиперболический параболоид (*ГипАр*): а, б – модель; в – касательные плоскости; г – направляющие контрольного *Гипера*

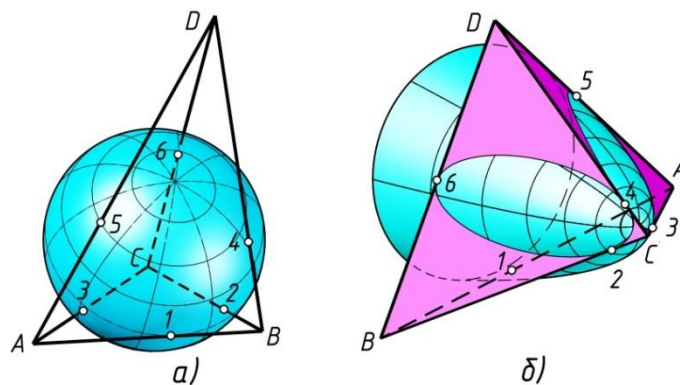
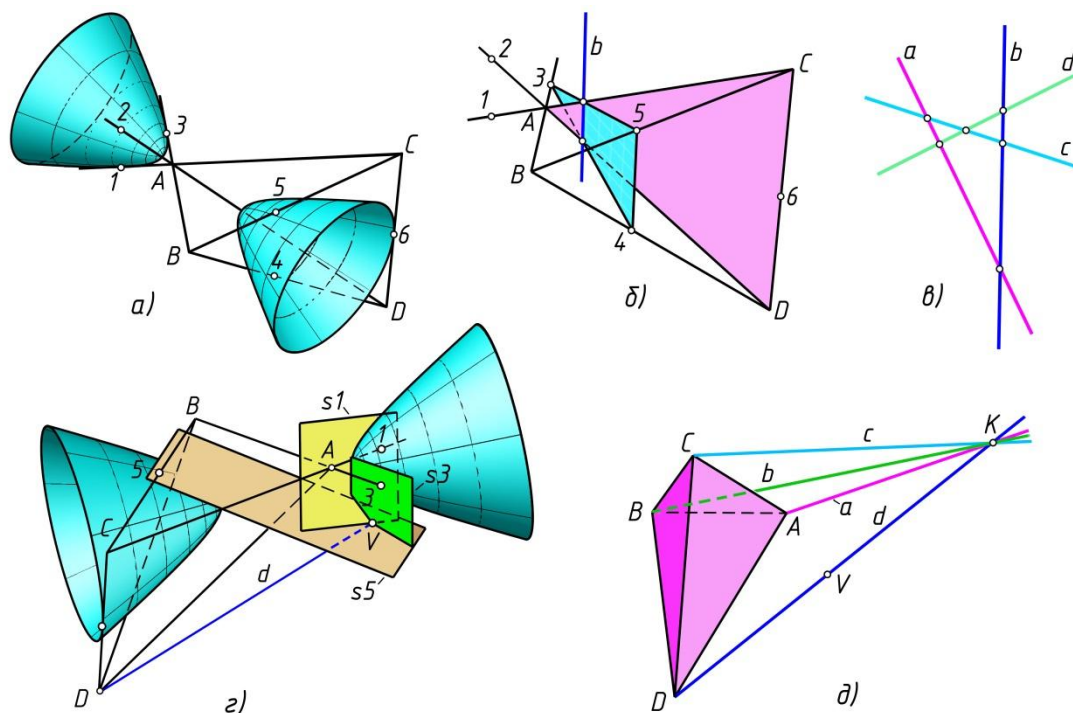


Рис. 6. Каркасные тетраэдры: а – для сферы; б – для параболоида



**Рис. 7. Ребра тетраэдра касаются двуполостного гиперboloида: а – модель; б – построение отрезка  $b$  для вершины  $B$ ; в – четыре компланарных отрезка; г – построение отрезка  $d$  для грани  $ABC$ ; д – четыре пересекающихся отрезка**

объединяем в треугольные секторы. Таких секторов четыре (по количеству вершин). Находим линии пересечения каждого сектора с гранью, противоположной вершине этого сектора. Повторяем это для каждой вершины. Например, для вершины  $B$  строим сектор  $(3-4-5)$  и отрезок  $b = (3-4-5) \cap (ACD)$  (рис. 7, б). В итоге для всех вершин получаем отрезки  $a, b, c, d$  (рис. 7, в). Эксперимент показал, что эти отрезки принадлежат единой плоскости (компланарные).

Согласно пункту 7 теоремы Шаля в точках касания, принадлежащих ребрам единой грани, были построены касательные плоскости к квадрике. Для каждой грани таких плоскостей три (по количеству ребер треугольной грани). Дальнейшие построения рассмотрим на примере грани  $ABC$  (рис. 7, г). Точки касания ребер этой грани  $1, 3, 5$ . Касательные плоскости к квадрике в этих точках показаны прямоугольниками  $s1, s3, s5$ . Находим вершину  $V$  трехгранного угла, образованного этими касательными плоскостями. Эту вершину соединяем отрезком  $d$  с вершиной  $D$  тетраэдра, противоположной рассмотренной грани. Построение повторяем для каждой грани и получаем четыре отрезка  $a, b, c, d$  (рис. 7, д). Выполненные построения показали, что эти отрезки пересекаются в одной точке  $K$ , причем среди них нет компланарных троек отрезков.

Таким образом, для каркасных тетраэдров получаем либо четыре компланарных отрезка, либо четыре некомпланарных отрезка с общей точкой

пересечения. Наш результат отличается от выводов Шаля, который считал полученные четыре отрезка принадлежащими поверхности единого гиперboloида. Хотя при этом он указал на аналогию с теоремой Бриансона [1, 7], в которой диагонали шестиугольника, описанного вокруг коники, пересекаются в одной точке.

## 7. Грани тетраэдра касаются квадрики (вариант 4)

Рассмотрим построение тетраэдра, грани которого касаются квадрики, на примере с двуполостным гиперboloидом. На поверхности гиперboloида зададим четыре точки  $A, B, C, D$  (рис. 8). Положение точек определяется только условием наглядности построений. В этих точках строим касательные плоскости. Каждую плоскость задаем двумя прямыми, касательными к квадрике в выбранной точке. Для наглядности построений касательные плоскости отображаем прямоугольниками  $sA...sD$ .

Для трех плоскостей, например,  $sB, sC, sD$ , находим вершину трехгранного угла – точку  $K$ . Выполняем сечение трехгранного угла четвертой плоскостью  $sA$ . По треугольнику сечения  $LMN$  и вершине  $K$  строим тетраэдр  $KLMN$ , все грани которого касаются квадрики. В приведенном примере (рис. 8, б) касание осуществляется на продолжении граней.

Согласно алгоритму теоремы Шаля соединяем точки касания граней с вершинами тетраэдра,

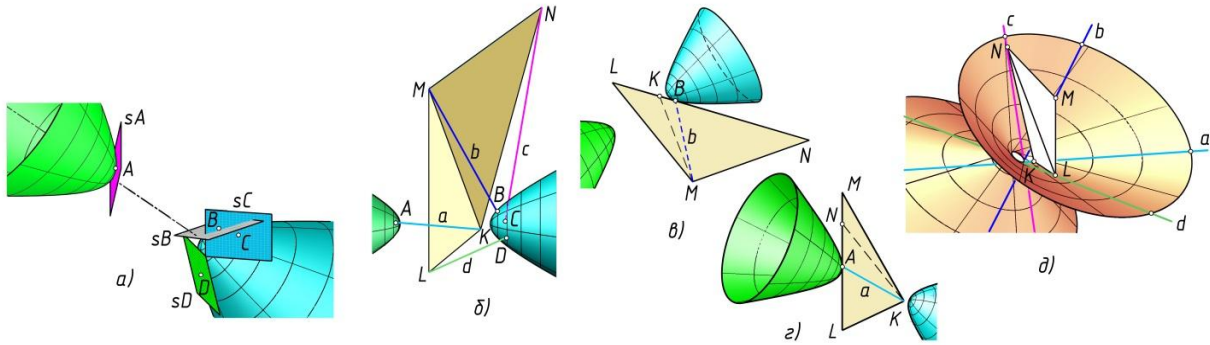


Рис. 8. Грани тетраэдра касаются двуполостного гиперboloида: а – касательные плоскости; б – тетраэдр и отрезки направляющих; в, г – касание в вершинах; д – контрольный Гипер

противоположными граням (рис. 8, б). В нашем примере (рис. 8, в, г) грань  $LMN$  касается гиперboloида в точке  $A$ . Для этой грани противоположной является вершина  $K$ . Поэтому отрезок  $a = AK$ . Грань  $KLN$  имеет точку касания  $B$  и противоположную ей вершину  $M$ . Поэтому отрезок  $b = BM$  и т. д.

Из четырех отрезков  $a - d$  выбираем произвольно три, принимаем их за направляющие и строим по ним контрольный Гипер (рис. 8, д). Убеждаемся, что четвертый отрезок также принадлежит поверхности этого Гипера, что подтверждает теорему Шаля.

Поскольку отрезки  $a - d$  проходят через вершины тетраэдра, то эти вершины принадлежат поверхности контрольного Гипера (см. рис. 8, д).

**8. Касательные плоскости от ребер тетраэдра охватывают квадрику (вариант 5)**

По этому варианту теоремы должно быть 12 касательных плоскостей, охватывающих квадрику, то есть по две плоскости для каждого ребра тетраэдра. Из этого следует, что ребра тетраэдра не должны быть касательными к квадрике или пересекать ее.

Рассматриваемый вариант нами первоначально был исследован на примере сферы. Сфера могла быть расположена как вне тетраэдра (рис. 9, а) или быть полностью или частично погруженной внутрь тетраэдра.

Рассмотрим грань  $BСD$  тетраэдра  $ABCD$ . Для ребра  $BD$  (рис. 9, б) к сфере имеются касательные

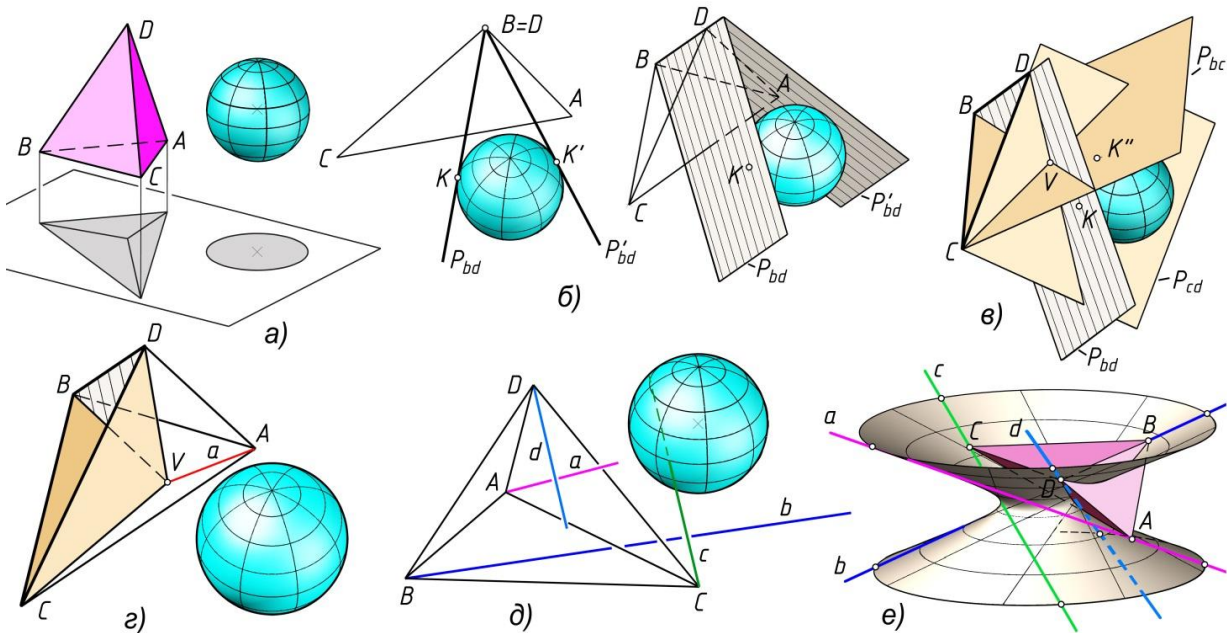


Рис. 9. Касательные плоскости от ребер тетраэдра к сфере: а – модель; б – касательные плоскости для ребра  $BD$ ; в – трехгранный угол для грани  $BСD$ ; г – один из отрезков направляющих; д – один из вариантов 4 направляющих; е – контрольный Гипер

плоскости  $P_{BD}$  и  $P_{BD}'$ , которые касаются ее в точках  $K$  и  $K'$ . Всего для выбранной грани имеется шесть касательных плоскостей. Из них можно построить восемь трехгранных углов. Это определяется количеством сочетаний из трех ребер по две касательные плоскости для каждого ребра, т. е.  $2^3$ .

Пусть один из трехгранных углов грани  $BCD$  (рис. 9, в) имеет вершину  $V$ . Согласно алгоритму теоремы эту вершину необходимо соединить отрезком с вершиной тетраэдра, которая противоположна грани. Вершиной тетраэдра, противоположной грани  $BCD$ , является вершина  $A$ . Строим отрезок  $d = AV$  (рис. 9, з). Для восьми трехгранных углов грани  $BCD$  возможны восемь вариантов отрезка  $d$ .

Выполнив подобные построения, находим отрезки для каждой грани. Обозначим их по имени вершин тетраэдра, в которые они направлены, то есть  $a, b, c, d$ . Каждый из этих отрезков имеет 8 вариантов построения (по количеству вершин трехгранного угла для каждой грани).

Таким образом, задача о построении отрезков, соединяющих вершины трехгранных углов с вершинами тетраэдра, является многовариантной. Выбирая по одному отрезку каждой грани из восьми возможных, получаем для четырех граней  $8^4 = 4096$  сочетаний отрезков  $a-d$ , то есть такое количество вариантов построений. Это количество сочетаний из 4 элементов (граней) по 8 вариантов каждого элемента (отрезков каждой грани).

Была предпринята попытка произвольного выбора касательных плоскостей. Например, какая-то плоскость могла быть выбрана дважды, как принадлежащая двум граням с общим ребром. Либо какая-то плоскость могла быть пропущена. Но при таком выборе результат чаще всего был отрицательным, то есть теорема не подтверждалась.

Поскольку в теореме не сказано, как выбирать касательные плоскости, мы предположили, что причина отрицательных результатов связана с неправильным выбором касательных плоскостей.

Для определения условий реализации теоремы была разработана Lisp-программа, которая анализировала все возможные сочетания плоско-

стей и выявляла те из них, в которых теорема выполнялась.

Проведенное исследование выявило, что из 4096 вариантов к реализации теоремы приводили лишь 64 варианта. Их анализ позволил сформулировать следующее необходимое и достаточное условие реализации теоремы: «Каждая из двенадцати касательных плоскостей должна один и только один раз участвовать в построении модели». Полученное значение совпадает с количеством сочетаний из шести элементов (ребер) по два варианта (плоскостей) для каждого элемента, т. е.  $2^6 = 64$ .

Рассмотрим один из 64 реализованных вариантов, в котором были получены отрезки  $a-d$  (рис. 9, д). По трем из них, например,  $a, b, c$ , построен контрольный Гипер (рис. 9, е). Проверка (см. выше, разд. 3) показала, что четвертый отрезок  $d$  также принадлежит поверхности этого Гипера, что подтверждает вывод теоремы Шала.

Приведенный выше алгоритм был экспериментально проверен для всех типов квадрик. Исключение составили цилиндр и конус, для которых тетраэдры с касательными плоскостями от всех ребер к квадрике не существуют.

Эксперименты с квадриками проводили следующим образом. Задавали наглядную поверхность квадрики. Затем экспериментально подбирали параметры и положение тетраэдра так, чтобы от каждого его ребра можно было построить по две касательные плоскости к поверхности квадрики. Параметры 12 касательных плоскостей вводили в Lisp-программу, которая проверяла 4096 возможных вариантов построения и находила 64 варианта реализации теоремы. Было установлено, что, как и в примере со сферой, положительные варианты реализуются только при выполнении приведенного выше условия о сочетании касательных плоскостей. Рассмотрим примеры.

Для параболоида вращения и тетраэдра  $ABCD$  (рис. 10, а) ребро  $AB$  и параболоид проецировали на плоскость  $\Sigma \perp AB$ . От точки  $A' = B'$  найдены касательные прямые  $m, n$  к очерку проекции параболоида – параболе  $p$  (рис. 10, б). Для ребра  $AD$  най-

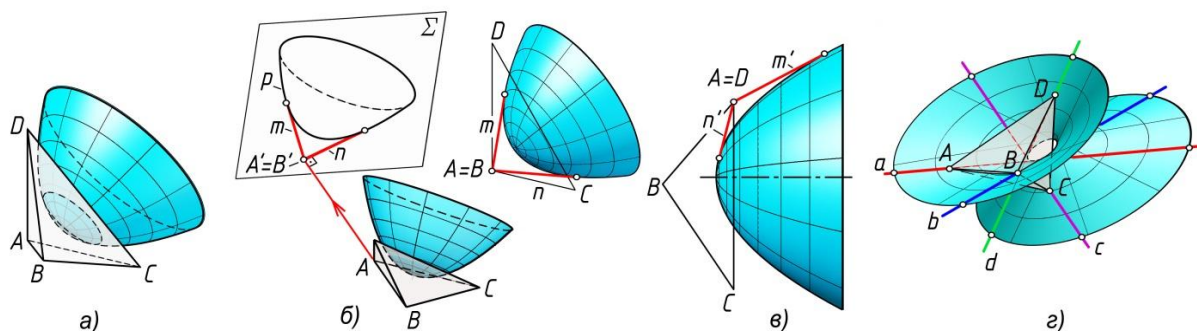


Рис. 10. Касательные плоскости от ребер тетраэдра к параболоиду: а – модель; б – касательные плоскости для ребра  $AB$ ; в – касательные плоскости для ребра  $AD$ ; г – отрезки направляющих и контрольный Гипер



дены касательные  $m'$ ,  $n'$  (рис. 10, в). Также найдены касательные для остальных ребер тетраэдра. Ребра и соответствующие им касательные прямые образовывали искомые касательные плоскости. К найденным 12 касательным плоскостям применили программу, которая выявила 64 варианта положительного решения. Для наиболее наглядного варианта построен контрольный *Гипер* (рис. 10, з) с отрезками  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и подтверждена принадлежность этих отрезков поверхности *Гипера*.

Для однополостного гиперboloида построен тетраэдр  $ABCD$  (рис. 11, а). Проецированием на плоскости, перпендикулярные ребрам, найдены касательные плоскости от всех ребер к поверхности гиперboloида. Например, для ребра  $AD$  (рис. 11, б) и ребра  $AB$  (рис. 11, в). Найдены отрезки  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Построение контрольного *Гипера* подтвердило, что эти отрезки принадлежат его поверхности (рис. 11, з).

Поскольку отрезки направляющих  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  построены из вершин тетраэдра, то эти вершины принадлежат поверхности контрольного *Гипера* (см. рис. 9, е; 10, з; 11, з).

Отметим еще одну особенность рассматриваемого варианта теоремы. Контрольные *Гиперы*,

полученные для 64 вариантов единой модели, попарно пересекаются с распадением линии пересечения четвертого порядка на прямые линии и коники. Например, в экспериментах со сферой (см. рис. 9) были получены контрольные *Гиперы*, линиями пересечения которых явились две пересекающиеся прямые и эллипс (рис. 12, а), две пересекающиеся прямые и гипербола (рис. 12, б), четыре попарно пересекающиеся прямые (рис. 12, в).

### Заключение

Получены наглядные геометрически точные [15] модели для всех вариантов теоремы Шаля. Модели потребовали выполнения сложных 3D геометрических построений.

Модели подтвердили выводы теоремы Шаля применительно к основным вариантам его теоремы. Однако применительно к каркасному тетраэдру нами получен вывод, отличающийся от выводов Шаля.

Доказательство теоремы Шаля найдено только для первого и второго вариантов теоремы. Возникает задача найти доказательства для всех вариантов или найти универсальное доказательство теоремы. Доказательство и визуализация теоремы Шаля является актуальной познавательной задачей.

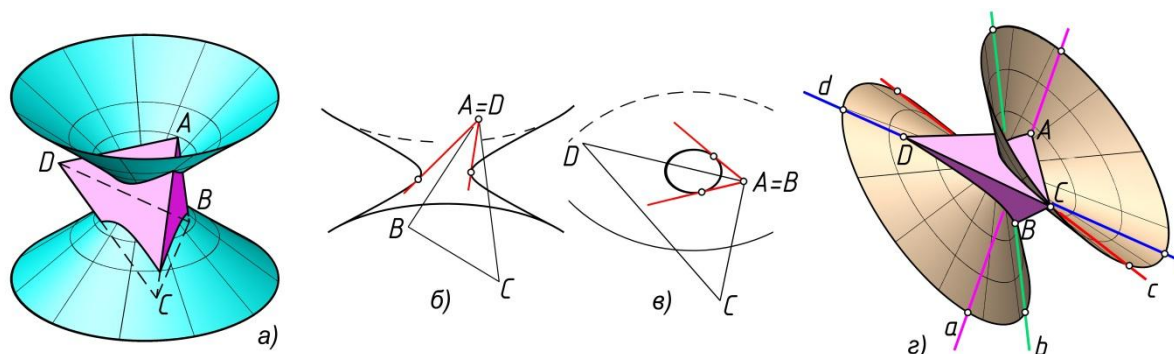


Рис. 11. Касательные плоскости от ребер тетраэдра к однополостному гиперboloиду: а – модель; б – касательные плоскости ребра  $AD$ ; в – касательные плоскости ребра  $AB$ ; з – отрезки направляющих и контрольный *Гипер*

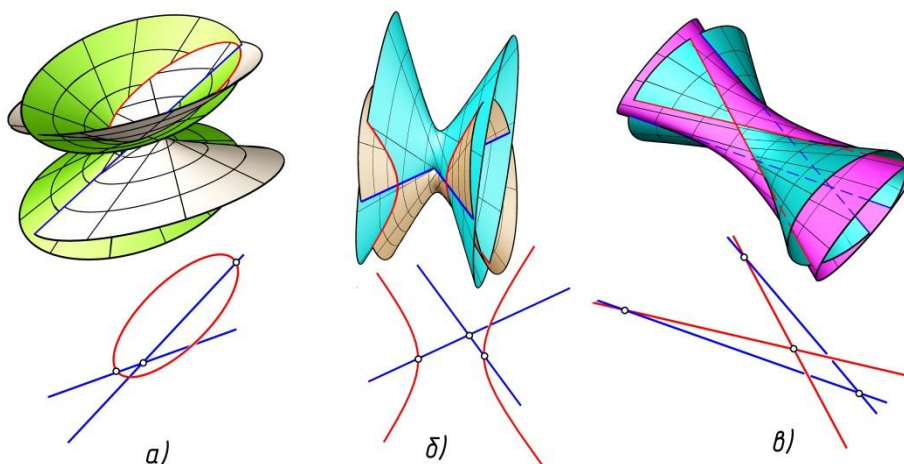


Рис. 12. Примеры взаимного пересечения контрольных *Гиперов*: а – две пересекающиеся прямые и эллипс; б – две пересекающиеся прямые и гипербола; в – четыре попарно пересекающиеся прямые

Отмеченная выше аналогия между теоремами Шаля и Паскаля позволяет предположить, что теорема Шаля может иметь такое же значение в геометрическом моделировании, как и теорема Паскаля.

Приведенные модели будут включены в качестве актуальных и одновременно исторических задач в новый учебный курс теоретических основ 3D-компьютерного геометрического моделирования. Курс предназначен для студентов инженерных специальностей как альтернатива начертательной геометрии [21].

### Литература

1. Шаль, М. *Примечание XXXII. Теоремы о поверхностях второго порядка, соответствующие теоремам Паскаля и Брианшона в конических сечениях* / М. Шаль // *Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. История геометрии. Примечания.* – М., 1883. – Т. 2. – 428 с.
2. Мордухай-Болтовской, Д.Д. *Трёхмерный и четырёхмерный аналогон теоремы Паскаля* / Д.Д. Мордухай-Болтовской // *Успехи математических наук.* – 1953. – Том VIII, вып. 2 (54). – С. 135–138. – <http://mi.mathnet.ru/umn8192>
3. Пеклич, В.А. *Начертательная геометрия* / В.А. Пеклич. – М.: Изд-во АСВ, 2007. – 267 с.
4. Четверухин, Н.Ф. *Начертательная геометрия* / Н.Ф. Четверухин и др. – М.: Высшая школа, 1963. – 420 с.
5. Иванов, Г.С. *Начертательная геометрия* / Г.С. Иванов. – М.: Машигиз, 1995. – 223 с.
6. Иванов, Г.С. *Теоретические основы начертательной геометрии* / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1998. – 156 с.
7. Четверухин, Н.Ф. *Проективная геометрия* / Н.Ф. Четверухин. – М.: Просвещение, 1961. – 360 р.
8. Глаголев, Н.А. *Проективная геометрия* / Н.А. Глаголев и др. – М.: Высшая школа, 1963. – 344 с.
9. Шаль, М. *Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов. История геометрии* / М. Шаль. – М., 1883. – Т. 1. – 311 с.
10. Chasles. *Géométrie de situation. Démonstration de quelques propriétés du triangle, de l'angle trièdre et du tétraèdre, considérés par rapport aux lignes et surfaces du second ordre* / *Annales de mathématiques pures et appliquées.* – 1828–1829. – V. 19. – P. 65–85. – [http://www.numdam.org/volume/AMPA\\_1828-1829\\_\\_19/](http://www.numdam.org/volume/AMPA_1828-1829__19/)
11. Прасолов, В.В. *Геометрия* / В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров. – М.: МЦНМО, 2007. – 328 с.
12. *Инженерная 3D-компьютерная графика: учебник и практикум для академического бакалавриата* / А.Л. Хейфец, А.Н. Логиновский, И.В. Буторина, В.Н. Васильева; под ред. А.Л. Хейфеца. – 3-е изд., пер. и доп. – М.: Изд-во Юрайт, 2015. – 602 с.
13. Хейфец, А.Л. *3D-модели линейчатых поверхностей с тремя прямолинейными направляющими* / А.Л. Хейфец, А.Н. Логиновский // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура».* – 2008. – Вып. 7. № 25(125). – С. 51–56. – <http://dSPACE.susu.ru/xmlui/bitstream/handle/0001.74/615/1/0.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
14. Короткий, В.А. *3D-моделирование коник в пакете AutoCAD* / В.А. Короткий, А.Л. Хейфец // *Актуальные вопросы графического образования молодежи: материалы VI Всерос. науч.-метод. конф.; под ред. Ю.П. Шевелева, А.П. Передбогова.* – Рыбинск: РГТА, 2005. – С. 102–105.
15. Хейфец, А.Л. *Геометрическая точность компьютерных алгоритмов конструктивных задач* / А.Л. Хейфец // *Материалы VI Междунар. науч.-практ. интернет-конф., Пермь, февраль–март 2016 г.* – Пермь: ПГТУ, 2016. – Вып. 3. – С. 367–387. – <http://dgng.pstu.ru/conf2016/papers/74/>
16. Kheyfets A.L. *3D-model of ruled surface with three curvilinear guides* / *11th International Conference 3IA'2008, the International Conference in Computer Graphics and Artificial Intelligence.* 30–31 May 2008. Athens. Greece Eurographics. Organised by: XLIM Laboratory University of Limoges. 2008. – P. 223–227.
17. Хейфец, А.Л. *3D-модели и алгоритмы компьютерной параметризации при решении задач конструктивной геометрии (на некоторых исторических примерах)* / А.Л. Хейфец // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника».* – 2016. – Т. 16, № 2. – С. 24–42.
18. Хейфец, А.Л. *Теорема Шаля как 3D-аналог теоремы Паскаля* / А.Л. Хейфец // *Computer graphics and 3D-modeling in engineering education. Секция 5. Доклад 20190038.* – М.: МЭИ, 2020. – <https://inforino.mpei.ru/online/Pages/default.aspx>
19. *Каркасный тетраэдр.* – [https://studbooks.net/2395470/matematika\\_himiya\\_fizika/kar\\_kasnye\\_tetraedry](https://studbooks.net/2395470/matematika_himiya_fizika/kar_kasnye_tetraedry)
20. *Полувписанная сфера.* – <http://www.myshared.ru/slide/546522/>
21. Хейфец, А.Л. *Начертательная геометрия как «бег в мешках»* / А.Л. Хейфец // *Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: материалы V Междунар. науч.-практ. интернет-конф. КГП 2015.* – Пермь: ПГТУ, 2015. – С. 292–325. – <http://dgng.pstu.ru/conf2015/papers/72/>; <http://dgng.pstu.ru/conf2015/news/44/>

**Хейфец Александр Львович**, кандидат технических наук, доцент, старший научный сотрудник, профессор кафедры «Инженерная и компьютерная графика», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), heifets@yandex.ru

Поступила в редакцию 3 сентября 2020 г.

## UNKNOWN FEATURES OF THE MUTUAL INTERSECTION OF TETRAHEDRON AND QUADRIC (CHASLES' THEOREM)

A.L. Kheyfets, [heifets@yandex.ru](mailto:heifets@yandex.ru)

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The geometric features of the line of mutual intersection of second-order surfaces and a tetrahedron, which are the essence of the historical Michel Chasles' theorem, are considered in the article. 3D models are developed and presented, which clearly illustrate various versions of the theorem. A method for constructing 3D models is presented, which allows using those in an educational course on the theoretical foundations of geometric modeling.

A proof for one of the theorem variants is given. For one of these variants, conclusions that differ from those of Chasles have been obtained. A general conclusion is made about the need to develop a universal proof of the theorem. The work is carried out by computer 3D modeling in the AutoCAD package using AutoLisp programming, as well as in the SolidWorks package.

*Keywords:* 3D computer geometric modeling, Michel Chasles, Chasles' theorem, Pascalian hexagon, AutoCAD, AutoLisp.

### References

1. Shal' M. *Primechaniye XXXII. Teoremy o poverkhnostyakh vtorogo poryadka, sootvetstvuyushchiye teoremat Paskalya i Brianshona v konicheskikh secheniyakh. Istoricheskiy obzor proiskhozhdeniya i razvitiya geometricheskikh metodov. Istoriya geometrii. Primechaniya* [Historical Review of the Origin and Development of Geometric Methods. History of Geometry]. Moscow, vol. 2, 1883. 428 p.
2. Mordukhay-Boltovskoy D.D. [Three-Dimensional and Four-Dimensional Analog of Pascal's Theorem]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in Mathematical Sciences], 1953, vol. VIII, iss. 2 (54), pp. 135–138. (in Russ.) Available at: <http://mi.mathnet.ru/umn8192>
3. Peklich V.A. *Nachertatel'naya geometriya* [Descriptive Geometry]. Moscow, Izd-vo ASV, 2007. 267 p.
4. Chetverukhin N.F. (Ed.), Levitskiy V.S., Pryanishnikova Z.I. *Nachertatel'naya geometriya* [Descriptive Geometry]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1963. 420 p.
5. Ivanov G.S. *Nachertatel'naya geometriya* [Descriptive Geometry]. Moscow, Mashgiz Publ., 1995. 223 p.
6. Ivanov G.S. *Teoreticheskiye osnovy nachertatel'noy geometrii* [Theoretical Foundations of Descriptive Geometry]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1998. 156 p.
7. Chetverukhin N.F. *Proyektivnaya geometriya* [Projective Geometry]. Moscow, Prosveshcheniye Publ., 1961. 360 p.
8. Glagolev N.A. *Proyektivnaya geometriya* [Projective Geometry]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1963. 344 p.
9. Shal' M. *Istoricheskiy obzor proiskhozhdeniya i razvitiya geometricheskikh metodov. Istoriya geometrii* [Historical Review of the Origin and Development of Geometric Methods. History of Geometry]. Moscow, vol. 1, 1883. 311 p.
10. Chasles. [Géométrie de situation. Démonstration de quelques propriétés du triangle, de l'angle trièdre et du tétraèdre, considérés par rapport aux lignes et surfaces du second ordre]. *Annales de mathématiques pures et appliquées*, vol. 19 (1828–1829), pp. 65–85. Available at: [http://www.numdam.org/volume/AMPA\\_1828-1829\\_\\_19/](http://www.numdam.org/volume/AMPA_1828-1829__19/)
11. Prasolov V.V., Tikhomirov V.M. *Geometriya* [Geometry]. Moscow, MTSNMO Publ., 2007. 328 p.
12. Kheyfets A.L., Loginovskiy A.N., Butorina I.V., Vasil'yeva V.N. *Inzhenernaya 3d-komp'yuternaya grafika* [Engineering 3D Computer Graphics]. Moscow, Izd-vo Yurayt Publ., 2015. 602 p.
13. Kheyfets A.L., Loginovskiy A.N. [3D-Models of Ruled Surfaces with Three Rectilinear Guides]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction and Architecture*, 2008, iss. 7, no. 25(125), pp. 51–56. (in Russ.) Available at: <http://dspace.susu.ru/xmlui/bitstream/handle/0001.74/615/10.pdf?sequence=1>
14. Korotkiy V.A., Kheyfets A.L. [3D Modeling of Conics in AutoCAD]. *Aktual'nyye voprosy graficheskogo obrazovaniya molodezhi. Materialy VI Vserossiyskoy nauchno-metodicheskoy konferentsii* [Actual Issues of Graphic Education of Youth. Materials of the VI All-Russian Scientific-Methodical Conference.]. Rybinsk, RGTA Publ., 2005, pp. 102–105. (in Russ.)
15. Kheyfets A.L. [Geometrical Accuracy of Computer Algorithms for Constructive Problems]. *Materialy VI Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy internet-konferentsii, Perm', fevral'-mart 2016 g.* [The Problem of the Quality of the Graphic Preparation of Students in Technical High School: Tradition and Innovation]. Perm', PGU Publ., 2016, iss. 3, pp. 367–387. (in Russ.) Available at: <http://dgng.pstu.ru/conf2016/papers/74/>

16. Kheyfets A. L. [3D-Model of Ruled Surface with Three Curvilinear Guides]. [11th International Conference 3IA'2008, the International Conference in Computer Graphics and Artificial Intelligence. 30–31 May 2008. Athens. Greece Eurographics. Organised by: XLIM Laboratory University of Limoges], 2008, pp. 223–227.

17. Kheyfets A.L. [3D Models and Algorithms for Computer-Based Parameterization for the Decision of Tasks of Constructive Geometry (at Some Historical Examples)]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Computer Technologies, Automatic Control, Radioelectronics*, 2016, vol. 16, no. 2, pp. 24–42. (in Russ.) DOI: 10.14529/ctcr160203

18. Kheyfets A.L. [Chasles' Theorem as a 3D Analogue of Pascal's Theorem]. [Computer Graphics and 3D Modeling in Engineering Education]. Moscow, 2020. Available at: [https://inforino.mpei.ru/submission/Lists/RegList2019/Attachments/38/Presentation\\_20190038\\_v1.pdf](https://inforino.mpei.ru/submission/Lists/RegList2019/Attachments/38/Presentation_20190038_v1.pdf)

19. Karkasnyy tetraedr [Wireframe Tetrahedron]. Available at: [https://studbooks.net/2395470/matematika\\_himiya\\_fizika/karkasnye\\_tetraedry](https://studbooks.net/2395470/matematika_himiya_fizika/karkasnye_tetraedry)

20. Poluvpisannaya sfera [Half Inscribed Sphere]. Available at: <http://www.myshared.ru/slide/546522/>

21. Kheyfets A.L. [Descriptive Geometry as “Running in Bags”]. *Problemy kachestva graficheskoy podgotovki studentov v tekhnicheskoy vuzе. Materialy V Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy internet-konferentsii. KGP 2015* [Descriptive Geometry as a Factor Limiting the Development of Geometric Modeling. Proceedings of the V International scientific and practical Internet-conference]. Perm', PGU Publ., 2015, pp. 292–325. (in Russ.)

*Received 3 September 2020*

---

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Хейфец, А.Л. Неизвестные особенности взаимного пересечения тетраэдра и квадрики (теорема Шаля) / А.Л. Хейфец // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2020. – Т. 20, № 4. – С. 53–64. DOI: 10.14529/build200407

### FOR CITATION

Kheyfets A.L. Unknown Features of the Mutual Intersection of Tetrahedron and Quadric (Chasles' Theorem). *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2020, vol. 20, no. 4, pp. 53–64. (in Russ.). DOI: 10.14529/build200407

---