

## ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КВАЗИДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ГРУППОВОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ ОДИНОЧНОЙ ЦЕЛИ

А.А. Дубанов<sup>1</sup>, Т.В. Аюшеев<sup>2</sup>, А.Э. Севзэн<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, г. Улан-Удэ, Россия

<sup>2</sup> Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, г. Улан-Удэ, Россия

В статье представлена геометрическая модель процесса преследования одиночной цели группой преследователей. Квазидискретная модель группового преследования цели основана на том, что каждый из преследователей в расчетное время, соответствующее его шагу, проектирует прогнозируемую траекторию движения, согласно его цели и стратегии. Движение происходит на плоскости, но при необходимости данную модель можно перенести на поверхность, заданную в явном виде. Скорости движения всех участников, как преследователей, так и цели, постоянны по модулю. Цели и стратегии каждого из преследователей, несмотря на различие траекторий, объединяет один критерий: они стремятся подойти к точке пространства, связанной с преследуемым объектом, под заданным направлением, соблюдая ограничения по кривизне траектории. Цель и стратегия объекта преследования определяется поведением того преследователя, который, достигнув определенного расстояния до цели, переходит на движение с ее скоростью («стратегия погони»). Два других преследователя нацелены на точки, движущиеся курсом, параллельным курсу цели. Достигнув целевых точек, преследователи переходят на курс, параллельный курсу цели, со скоростью, равной скорости движения цели. Еще один преследователь в качестве цели имеет точку, расположенную впереди цели. Этот преследователь стремится подойти к данной точке под прямым углом к траектории цели.

*Ключевые слова:* преследование, уклонение, убегание, моделирование, алгоритм, цель, преследователь, траектория.

### Введение

В рассматриваемой задаче вводится период дискретизации времени, когда преследователь делает шаг и меняет направление движения. Используя квазидискретную модель в задаче преследования, можно аппроксимировать динамический процесс преследования с последующей визуализацией этого процесса.

В статье обсуждаются вопросы следования преследователем, в которых траектории цели и преследователя предварительно смоделированы. Предполагается, что траектория, отвечающая заданным требованиям, автоматически моделируется в каждый момент времени. Рассматривается группа из четырех преследователей.

### 1. Моделирование траектории преследователя

Преследователь начинает движение из точки  $P$  со значением скорости  $V_p$  и достигает цель в точке  $T$ , причем траектория преследователя должна быть сконструирована таким образом, чтобы попадать в точку  $T$  по направлению вектора  $V_p'$ . Траектория движения состоит из прямолинейного отрезка, соединяющего точки  $P$  и  $P_{tan}$ , и из дуги  $T, \overline{P_{tan}}$  радиуса  $R_p$  (рис. 1, а).

На второй участок моделируемой траектории накладываются граничные условия: радиус кривизны не должен быть меньше  $R_p$ , а угол подхода к цели определяется вектором скорости  $V_p'$ . В тес-

товой программе этот вектор перпендикулярен вектору скорости цели  $V_T$ . Центр дуги  $T, \overline{P_{tan}}$ , отвечающей заданным условиям, определяется выражением:

$$C_T = T + R_p \cdot \left( -\frac{V_T}{|V_T|} \right).$$

Для определения точки  $P_{tan}$  сопряжения прямой  $(P, P_{tan})$  с дугой  $T, \overline{P_{tan}}$  реализована процедура – функция, формирующая локальную систему координат с осями  $e_1$  и  $e_2$ :  $e_1 = \frac{C_T - P}{|C_T - P|}$ ,  $e_2 = \begin{bmatrix} -e_{1y} \\ e_{1x} \end{bmatrix}$ . Точка  $C_T$  в этой системе координат преобразуется к виду:  $C_{T.n} = \begin{bmatrix} (C_T - P) \cdot e_1 \\ (C_T - P) \cdot e_1 \end{bmatrix}$ . Отсюда находим координаты точки  $C_{T.n}$ :  $C_{T.n} = \begin{bmatrix} |(C_T - P)| \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Если модуль вектора  $|(C_T - P)|$  равен  $C_x$  (рис. 1, б), то в локальной системе координат  $(e_1, e_2)$  координаты точки сопряжения  $P_{tan.n}$  удовлетворяют системе уравнений в локальной системе координат  $(e_1, e_2)$  с центром в точке  $P$ :

$$(P_{tan.n} - C_{T.n}) \cdot (P_{tan.n} - C_{T.n}) = R_p^2,$$

$$(P_{tan.n} - C_{T.n}) \cdot P_{tan.n} = 0.$$

В системе координат  $(e_1, e_2)$  с центром в точке  $P$  эта система уравнений имеет решение:

$$P_{tan.n} = \begin{bmatrix} \frac{C_x^2 - R_p^2}{C_x} \\ \pm \frac{R_p \cdot \sqrt{(C_x + R_p) \cdot (C_x - R_p)}}{C_x} \end{bmatrix}.$$

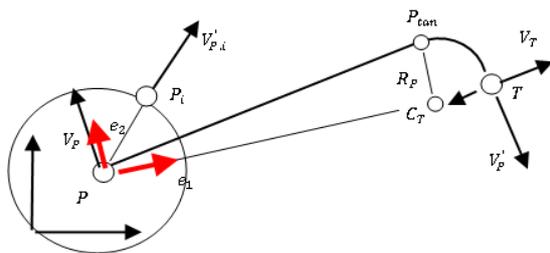


Рис. 1, а. Предполагаемая траектория следования преследователя

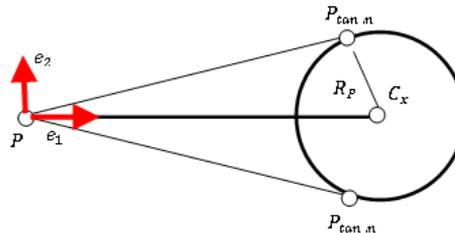


Рис. 1, б. Определение точки сопряжения в локальной системе координат

Для преобразования координат точки  $P_{tan.n}$  в мировую систему координат  $(H_1, H_2)$ , где  $H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , необходимо получить выражения для базиса  $(H_1, H_2)$  относительно базиса  $(e_1, e_2)$ :  $h_1 = \begin{bmatrix} H_1 \cdot e_1 \\ H_1 \cdot e_2 \end{bmatrix}$ ,  $h_2 = \begin{bmatrix} H_2 \cdot e_1 \\ H_2 \cdot e_2 \end{bmatrix}$ . В частности, координаты точки  $P_{tan.n}$  в мировой системе координат равны:  $P_{tan} = \begin{bmatrix} P_{tan.n} \cdot h_1 \\ P_{tan.n} \cdot h_2 \end{bmatrix} + P$ . В программе реализован вариант, когда точка  $P_{tan.n}$  находится в верхнем положении.

В рамках квазидискретной модели задачи преследования введем в рассмотрение период дискретизации  $\Delta T$ . При этом шаг преследователя имеет величину  $|V_p| \cdot \Delta T$ . Если минимальный радиус кривизны равен  $R_p$ , то угловая частота вращения точки  $P$  равна  $\omega_p = \frac{|V_p|}{R_p}$ . Угол подхода к цели дискретно изменяется с шагом  $\omega_p \cdot \Delta T$ .

## 2. Определение координат точки касания в системе координат преследователя

В рассматриваемой квазидискретной модели преследователь должен догнать цель таким образом, чтобы в момент совпадения координат (преследователя и преследуемого объекта) преследователь имел заданный вектор скорости и круговую траекторию с радиусом кривизны, не превышающим допустимой величины. Рассмотрим систему координат  $(v_1, v_2)$  с началом в точке  $P$ ,

где  $v_1 = \frac{V_p}{|V_p|}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} -v_{1y} \\ v_{1x} \end{bmatrix}$  (рис. 2, а). Координаты точки  $P_{tan}$  в этой системе координат равны  $P_{tan.v} = \begin{bmatrix} (P_{tan} - P) \cdot v_1 \\ (P_{tan} - P) \cdot v_2 \end{bmatrix}$ , а координаты точки  $P_{i.v}$  равны:

$$P_{i.v} = \begin{cases} \text{if } P_{tan.vy} \geq 0 & \begin{bmatrix} |V_p| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_p \cdot \Delta T) \\ |V_p| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_p \cdot \Delta T) \end{bmatrix} \\ \text{if } P_{tan.vy} < 0 & \begin{bmatrix} |V_p| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_p \cdot \Delta T) \\ -|V_p| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_p \cdot \Delta T) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Если угол  $\alpha$  меньше, чем угол  $\omega_p \cdot \Delta T$ , то координаты точки  $P_{i.v}$  определяются выражением

$$P_{i.v} = \begin{cases} \text{if } P_{tan.vy} \geq 0 & \begin{bmatrix} |V_p| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ |V_p| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix} \\ \text{if } P_{tan.vy} < 0 & \begin{bmatrix} |V_p| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ -|V_p| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Угол  $\alpha$  – это угол между вектором  $P_{tan.v}$  и вектором  $v_1$ . Переводя координаты точки  $P_{i.v}$  из системы координат  $(v_1, v_2)$  в мировую систему координат, получаем выражения для базиса  $(H_1, H_2)$  в базисе  $(v_1, v_2)$ :

$$h_{1.v} = \begin{bmatrix} H_1 \cdot v_1 \\ H_1 \cdot v_2 \end{bmatrix}, \quad h_{2.v} = \begin{bmatrix} H_2 \cdot v_1 \\ H_2 \cdot v_2 \end{bmatrix},$$

где  $H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

На следующем этапе итераций положение преследователя  $P_i$  определяется выражением:  $P_i = \begin{bmatrix} P_{i.v} \cdot h_{1.v} \\ P_{i.v} \cdot h_{2.v} \end{bmatrix} + P$ , то есть траектория преследователя  $P_i$  приближается к прямой линии  $(P, P_{tan})$ .

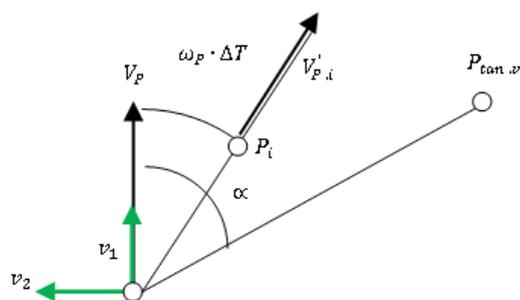


Рис. 2, а. Выбор направления движения преследователя

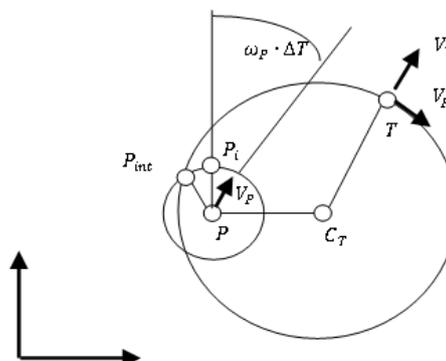


Рис. 2, б. Анализ координат точек пересечения окружностей

### 3. Координаты точек пересечения круговых траекторий

Рассмотрим случай, когда между преследователем  $P$  и центром окружности  $C_T$  расстояние меньше минимального радиуса кривизны траектории  $R_p$  преследователя. На рис. 2, б представлены две пересекающиеся окружности с радиусами  $r_p$  и  $R_p$ . Точки  $P$  и  $C_T$  – центры точек, где  $r_p = \omega_p \cdot \Delta T$ . Требуется определить координаты точки  $P_i$  как функции координат точек  $P_{int}$  пересечения двух окружностей в системе координат  $(e_1, e_2)$  с центром в точке  $P$ , где

$$e_1 = \frac{C_T - P}{|C_T - P|}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} -e_{1y} \\ e_{1x} \end{bmatrix}.$$

В системе координат  $(e_1, e_2)$  выражения для координат точки  $P_{int.n}$  имеют вид:

$$P_{int.n} = \begin{bmatrix} \frac{C_X^2 - R_p^2 + r_p^2}{2 \cdot C_X} \\ \pm \frac{\sqrt{(C_X + R_p - r_p) \cdot (C_X - R_p + r_p) \cdot (R_p - C_X + r_p) \cdot (R_p + C_X + r_p)}}{2 \cdot C_X} \end{bmatrix}.$$

В предлагаемом алгоритме основное внимание уделено верхней точке (см. рис. 2, б). Переведем координаты  $P_{int.n}$  в мировую систему координат:  $P_{int} = \begin{bmatrix} P_{int.n} \cdot h_1 \\ P_{int.n} \cdot h_2 \end{bmatrix} + P$ , где векторы  $h_1$  и  $h_2$  определяются выражениями

$$h_1 = \begin{bmatrix} H_1 \cdot e_1 \\ H_1 \cdot e_2 \end{bmatrix}, \quad h_2 = \begin{bmatrix} H_2 \cdot e_1 \\ H_2 \cdot e_2 \end{bmatrix},$$

где  $H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Для определения координат точек пересечения окружностей перейдем в систему координат  $(v_1, v_2)$  с началом в точке  $P$ :

$$v_1 = \frac{V_p}{|V_p|}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -v_{1y} \\ v_{1x} \end{bmatrix} \quad (\text{рис. 3, а}).$$

В системе координат  $(v_1, v_2)$  координаты точки  $P_{int}$  определяются выражением:

$$P_{int.v} = \begin{bmatrix} (P_{int} - P) \cdot v_1 \\ (P_{int} - P) \cdot v_2 \end{bmatrix}.$$

Координаты  $P_{i.v}$  в системе координат  $(v_1, v_2)$  с началом в точке  $P$  имеют вид:

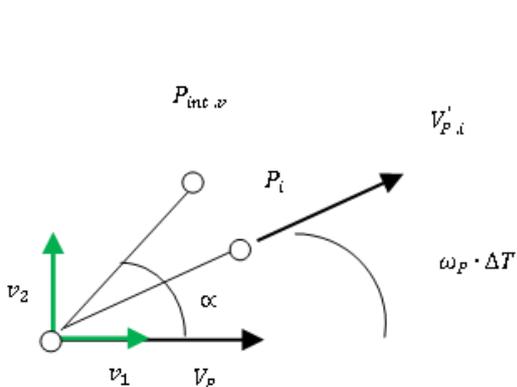


Рис. 3, а. Анализ в системе координат преследователя

$$P_{i.v} = \begin{cases} \text{if } P_{int.vy} \geq 0 \begin{bmatrix} |V_p| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_p \cdot \Delta T) \\ |V_p| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_p \cdot \Delta T) \end{bmatrix} \\ \text{if } P_{int.vy} < 0 \begin{bmatrix} |V_p| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_p \cdot \Delta T) \\ -|V_p| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_p \cdot \Delta T) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Если угол  $\alpha$  меньше, чем угол  $\omega_p \cdot \Delta T$ , то координаты точки  $P_{i.v}$  равны:

$$P_{i.v} = \begin{cases} \text{if } P_{int.vy} \geq 0 \begin{bmatrix} |V_p| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ |V_p| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix} \\ \text{if } P_{int.vy} < 0 \begin{bmatrix} |V_p| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ -|V_p| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Угол  $\alpha$  – угол между вектором  $P_{int.v}$  и вектором  $v_1$ .

Преобразуя координаты  $P_{i.v}$  из системы координат  $(v_1, v_2)$  в мировую систему координат, получаем выражения для базиса  $(H_1, H_2)$  в базисе  $(v_1, v_2)$ :

$$h_{1.v} = \begin{bmatrix} H_1 \cdot v_1 \\ H_1 \cdot v_2 \end{bmatrix}, \quad h_{2.v} = \begin{bmatrix} H_2 \cdot v_1 \\ H_2 \cdot v_2 \end{bmatrix},$$

где  $H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

Отсюда находим выражения для координат преследователя  $P_i$  на следующем этапе итераций:

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i.v} \cdot h_{1.v} \\ P_{i.v} \cdot h_{2.v} \end{bmatrix} + P.$$

Таким образом, рассмотрен алгоритм перехода преследователя на дугу  $\widehat{P_{int}, T}$  (см. рис. 2, б).

### 4. Случай непересекающихся окружностей

Рассмотрим случай  $|P - C_p| < R_p - r_p$ . В этой ситуации следует поставить точку  $P_{int}$  на оси  $(P, C_p)$  слева от точки  $P$  (см. рис. 3, б). В системе координат  $(e_1, e_2)$  с центром в точке  $C_T$  эта точка имеет координаты  $P_{int.n} = \begin{bmatrix} -R_p \\ 0 \end{bmatrix}$ . Требуется рассчитать угол  $\alpha$  между вектором  $V_p$  и вектором  $\overrightarrow{P, P_{int}}$ .

Если угол  $\alpha$  меньше, чем угол  $\omega_p \cdot \Delta T$ , то координаты точки  $P_{i.v}$  на следующем шаге итераций в системе координат  $(v_1, v_2)$  с началом в точке  $P$  определяются выражением

$$P_{i.v} = \begin{bmatrix} |V_p| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ |V_p| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix}.$$

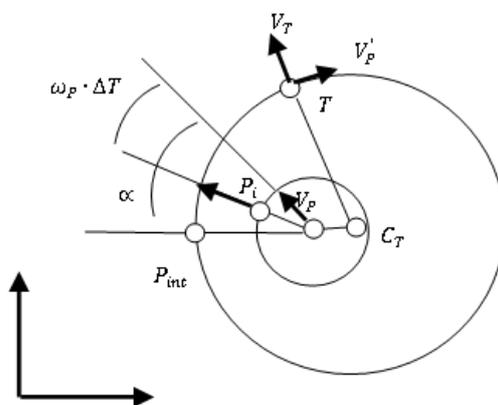


Рис. 3, б. Случай непересекающихся окружностей

Если при этом точка  $T$  в системе координат  $(e_1, e_2)$  с центром в точке  $C_T$  находится в верхней полуплоскости, то

$$P_{i.v} = \begin{bmatrix} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ |V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix},$$

а если в нижней полуплоскости, то

$$P_{i.v} = - \begin{bmatrix} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ |V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Если же угол  $\alpha$  больше, чем угол  $\omega_P \cdot \Delta T$ , то координаты точки  $P_{i.v}$  определяются выражением

$$P_{i.v} = \begin{bmatrix} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_P \cdot \Delta T) \\ |V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_P \cdot \Delta T) \end{bmatrix}.$$

При этом также реализуются две возможности: если точка  $T$  находится в верхней полуплоскости, то

$$P_{i.v} = \begin{bmatrix} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_P \cdot \Delta T) \\ |V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_P \cdot \Delta T) \end{bmatrix},$$

а если в нижней полуплоскости, то

$$P_{i.v} = - \begin{bmatrix} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_P \cdot \Delta T) \\ |V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_P \cdot \Delta T) \end{bmatrix}.$$

Рассмотренная ситуация встречается, когда скорость преследователя намного превышает скорость цели или очень мала угловая скорость преследователя.

## 5. Цель и стратегия первого преследователя

Пусть преследователь  $P_1$ , движущийся со скоростью  $V_1$ , догонит объект  $T$ . «Догнать объект» – означает совместить координаты точек  $P_1$  и  $T$  с точностью  $|P_1 - T| \leq \varepsilon$ , где  $\varepsilon = |V_1| \cdot \Delta T$  ( $\Delta T$  – период дискретизации). Полагая, что объект  $P_1$  имеет максимальную угловую скорость вращения

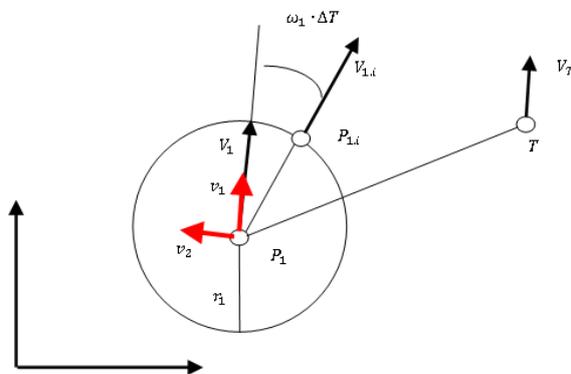


Рис. 4, а. Стратегия первого преследователя

ния  $\omega_1$ , ограничим радиус кривизны траектории движения преследователя величиной  $R_1 = \frac{|V_1|}{\omega_1}$ .

Для реализации стратегии преследователя  $P_1$  надо выполнить расчет координат точки  $T$  в системе координат  $(v_1, v_2)$  с началом координат в точке  $P_1$ , где

$$v_1 = \frac{V_P}{|V_P|},$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} -v_{1y} \\ v_{1x} \end{bmatrix}.$$

Получаем координаты точки  $T_v$ :

$$T_v = \begin{bmatrix} (T - P_1) \cdot v_1 \\ (T - P_1) \cdot v_2 \end{bmatrix}.$$

Исследуя положение точки  $T_v$ , определяем ее принадлежность верхней или нижней полуплоскости в системе координат  $(v_1, v_2)$  с началом координат в точке  $P_1$  (рис. 4, а):

$$P_{1.v} = \begin{cases} |V_1| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_1 \cdot \Delta T) \\ |V_1| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_1 \cdot \Delta T) \end{cases} \text{ if } T_{vy} \geq 0$$

$$P_{1.v} = \begin{cases} |V_1| \cdot \Delta T \cdot \cos(\omega_1 \cdot \Delta T) \\ -|V_1| \cdot \Delta T \cdot \sin(\omega_1 \cdot \Delta T) \end{cases} \text{ if } T_{vy} < 0$$

В процессе расчета сравниваем значения углов  $\omega_1 \cdot \Delta T$  и  $\alpha$ , где  $\alpha$  – угол между векторами  $\overline{P_1 T}$  и  $V_1$ . Если угол  $\alpha$  меньше угла  $\omega_P \cdot \Delta T$ , то координаты точки  $P_{1.v}$  равны:

$$P_{i.v} = \begin{cases} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ |V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \text{ if } T_{vy} \geq 0$$

$$P_{i.v} = \begin{cases} |V_P| \cdot \Delta T \cdot \cos(\alpha) \\ -|V_P| \cdot \Delta T \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \text{ if } T_{vy} < 0$$

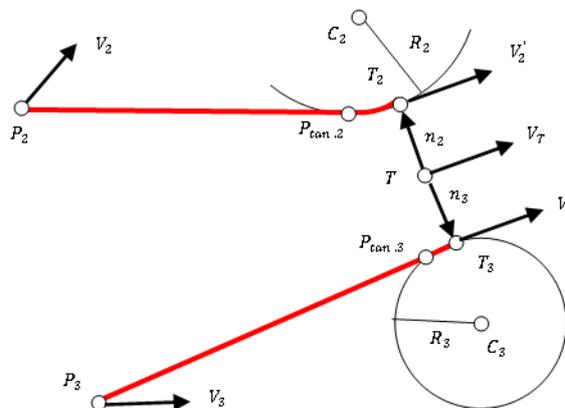


Рис. 4, б. Стратегии второго и третьего преследователей

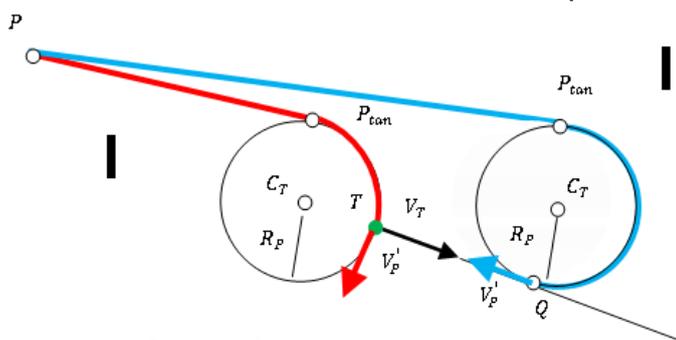


Рис. 4, в. Стратегия преследователя из «засады»

### 6. Цели и стратегии второго и третьего преследователей

Преследователи  $P_2$  и  $P_3$  движутся со скоростями  $V_2$  и  $V_3$ . Их целью является совмещение (с определенной степенью точности  $\varepsilon$ ) точек  $T_2$  и  $T_3$  (рис. 4, б). Координаты точек  $T_2$  и  $T_3$  формируются в виде:

$$T_{2,3} = T + n_{2,3}.$$

Введем в рассмотрение векторы нормалей

$$n_{2,3} = \pm \frac{1}{|V_T|} \begin{bmatrix} -V_{Ty} \\ V_{Tx} \end{bmatrix} \cdot \Delta S_{2,3},$$

где  $\Delta S_{2,3}$  – расстояния от точек  $T_2$  и  $T_3$  до точки  $T$ .

Объекты  $P_2$  и  $P_3$  должны подходить к точкам  $T_2$ ,  $T_3$  со скоростями  $V'_2$ ,  $V'_3$ . Радиусы кривизны траекторий этих объектов не должны быть меньше  $R_{2,3} = \frac{|\omega_{2,3}|}{\omega_{1,2}}$ , где  $\omega_{2,3}$  – максимальные угловые скорости вращения преследователей  $P_2$  и  $P_3$ .

Напомним, что в каждый момент времени моделируемая траектория состоит из прямолинейного участка  $[P_{2,3}, P_{tan.2,3}]$  и сегмента дуги  $P_{tan.2,3}, T_{2,3}$ . На каждом шаге итераций объекты  $P_2$  и  $P_3$  выполняют поворот на угол  $\Delta\omega$  и поступательно перемещаются на определенное расстояние. В предлагаемом алгоритме объекты  $P_2$  и  $P_3$  начинают движение со скоростью  $V_T$ , как только выходят на курс, параллельный курсу преследуемого объекта  $T$ .

### 7. Цель и стратегия четвертого преследователя

Если условно классифицировать первого участника как главного «загонщика», а второго и третьего участников полагать его помощниками, то четвертого участника можно назвать игроком из «засады».

На рис. 4, в представлены два случая. В первом случае траектория преследователя заканчивается непосредственно в точке цели  $T$ , причем в этой точке вектор скорости преследователя перпендикулярен вектору скорости цели  $V_T$ . Во втором случае вектор скорости точки  $Q$  направлен противоположно вектору скорости цели  $V_T$ . Точка  $Q$  расположена на прямой линии, проведенной из точки  $T$  по направлению вектора  $V_T$  (см. рис. 4, в). Если произвольно ука-

зать точку  $Q$  в любой точке плоскости преследования, то мы не сможем достичь цели.

После достижения точки  $Q$  можно изменить стратегию преследователя. Например, скорость может быть снижена до нуля. В этом случае стратегия сводится к ожиданию момента приближения цели на расстояние, меньшее  $\varepsilon$ .

После достижения точки  $Q$  стратегия четвертого преследователя может совпадать со стратегией первого преследователя.

### 8. Цель и стратегия объекта преследования

Цель объекта преследования в рассматриваемой модели – уклонение от первого преследователя.

На рис. 5, а показана стратегия преследуемого объекта. Объект  $T$ , движущийся с поступательной скоростью  $V_T$  и с угловой скоростью  $\omega_T$ , совершает за период дискретизации  $\Delta T$  поворот на угол  $\omega_T \cdot \Delta T$  и перемещается на расстояние  $|T_i - T| = |V_T| \cdot \Delta T$ . Направление вращения точки  $T$  зависит от того, в какой полуплоскости находится преследователь  $P_1$ .

В качестве альтернативной стратегии может быть избрана стратегия «параллельной скорости», показанная на рис. 5, б, из которого видно, что объект преследования  $T$  изменяет направление вектора своей скорости  $V_T$ , стремясь двигаться параллельно направлению вектора скорости преследователя  $V_1$ . Стратегия параллельной скорости предпочтительна, если преследователь находится далеко от цели. Когда преследователь приближается на дистанцию нескольких итерационных шагов (дистанция «последнего прыжка»), для цели становится выгодна стратегия уклонения (см. рис. 5, б).

### Выводы и заключение

На основе материалов, представленных в статье, составлен программный модуль в пакете компьютерной графики MathCAD, рассчитывающий траектории движения группы из четырех преследователей и цели, уклоняющейся от преследователей.

Каждый участник погони в рассматриваемой геометрической модели имеет свою собственную цель и стратегию. На рис. 6 показан кадр видео-

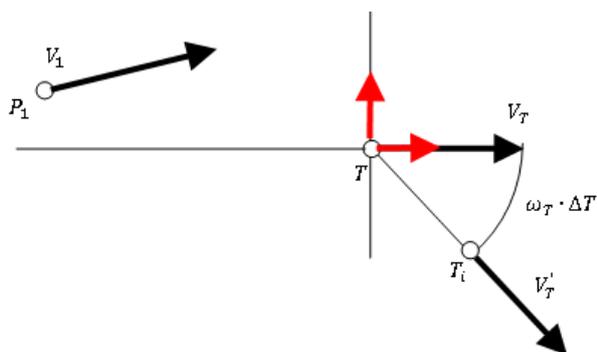


Рис. 5, а. Стратегия объекта преследования

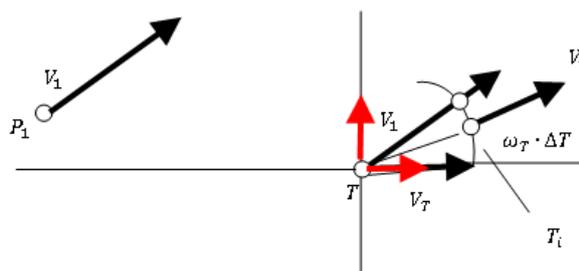


Рис. 5, б. Дополнительная стратегия объекта преследования

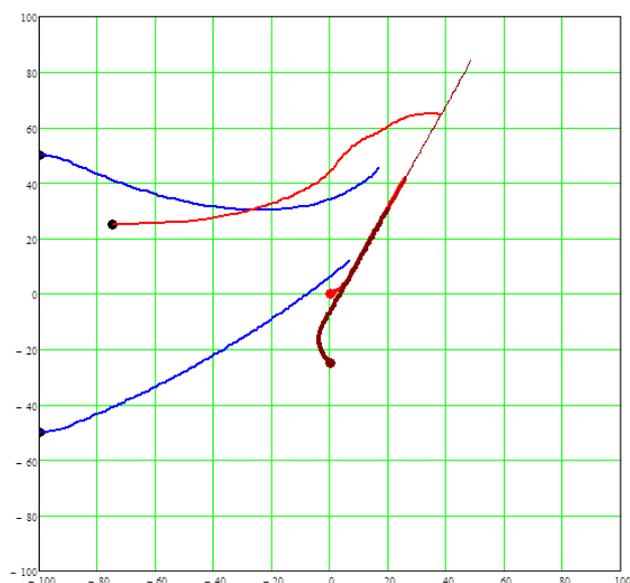


Рис. 6. Результат моделирования группового преследования одиночной цели

фильма, где один преследователь совершает погоню «по следу», а два преследователя догоняют цель по параллельной траектории. Еще один преследователь движется ортогонально к траектории цели. В разработанном программном модуле изменены цель и стратегия четвертого преследователя для упрощенного указания координат точек входа и векторов скорости в этих точках.

Статья подготовлена на основе теоретических положений, изложенных в работах [1–6]. Описание алгоритмов следования рекомендованным траекториям размещено на ресурсе [7]. На ресурсе [8] представлен видеофильм с результатами геометрического моделирования в рамках разработанного программного модуля. Исходный код программы доступен на ресурсе [9]. При создании и разработке алгоритмов использованы работы [10–20].

### Литература

1. Айзекс, Р. Дифференциальные игры / Р. Айзекс. – М.: Мир, 1967.
2. Понтрягин, Л.С. Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. МИАН СССР / Л.С. Понтрягин. – 1971. – Т. 112. – С. 30–63.
3. Красовский, Н.Н. Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974.
4. Желнин, Ю.Н. Линеаризованная задача преследования и уклонения на плоскости / Ю.Н. Желнин // Ученые записки ЦАГИ. 1977. – № 3. – Т. 8. – С. 88–98.
5. Бурдаков, С.В. Алгоритмы управления движением мобильным роботом в задаче преследования / С.В. Бурдаков, П.А. Сизов // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университе-

та. Информатика. Телекоммуникации. Управление. – 2014. – № 6 (210). – С. 49–58.

6. Симакова, Э.Н. Об одной дифференциальной игре преследования / Э.Н. Симакова // Автоматика и телемеханика. – 1967. – № 2. – С. 5–14.

7. Алгоритм следования прогнозируемым траекториям в задаче преследования. – <http://dubanov.exponenta.ru> (дата обращения: 22.07.2019)

8. Видео, групповое преследование одиночной цели. – <https://www.youtube.com/watch?v=aC4PuXTgVSO&feature=youtu.be>

9. Групповое преследование с различными стратегиями одиночной цели. – <http://dubanov.exponenta.ru>.

10. Вагин, Д.А. Задача преследования жестко скоординированных убегающих / Д.А. Вагин, Н.Н. Петров // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2001. – № 5. – С. 75–79.

11. Банников, А.С. Некоторые нестационарные задачи группового преследования / А.С. Банников // Известия Института математики и информатики УдГУ. – 2013. – Вып. 1 (41). – С. 3–46.

12. Банников, А.С. Нестационарная задача группового преследования / А.С. Банников // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2006. – Т. 34. – С. 26–28.

13. Изместьев, И.В. Задача преследования маломаневренных объектов с терминальным множеством в форме кольца / И.В. Изместьев, В.И. Ухоботов // Материалы международной конференции «Геометрические методы в теории управления и математической физике: дифференциальные уравнения, интегрируемость, качественная теория» Рязань, 15–18 сентября 2016 г., Итоги

науки и техн. Сер. Соверм. мат. и ее прил. Темат. обз., 148. – ВИНТИ РАН, М., 2018. – С. 25–31.

14. Константинов, Р.В. О квазилинейной дифференциальной игре с простой динамикой при наличии фазового ограничения / Р.В. Константинов // Математические заметки. – 2001. – Т. 69. – Вып. 4. – С. 581–590.

15. Панкратова, Я.Б. Решение кооперативной дифференциальной игры группового преследования / Я.Б. Панкратова // Дискретный анализ и исследование операций. – 2010. – Т. 17. – № 2. – С. 57–78.

16. Петросян, Л.А. Теория игр / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.В. Шевкопляс. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012. – 424 с.

17. Петросян, Л.А. Преследование на плоскости / Л.А. Петросян, Б.Б. Рихсиев. – М.: Наука, 1991. – 94 с.

18. Петросян, Л.А. Геометрия простого преследования / Л.А. Петросян, Г.В. Томский. – Новосибирск: Наука, 1983. – 143 с.

19. Петров, Н.Н. Одна задача простого преследования с фазовыми ограничениями / Н.Н. Петров // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 5. – С. 22–26.

20. Петров, Н.Н. Многократная поимка в примере Л.С. Понтрягина с фазовыми ограничениями / Н.Н. Петров // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61. – Вып. 5. – С. 747–754.

Дубанов Александр Анатольевич, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры геометрии и методики преподавания, Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова (Улан-Удэ), alandubanov@mail.ru

Аюшеев Тумэн Владимирович, доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой инженерной и компьютерной графики, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления (Улан-Удэ), atv62@bk.ru

Севээн Ай-Кыс Эрес-ооловна, ассистент кафедры прикладной математики и дифференциальных уравнений, Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова (Улан-Удэ), aikys.seveen@mail.ru

Поступила в редакцию 28 сентября 2020 г.

DOI: 10.14529/build200408

## GEOMETRIC QUASI-DISCRETE MODEL OF GROUP PURSUIT OF A SINGLE TARGET

A.A. Dubanov<sup>1</sup>, alandubanov@mail.ru

T.V. Ayusheev<sup>2</sup>, atv62@bk.ru

A.E. Seveen<sup>1</sup>, aikys.seveen@mail.ru

<sup>1</sup> Buryat State University, Ulan-Ude, Russian Federation

<sup>2</sup> East Siberian State University Technology and Management, Ulan-Ude, Russian Federation

This article describes a geometric model of the process of pursuing a single target by a group of pursuers. The quasi-discrete model of group pursuit of a target is based on the fact that the pursuers, at the estimated time corresponding to their steps, design the predicted trajectory of movement, according to their targets and strategy. The movement occurs on a plane, but if necessary, this model can be transferred to the explicitly defined surface. The speed of movement of all participants, both pursuers and targets, is constant in magnitude. The targets and strategies of the pursuers, despite the difference in trajectories, are united by one criterion: they strive to approach the point in space associated with the pursued object, under a given direction, observing the restrictions on the curvature of the trajectory. The target and strategy of the object of pursuit is determined by the behavior of the pursuer who, having reached a certain distance to the target, switches to moving with the speed of the latter ("pursuit strategy"). The other two pursuers are aimed at points moving parallel to the target's course. Having reached the target points, the pursuers move to a course parallel to the target's course, at a speed equal to the target's movement speed. Another pursuer has a point located in front of the target as a target. These pursuers seek to approach a given point at a right angle to the target's trajectory.

*Keywords: pursuit, evasion, escape, simulation, algorithm, target, pursuer, trajectory.*

## References

1. Ayzeks R. *Differentsial'nyye igry* [Differential Games]. Moscow, Mir Publ., 1967. 480 p.
2. Pontryagin L.S. [Linear Differential Game of Evasion]. Tr. MIAN SSSR [Proceedings of the Steklov Institute of the USSR], 1971, vol. 112, pp. 30–63. (in Russ.)
3. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. *Pozitsionnyye differentsial'nyye igry* [Positional Differential Games]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 456 p.
4. Zhelnin Yu.N. [Linearized Pursuit and Evasion Problem on a Plane]. *Uchenyye zapiski TSAGI* [Scientific notes of TSAGI], 1977, vol. 8, no. 3, pp. 88–98. (in Russ.)
5. Burdakov S.V., Sizov P.A. [Algorithms for Motion Control by a Mobile Robot in the Pursuit Problem]. *Nauchno-tehnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Informatika. Telekommunikatsii. Upravleniye* [Scientific and Technical Bulletin of the Saint Petersburg State Polytechnic University. Computer Science. Telecommunications. Management], 2014, no. 6 (210), pp. 49–58. (in Russ.)
6. Simakova E.N. [On one Differential Game of Pursuit]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automatics and Telemechanics], 1967, no. 2, pp. 5–14. (in Russ.)
7. *Algoritm sledovaniya prognoziruyemym trayektoriyam v zadache presledovaniya* [Algorithm for Following Predicted Trajectories in the Pursuit Problem]. Available at: <http://dubanov.exponenta.ru> (accessed: 22.07.2019)
8. *Video, gruppovoye presledovaniye odinochnoy tseli* [Video, Group Pursuit of a Single Goal]. Available at: <https://www.youtube.com/watch?v=aC4PuXTgVS0>
9. [Section “Group Pursuit with Different Strategies for a Single Goal”]. Available at: <http://dubanov.exponenta.ru>
10. Vagin D.A., Petrov N.N. [The Task of Chasing Rigidly Coordinated Escapees]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [Izvestiya RAS. Theory and Control Systems], 2001, no. 5, pp. 75–79. (in Russ.)
11. Bannikov A.C. [Some Non-Stationary Problems of Group Pursuit]. *Izvestiya Instituta matematiki i informatiki UdGU* [Proceedings of the Institute of Mathematics and Computer Science of UdSU], 2013, iss. 1 (41), pp. 3–46. (in Russ.)
12. Bannikov A.S. [Nonstationary Problem of Group Pursuit]. *Trudy Matematicheskogo tsentra imeni N.I. Lobachevskogo. Kazan': Izd-vo Kazanskogo matematicheskogo obshchestva* [Scientific Works of the Lobachevsky Mathematical Center], 2006, vol. 34, pp. 26–28. (in Russ.)
13. Izmest'yev I.V., Ukhobotov V.I. [The Problem of Chasing Low-Maneuverable Objects with a Terminal Set in the Form of a Ring]. *Materialy mezhdunarodnoy konferentsii “Geometricheskiye metody v teorii upravleniya i matematicheskoy fizike: differentsial'nyye uravneniya, integriruyemost', kachestvennaya teoriya” Ryazan', 15–18 sentyabrya 2016 g., Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i eye pril. Temat. obz., 148* [Proceedings of the International Conference “Geometric Methods in Control Theory and Mathematical Physics: Differential Equations, Integrability, Qualitative Theory” Ryazan, September 15–18, 2016, Results of Science and Technology. Ser. Sovrem. Mat. and its ADJ. Temat. Obz., 148]. Moscow, VINITI RAN Publ., 2018, pp. 25–31. (in Russ.)
14. Konstantinov R.V. [On a Quasi-Linear Differential Game with Simple Dynamics in the Presence of a Phase Constraint]. *Matematicheskiye zametki* [Mathematical Notes], 2001, vol. 69, iss. 4, pp. 581–590. (in Russ.)
15. Pankratova Ya.B. [A Solution of a Cooperative Differential Game of Group Pursuit]. *Diskretnyy analiz i issledovaniye operatsiy* [Discrete Analysis and Operations Research], 2010, vol. 17, no. 2, pp. 57–78. (in Russ.)
16. Petrosyan L.A., Zenkevich N.A., Shevkoplyas E.V. *Teoriya Igr* [Game Theory]. St. Petersburg, 2012. 424 p.
17. Petrosyan L.A., Rikhsiyev B.B. *Presledovaniye na ploskosti* [Pursuit on the Plane]. Nauka Publ., 1991. 94 p.
18. Petrosyan L.A., Tomskiy G.V. *Geometriya prostogo presledovaniya* [Geometry of Simple Pursuit]. Nauka Publ., 1983. 143 p.
19. Petrov N.N. [One Problem of Simple Pursuit with Phase Restrictions]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automatics and Telemechanics], 1992, no. 5, pp. 22–26. (in Russ.)
20. Petrov N.N. [Multiple Capture in the Example of L.S. Pontryagin with Phase Restrictions]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1997, vol. 61, iss. 5, pp. 747–754. (in Russ.)

Received 28 September 2020

---

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Дубанов, А.А. Геометрическая квазидискретная модель группового преследования одиночной цели / А.А. Дубанов, Т.В. Аюшеев, А.Э. Севээн // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2020. – Т. 20, № 4. – С. 65–72. DOI: 10.14529/build200408

## FOR CITATION

Dubanov A.A., Ayusheev T.V. Seveen A.E. Geometric Quasi-Discrete Model of Group Pursuit of a Single Target. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2020, vol. 20, no. 4, pp. 65–72. (in Russ.). DOI: 10.14529/build200408