

Инженерная геометрия и компьютерная графика

УДК 514.851

DOI: 10.14529/build210308

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФИЗИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

В.А. Короткий¹, И.Г. Витовтов²

¹ Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия

² Челябинский институт путей сообщения УрГУПС, г. Челябинск, Россия

Физическим сплайном называют упругий стержень, размеры поперечного сечения которого весьма малы по сравнению с длиной и радиусом кривизны его оси. Пример физического сплайна – тонкая металлическая линейка. Такая линейка, проходя через заданные точки, естественным образом приобретает «природоподобную» форму, характеризующуюся минимальной энергией внутренних напряжений и минимальной средней кривизной. Поиск уравнения упругой линии представляет собой сложную математическую задачу, не имеющую элементарного решения. В статье рассматриваются полиномиальные и параметрические способы геометрического моделирования физического сплайна, проходящего через наперед заданные точки. Упругая линия физического сплайна получена экспериментально. Показано, что полиномиальная модель заметно отличается от экспериментально полученного физического сплайна, что ставит под сомнение возможность использования кубических полиномов для моделирования упругой линии с большими прогибами. Параметризованная модель на основе кривых Фергюсона дает высокую точность аппроксимации, если в базисных точках заданы касательные к упругой линии физического сплайна. Рассмотрены примеры моделирования физического сплайна со свободными и защемленными концами. В случае свободного сплайна погрешность параметрической модели составила 0,4 %, для сплайна с защемленными концами получена погрешность менее 1,5 %. Вычисления выполнены с помощью программного средства SMath Studio.

Ключевые слова: аффинное сжатие, кубическая кривая, кривая Фергюсона, полиномиальная модель, параметрическая модель, векторная производная, графическое дифференцирование.

Введение

Физическим сплайном называют упругий стержень, размеры поперечного сечения которого весьма малы по сравнению с длиной и радиусом кривизны его оси. Пример физического сплайна – тонкая металлическая линейка. Такая линейка, проходя через заданные компланарные точки, естественным образом приобретает форму, характеризующуюся минимальной энергией внутренних напряжений и минимальной средней кривизной (рис. 1). Физический сплайн – наиболее гладкая кривая из всех кривых, проходящих через заданные точки [1, 2].

Лыжник-слаломист, объезжающий флажки на трассе, выбирает наискорейшую траекторию спуска с минимальной кривизной, вычерчивая на склоне горы пространственный физический сплайн, проходящий через точки, отмеченные флажками.

Если предложить разным людям начертить от руки плавную кривую, проходящую через данные точки, то все начертят примерно одинаковую кривую, близкую к физическому сплайну. При этом рукой человека управляет осознанное или неосознанное понимание того, что наиболее естественная, наиболее «природоподобная» кривая должна обладать наименьшей средней кривизной, с минимумом изгибной деформации. Такие формы широко используются в современном архитектурно-строительном проектировании [3].

Явное уравнение физического сплайна, проходящего через наперед заданные точки, может быть найдено лишь при условии малых прогибов (малых отклонений от прямой линии). В этом случае физический сплайн с удовлетворительной точностью описывается

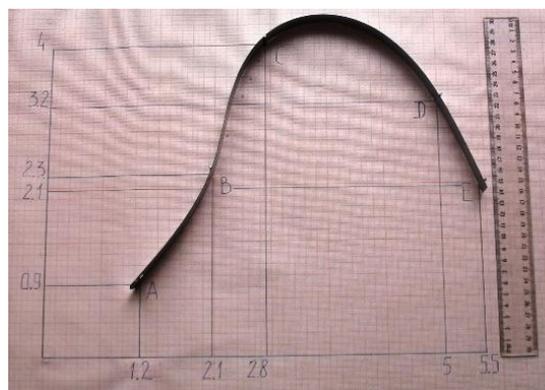


Рис. 1. Физический сплайн (фото)

Инженерная геометрия и компьютерная графика

составной кусочно-кубической полиномиальной кривой с непрерывными вторыми производными в стыковых точках [4].

Для больших прогибов решение принципиально усложняется. Интегральные уравнения, описывающие форму упругого бесконечно тонкого стержня с большими прогибами, могут быть найдены для случая, когда дана система сил и моментов, действующих на стержень [5].

Если же вместо системы сил и моментов указан набор опорных точек, через которые должен пройти физический сплайн, то поиск его уравнения еще более усложняется. В теории упругости такая задача не рассматривается. Согласно [6], она сводится к вариационной задаче, не имеющей элементарного решения.

Таким образом, упругая линия, проходящая через опорные (наперед заданные) точки, может быть получена экспериментально или начерчена «от руки» архитектором-проектировщиком, но поиск уравнения этой линии представляет собой сложную математическую задачу. Поэтому в дальнейшем упругая линия физического сплайна считается известной и рассматривается задача моделирования (аппроксимации) этой линии набором полиномиальных или параметрических кубических кривых, гладко состыкованных между собой.

1. Постановка задачи

Будем считать, что форма физического сплайна, проходящего через наперед заданные компланарные точки, известна (получена экспериментально либо начерчена «от руки» архитектором). Требуется найти проходящую через заданные точки достаточно простую функцию, аппроксимирующую физический сплайн. Эта математическая функция необходима для выполнения прочностных и массогабаритных расчетов проектируемого здания или сооружения, что обуславливает актуальность и практическую значимость поставленной задачи [7, 8].

Рассматриваются два способа решения задачи аппроксимации: 1) на основе кубических парабол [9]; 2) с помощью кубического параметрического сплайна, составленного из кривых Фергюсона [10, 11].

В качестве исходных данных использованы результаты экспериментального моделирования физического сплайна (упругой металлической или пластиковой линейки).

2. Моделирование физического сплайна (эксперимент)

На планшете закреплена масштабно-координатная бумага. В опорные точки $A(1.2, 0.9)$, $B(2.1, 2.3)$, $C(2.8, 4)$, $D(5, 3.2)$, $E(5.5, 2.1)$ вбиты тонкие булавки с нанесенной на них смазкой (для снижения трения). Масштаб планшета 70:1. На планшет уложена гибкая металлическая линейка, огибающая булавки. Координаты опорных точек назначены в зоне упругой деформации материала линейки.

2.1. Сплайн со свободными концами. Моделирование физического сплайна со свободными концами выполнено в двух вариантах. Согласно первому варианту, металлическая линейка проходит через указанные опорные точки A, B, C, D, E . Согласно второму варианту, исходный набор опорных точек аффинно сжимается к оси x с коэффициентом сжатия 0.5. Новые опорные точки A', B', C', D', E' занимают среднее положение между исходными точками A, B, C, D, E и осью x (рис. 2). В обоих вариантах свободные концы линеек принимают свое естественное положение.

Используя алгоритм графического дифференцирования [12], определяем значения производных (тангенсов углов наклона касательных) исходного физического сплайна $ABCDE$ в его опорных точках:

$$\operatorname{tg} \delta_A = 1.134, \operatorname{tg} \delta_B = 2.840, \operatorname{tg} \delta_C = 0.985, \operatorname{tg} \delta_D = -1.815, \operatorname{tg} \delta_E = -2.460. \quad (1)$$

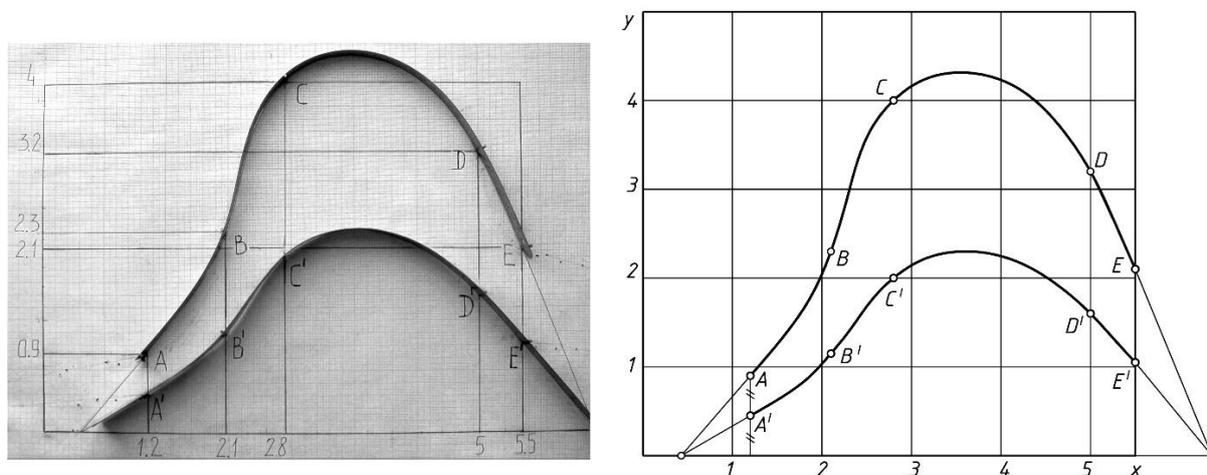


Рис. 2. Исходная и аффинно-сжатая упругие линейки со свободными концами (фото и чертеж)

Выполнив аффинное сжатие $\{A, B, C, D, E\} \rightarrow \{A', B', C', D', E'\}$ с коэффициентом сжатия 0.5, замечаем, что касательные к исходной и сжатой линейкам в конечных точках A, A' и E, E' пересекаются на оси x (см. рис. 2), следовательно, первые производные на концах сжатого физического сплайна уменьшились ровно в два раза.

Тем не менее нельзя утверждать, что аффинное сжатие семейства опорных точек приводит к аффинной деформации любого сегмента физического сплайна. Планшетные измерения дают для «сжатого» сплайна следующий результат:

$$\operatorname{tg} \delta_A = 0.567, \operatorname{tg} \delta_B = 1.205, \operatorname{tg} \delta_C = 0.811, \operatorname{tg} \delta_D = -1.00, \operatorname{tg} \delta_E = -1.230. \tag{1'}$$

Производные в опорных точках исходной и сжатой кривой изменились не в 2 раза, а в 2.36 (точки $B \sim B'$), в 1.21 (точки $C \sim C'$), в 1.815 (точки $D \sim D'$), то есть деформация физического сплайна $\{A, B, C, D, E\} \rightarrow \{A', B', C', D', E'\}$ имеет в целом нелинейный характер.

2.2. Сплайн с защемленными концами. На рис. 3 представлены макеты физических сплайнов с защемленными концами. Исходный сплайн $ABCDE$ характеризуется касательными в опорных точках:

$$\operatorname{tg} \delta_A = 0.2, \operatorname{tg} \delta_B = 5.16, \operatorname{tg} \delta_C = 0.83, \operatorname{tg} \delta_D = -4.36, \operatorname{tg} \delta_E = -0.3. \tag{2}$$

Аффинно-сжатый сплайн $A'B'C'D'E'$ с коэффициентом сжатия 0.5:

$$\operatorname{tg} \delta_A = 0.1, \operatorname{tg} \delta_B = 1.528, \operatorname{tg} \delta_C = 0.721, \operatorname{tg} \delta_D = -1.481, \operatorname{tg} \delta_E = -0.15. \tag{2'}$$

Как и для сплайна со свободными концами, в случае защемленных концов наблюдается нелинейная деформация упругой линии физического сплайна.

3. Полиномиальная модель физического сплайна

Будем искать уравнения сегментов AB, BC, CD, DE в виде кубических полиномов:

$$\begin{aligned} S_{AB}(x) &= a_1 + b_1(x - x_A) + c_1(x - x_A)^2 + d_1(x - x_A)^3, \quad x \in [x_A, x_B]; \\ S_{BC}(x) &= a_2 + b_2(x - x_B) + c_2(x - x_B)^2 + d_2(x - x_B)^3, \quad x \in [x_B, x_C]; \\ S_{CD}(x) &= a_3 + b_3(x - x_C) + c_3(x - x_C)^2 + d_3(x - x_C)^3, \quad x \in [x_C, x_D]; \\ S_{DE}(x) &= a_4 + b_4(x - x_D) + c_4(x - x_D)^2 + d_4(x - x_D)^3, \quad x \in [x_D, x_E]. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $x_A = 1.2; x_B = 2.1; x_C = 2.8; x_D = 5; x_E = 5.5$.

Составная кривая (3) – кубический полиномиальный сплайн. В отличие от реального (физического) сплайна его называют «математическим сплайном» [13, 14]. Как и физический сплайн, сплайн (3) проходит через заданные точки A, B, C, D, E , удовлетворяет заданным граничным условиям и имеет второй порядок гладкости (непрерывно изменяющуюся кривизну). Тем не менее, как будет показано ниже, форма физического и математического сплайнов может существенно различаться.

Уравнения (3) содержат 16 неизвестных коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i ($i = 1, \dots, 4$), которые определяются из трех групп условий: 1) условия *инцидентности* сегментов точкам A, B, C, D, E ; 2) условия *отсутствия изломов* (равенство первых производных на стыках сегментов), 3) условия *непрерывного изменения кривизны* (равенство вторых производных в стыковых точках).

Заметим, что из (3) непосредственно следует:

$$a_1 = y_A = 0.9, a_2 = y_B = 2.3, a_3 = y_C = 4, a_4 = y_D = 3.2. \tag{4}$$

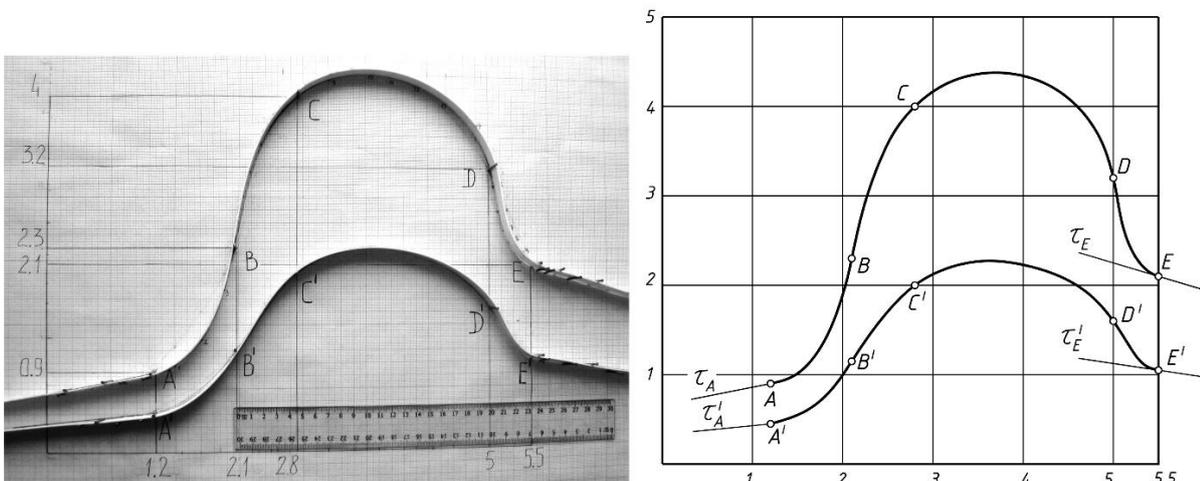


Рис. 3. Исходная и аффинно-сжатая упругие линейки с защемленными концами (фото и чертеж)

Инженерная геометрия и компьютерная графика

Таким образом, в системе уравнений (3) содержится не 16, а всего 12 подлежащих определению коэффициентов.

Согласно (3) и (4), условия инцидентности имеют вид:

$$\begin{aligned}y_B &= y_A + b_1 h_1 + c_1 h_1^2 + d_1 h_1^3, \\y_C &= y_B + b_2 h_2 + c_2 h_2^2 + d_2 h_2^3, \\y_D &= y_C + b_3 h_3 + c_3 h_3^2 + d_3 h_3^3, \\y_E &= y_D + b_4 h_4 + c_4 h_4^2 + d_4 h_4^3,\end{aligned}\tag{5}$$

где $h_1 = x_B - x_A$, $h_2 = x_C - x_B$, $h_3 = x_D - x_C$, $h_4 = x_E - x_D$.

Условие отсутствия изломов сводится к равенству первых производных на стыках сегментов сплайна. В конечной точке сегмента $AB \{x_A, x_B\}$ имеем $S'_{AB}(x_B) = b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2$. В начальной точке соседнего сегмента $BC \{x_B, x_C\}$ имеем $S'_{BC}(x_B) = b_2$. Приравнявая эти производные, получаем в стыковой точке B : $b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2 = b_2$. Аналогичным образом, приравнявая первые производные в стыковых точках C и D , получаем условия отсутствия изломов:

$$\begin{aligned}b_1 + 2c_1 h_1 + 3d_1 h_1^2 &= b_2, \\b_2 + 2c_2 h_2 + 3d_2 h_2^2 &= b_3, \\b_3 + 2c_3 h_3 + 3d_3 h_3^2 &= b_4.\end{aligned}\tag{6}$$

Условие непрерывного изменения кривизны сводится к равенству вторых производных в стыковых точках. Согласно (3), в конечной точке сегмента $AB \{x_A, x_B\}$ имеем $S''_{AB}(x_B) = 2c_1 + 6d_1 h_1$. В начальной точке соседнего сегмента $BC \{x_B, x_C\}$ имеем $S''_{BC}(x_B) = 2c_2$. Приравнявая эти производные, получаем условие непрерывного изменения кривизны в стыковой точке B : $c_1 + 3d_1 h_1 = c_2$. Аналогичным образом, приравнявая вторые производные в стыковых точках C и D , получаем условия непрерывного изменения кривизны:

$$\begin{aligned}c_1 + 3d_1 h_1 &= c_2, \\c_2 + 3d_2 h_2 &= c_3, \\c_3 + 3d_3 h_3 &= c_4.\end{aligned}\tag{7}$$

Десять уравнений (5)–(7) содержат двенадцать неизвестных коэффициентов b_i, c_i, d_i ($i=1, \dots, 4$). Два дополнительных условия, необходимые для однозначного определения коэффициентов уравнений (3), назначаются либо приравниванием нулю вторых производных в конечных точках A, E («свободные концы», см. рис. 2), либо указанием первых производных в точках A, E («защемленные концы», см. рис. 3).

3.1. Полиномиальная модель физического сплайна со свободными концами. Вторая производная $S''_{AB}(x) = 2c_1 + 6d_1(x - x_A)$ сегмента AB в точке A должна быть равна нулю. Отсюда следует, что $c_1 = 0$.

Вторая производная $S''_{DE}(x) = 2c_4 + 6d_4(x - x_D)$ сегмента DE в точке E также должна быть равна нулю. Отсюда следует, что

$$S''_{DE}(x_E) = c_4 + 3d_4 h_4 = 0.\tag{8}$$

Решая (с помощью системы компьютерной алгебры SMATH Studio Desktop) систему одиннадцати линейных уравнений (5)–(8) с учетом $c_1=0$, находим одиннадцать коэффициентов b_i, c_i, d_i . Получаем математический сплайн со свободными концами, проходящий через наперед заданные точки A, B, C, D, E (рис. 4, а):

$$\begin{aligned}S_{AB}(x) &= 0.9 + 1.2174(x - 1.2) + 0.4175(x - 1.2)^3, \quad x \in [1.2, 2.1]; \\S_{BC}(x) &= 2.3 + 2.2319(x - 2.1) + 1.1272(x - 2.1)^2 - 1.2089(x - 2.1)^3, \quad x \in [2.1, 2.8]; \\S_{CD}(x) &= 4 + 2.0329(x - 2.8) - 1.4114(x - 2.8)^2 + 0.1464(x - 2.8)^3, \quad x \in [2.8, 5]; \\S_{DE}(x) &= 3.2 - 2.0516(x - 5) - 0.4452(x - 5)^2 + 0.2968(x - 5)^3, \quad x \in [5, 5.5].\end{aligned}\tag{9}$$

Сравнивая физический (поз. 1) и математический (поз. 1') сплайны со свободными концами, замечаем существенное различие на интервалах BC и CD . Это различие уменьшается для аффинно-сжатых кривых (поз. 2 и поз. 2'), что подтверждает известное положение: математический сплайн, составленный из кубических полиномов, тем ближе к физическому сплайну, чем меньше прогибы физического сплайна.

Отметим принципиальное отличие математического и физического сплайнов: при аффинном сжатии $A, B, C, D, E \rightarrow A', B', C', D', E'$ математический сплайн (9) деформируется линейно, а физический – нелинейно.

3.2. Полиномиальная модель физического сплайна с защемленными концами. Согласно (2), тангенсы углов заделки равны: $\text{tg } \delta_A = 0.2$, $\text{tg } \delta_E = -0.3$. Граничные условия приобретают вид:

$$S'_{AB}(x_A) = \text{tg } \delta_A = 0.2 = b_1, \quad S'_{DE}(x_E) = \text{tg } \delta_E = -0.3 = b_4 + 2c_4 h_4 + 3d_4 h_4^2.\tag{10}$$

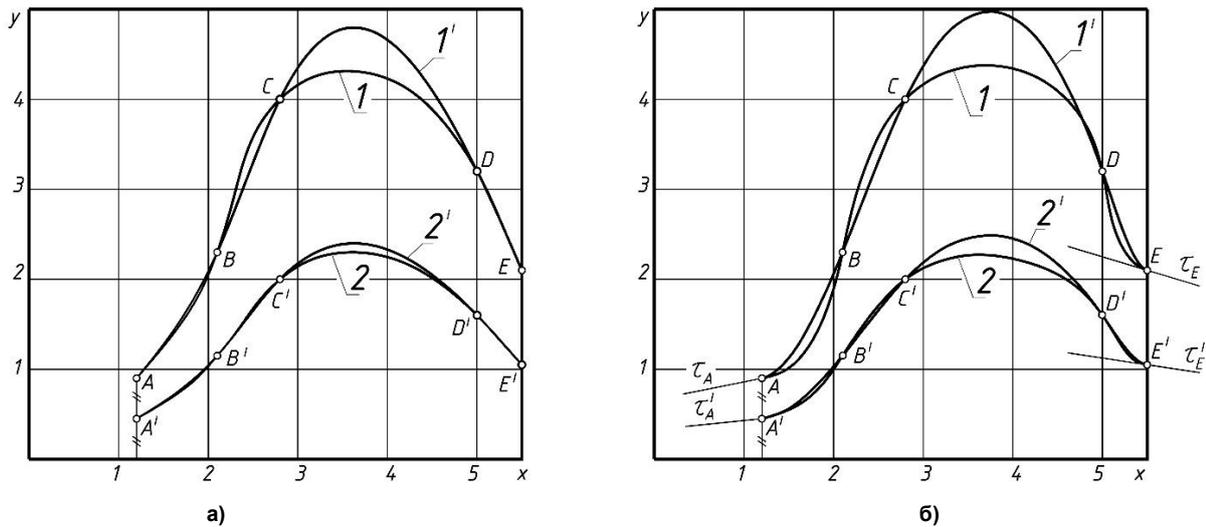


Рис. 4. Полиномиальная модель физического сплайна: а – свободные концы; б – заземленные концы (1, 2 – эксперимент, 1', 2' – расчет)

Решая систему линейных уравнений (5)–(7), (10), находим коэффициенты b_i, c_i, d_i . Получаем уравнения сегментов кубического сплайна с заземленными концами:

$$\begin{aligned}
 S_{AB}(x) &= 0.9 + 0.2(x - 1.2) + 2.0181(x - 1.2)^2 - 0.5688(x - 1.2)^3, \quad x \in [1.2, 2.1]; \\
 S_{BC}(x) &= 2.3 + 2.4504(x - 2.1) + 0.4824(x - 2.1)^2 - 0.7336(x - 2.1)^3, \quad x \in [2.1, 2.8]; \\
 S_{CD}(x) &= 4 + 2.0473(x - 2.8) - 1.0583(x - 2.8)^2 + 0.0171(x - 2.8)^3, \quad x \in [2.8, 5]; \\
 S_{DE}(x) &= 3.2 - 2.8572(x - 5) - 1.1710(x - 5)^2 + 4.971(x - 5)^3, \quad x \in [5, 5.5].
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Сплайн (11) проходит через заданные точки A, B, C, D, E и имеет производные $S'_{AB}(x_A) = 0.2, S'_{DE}(x_E) = -0.3$ в граничных точках A, E .

Результаты моделирования (рис. 4, б) показывают заметное различие физического (поз. 1, 2) и математического (поз. 1', 2') сплайнов, что ставит под сомнение возможность использования кубических полиномов для моделирования физических сплайнов с большими прогибами.

3.3. Замена системы координат

Согласно следствию из теоремы Шенберга, кубический полиномиальный сплайн вида (3), проходящий через заданные точки и удовлетворяющий заданным граничным условиям, существует и единственен [11].

Отметим, что это утверждение справедливо лишь при зафиксированной декартовой системе координат x, y . При плоскопараллельном перемещении осей x, y форма сплайна (3) сохраняется. Но при повороте координатных осей на произвольный угол форма кубического сплайна (проходящего через те же самые точки и удовлетворяющего тем же самым граничным условиям) изменится, так как оси кубических парабол, из которых составлен сплайн, ориентируются параллельно новой оси y .

Каждому углу поворота отвечает сплайн вида (3). Следовательно, на плоскости существует ∞^1 (однопараметрическое множество) кубических полиномиальных сплайнов, проходящих через наперед заданные точки и удовлетворяющих наперед заданным граничным условиям [15].

Например, в системе координат x, y кубическая парабола вида $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ проходит через точки A, B и касается прямых τ_A, τ_B (кривая 1 на рис. 5, а). В повернутой на произвольный угол системе координат x', y' кубическая парабола $y' = a'x'^3 + b'x'^2 + c'x' + d'$ (кривая 2 на рис. 5, а) также проходит через точки A, B и касается прямых τ_A, τ_B , но прогиб (расстояние точки B от оси x) уменьшился, поэтому парабола 2 имеет меньшую среднюю кривизну, чем парабола 1.

Таким образом, на плоскости имеется ∞^1 кубических парабол, проходящих через заданные точки A, B и касающихся заданных в этих точках прямых.

Так же обстоит дело с кубическим полиномиальным сплайном: через данные опорные точки можно провести ∞^1 сплайнов вида (3), удовлетворяющих наперед заданным граничным условиям. Например, на рис. 5, б показаны два сплайна с заземленными концами (поз. 2 и поз. 3), проходящие через точки A, B, C, D, E . Сплайн 2 построен в исходной системе координат x, y , сплайн 3 – в повернутой системе x', y' . Оба сплайна проходят через заданные точки, удовлетворяют одним и тем же условиям заделки (касаются пря-

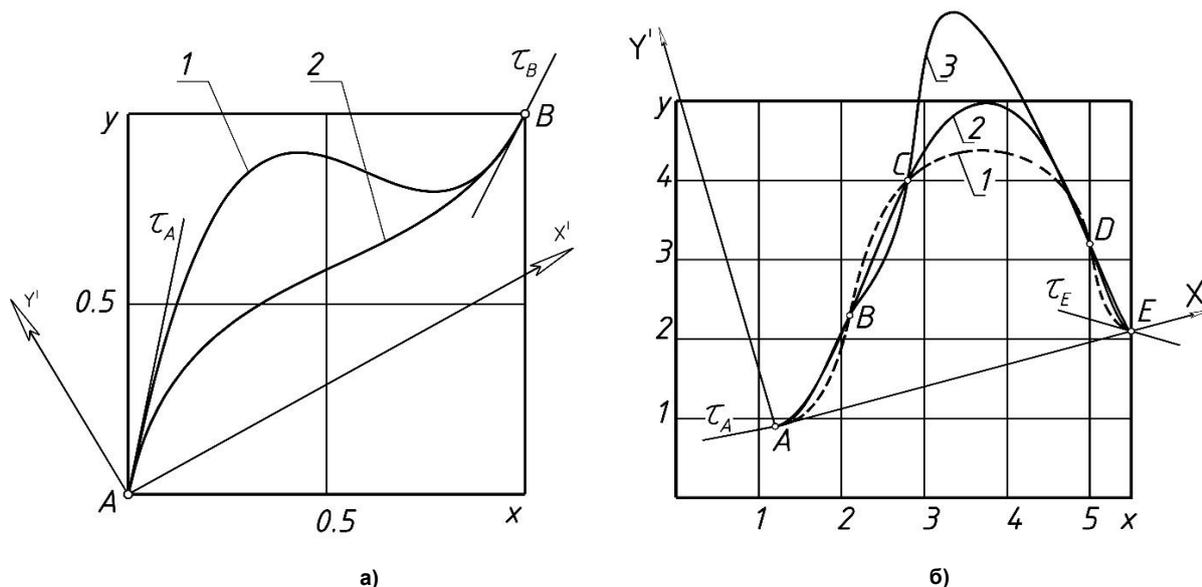


Рис. 5. Поворот системы координат: а – сегмент кубической кривой (1 – в системе $xу$, 2 – в системе $x'y'$); б – физический сплайн (1) и составная кубическая кривая (2 – в системе $xу$, 3 – в системе $x'y'$)

мых τ_A, τ_E в конечных точках A, E) и имеют второй порядок гладкости. Тем не менее ни один из этих сплайнов не может быть использован для моделирования реального физического сплайна 1 (см. рис. 5, б).

В целом следует сделать вывод, что кубический полиномиальный сплайн вида (3) не вполне пригоден для моделирования физического сплайна с большими прогибами. Форма полиномиального сплайна существенно зависит от выбора системы координат $xу$, что противоречит природе реального физического сплайна, форма которого в принципе не зависит от выбора системы координат, а определяется только взаимным положением опорных точек и условиями заделки концов упругого элемента.

4. Параметрическая модель

Преимущество параметрического подхода – независимость от выбора системы координат $xу$. Векторное уравнение сегмента параметрически заданной кубической кривой, проходящей через точки R_0, R_1 и касающейся в этих точках прямых τ_0, τ_1 , имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0)(1 - 3t^2 + 2t^3) + \mathbf{r}(1)(3t^2 - 2t^3) + \dot{\mathbf{r}}(0)t(1 - t)^2 + \dot{\mathbf{r}}(1)(-t^2 + t^3), \quad (12)$$

где параметр t изменяется в диапазоне $[0, 1]$. Векторы $\mathbf{r}(0), \mathbf{r}(1)$ указывают положение опорных точек R_0, R_1 , а направления векторных производных $\dot{\mathbf{r}}(0), \dot{\mathbf{r}}(1)$ при $t=0$ и $t=1$ совпадают с направлениями касательных τ_0, τ_1 в опорных точках.

Кубическая кривая (12), предложенная Фергюсоном в 60-х годах XX века [10], описывает *двухпараметрическое семейство* кубических кривых, инцидентных точкам R_0, R_1 и касающихся в этих точках прямых τ_0, τ_1 . Форма любой кривой этого семейства определяется величинами $|\dot{\mathbf{r}}(0)|, |\dot{\mathbf{r}}(1)|$. При увеличении $|\dot{\mathbf{r}}(0)|$ кривая $\mathbf{r}(t)$ теснее прилегает к касательной τ_0 , а при увеличении $|\dot{\mathbf{r}}(1)|$ теснее прилегает к τ_1 .

4.1. Условие гладкости в форме Фергюсона. Согласно выражению для расчета вектора кривизны

$$\mathbf{K}(t) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)}{|\dot{\mathbf{r}}(t)|^3} \quad (13)$$

условие гладкого соединения кубических сегментов (12) имеет вид

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}^{(1)}(1) \times \ddot{\mathbf{r}}^{(1)}(1)}{|\dot{\mathbf{r}}^{(1)}(1)|^3} = \frac{\dot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) \times \ddot{\mathbf{r}}^{(2)}(0)}{|\dot{\mathbf{r}}^{(2)}(0)|^3}, \quad (14)$$

где надстрочный символ в скобках означает номер сегмента. В (14) предполагается, что параметр t в уравнениях сегментов $\mathbf{r}^{(1)}(t), \mathbf{r}^{(2)}(t)$ изменяется в диапазоне $[0, 1]$ независимо от номера сегмента.

Учитывая, что в стыковой точке оба сегмента должны иметь общую касательную, представим первые производные, входящие в (14), в виде

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)}(1) = w^{(1)}\mathbf{T}, \quad \dot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) = w^{(2)}\mathbf{T}, \quad (15)$$

где \mathbf{T} – единичный вектор общей касательной, а коэффициенты $w^{(1)}, w^{(2)}$ – модули первых производных в точке стыка.

Подставляя (15) в (14), получаем условие гладкости:

$$\ddot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) = (w^{(2)} / w^{(1)})^2 \ddot{\mathbf{r}}^{(1)}(1). \tag{16}$$

Пусть требуется провести гладкую кривую через опорные точки R_0, R_1, R_2 , заданные радиус-векторами $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$. Будем искать решение в виде кривой, состоящей из сегментов кубических кривых вида (12). Записывая векторные производные в виде

$$\dot{\mathbf{r}}^{(1)}(0) = w_0 \mathbf{T}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}^{(1)}(1) = w_1^{(1)} \mathbf{T}_1, \quad \dot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) = w_1^{(2)} \mathbf{T}_1, \quad \dot{\mathbf{r}}^{(2)}(1) = w_2 \mathbf{T}_2 \tag{17}$$

и подставляя в (12), получаем уравнения сегментов $\mathbf{r}^{(1)}(t)$ и $\mathbf{r}^{(2)}(t)$:

$$\mathbf{r}^{(1)}(t) = \mathbf{r}_0(1 - 3t^2 + 2t^3) + \mathbf{r}_1(3t^2 - 2t^3) + w_0 \mathbf{T}_0 t(1-t)^2 + w_1^{(1)} \mathbf{T}_1(-t^2 + t^3), \quad t \in [0, 1], \tag{18}$$

$$\mathbf{r}^{(2)}(t) = \mathbf{r}_1(1 - 3t^2 + 2t^3) + \mathbf{r}_2(3t^2 - 2t^3) + w_1^{(2)} \mathbf{T}_1 t(1-t)^2 + w_2 \mathbf{T}_2(-t^2 + t^3), \quad t \in [0, 1]. \tag{19}$$

Здесь $\mathbf{T}_0, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2$ – единичные векторы касательных τ_0, τ_1, τ_2 , а коэффициенты w_i – модули первых производных. В общем случае $w_1^{(1)} \neq w_1^{(2)}$.

Дважды дифференцируя выражение (18) и подставляя $t = 1$, получаем значение второй производной сегмента R_0-R_1 в его конечной точке R_1 :

$$\ddot{\mathbf{r}}^{(1)}(1) = 6\mathbf{r}_0 - 6\mathbf{r}_1 + 2w_0 \mathbf{T}_0 + 4w_1^{(1)} \mathbf{T}_1.$$

Дважды дифференцируя выражение (19) и подставляя $t = 0$, находим вторую производную сегмента R_1-R_2 в его начальной точке R_1 :

$$\ddot{\mathbf{r}}^{(2)}(0) = -6\mathbf{r}_1 + 6\mathbf{r}_2 - 4w_1^{(2)} \mathbf{T}_1 - 2w_2 \mathbf{T}_2.$$

Подставляя $\ddot{\mathbf{r}}^{(1)}(1)$ и $\ddot{\mathbf{r}}^{(2)}(0)$ в (16), получаем условие гладкого соединения сегментов:

$$3\mathbf{r}_2 + 3\mathbf{r}_1(\lambda_1^2 - 1) - 3\mathbf{r}_0\lambda_1^2 = w_0 \mathbf{T}_0 \lambda_1^2 + 2w_1^{(2)}(1 + \lambda_1) \mathbf{T}_1 + w_2 \mathbf{T}_2, \tag{20}$$

где $\lambda_1 = w_1^{(2)} / w_1^{(1)}$.

4.2. Конструирование сплайна Фергюсона. Через указанные на плоскости точки A, B, C, D, E требуется провести сплайн Фергюсона – гладкую кривую, составленную из сегментов (12). В конечных точках A, E конструируемой кривой заданы касательные τ_A, τ_E . Сплайн имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{AB}(t) &= \mathbf{r}_A(1 - 3t^2 + 2t^3) + \mathbf{r}_B(3t^2 - 2t^3) + \dot{\mathbf{r}}_A t(1-t)^2 + \dot{\mathbf{r}}_B^{(1)}(-t^2 + t^3), \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{r}_{BC}(t) &= \mathbf{r}_B(1 - 3t^2 + 2t^3) + \mathbf{r}_C(3t^2 - 2t^3) + \dot{\mathbf{r}}_B^{(2)} t(1-t)^2 + \dot{\mathbf{r}}_C^{(2)}(-t^2 + t^3), \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{r}_{CD}(t) &= \mathbf{r}_C(1 - 3t^2 + 2t^3) + \mathbf{r}_D(3t^2 - 2t^3) + \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)} t(1-t)^2 + \dot{\mathbf{r}}_D^{(3)}(-t^2 + t^3), \quad t \in [0, 1], \\ \mathbf{r}_{DE}(t) &= \mathbf{r}_D(1 - 3t^2 + 2t^3) + \mathbf{r}_E(3t^2 - 2t^3) + \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)} t(1-t)^2 + \dot{\mathbf{r}}_E^{(4)}(-t^2 + t^3), \quad t \in [0, 1]. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь $\dot{\mathbf{r}}_A = w_A \mathbf{T}_A, \dot{\mathbf{r}}_E = w_E \mathbf{T}_E$ – векторные производные в граничных точках A, E . Надстрочный индекс в скобках означает номер сегмента. Направления единичных векторов $\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_E$ заданы касательными τ_A, τ_E . Модули w_A, w_E векторных производных определяют «степень прилегания» сплайна (21) к этим касательным. Остальные производные, входящие в (21), определяются выражениями:

$$\dot{\mathbf{r}}_B^{(1)} = w_B^{(1)} \mathbf{T}_B, \dot{\mathbf{r}}_B^{(2)} = w_B^{(2)} \mathbf{T}_B, \dot{\mathbf{r}}_C^{(2)} = w_C^{(2)} \mathbf{T}_C, \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)} = w_C^{(3)} \mathbf{T}_C, \dot{\mathbf{r}}_D^{(3)} = w_D^{(3)} \mathbf{T}_D, \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)} = w_D^{(4)} \mathbf{T}_D, \tag{22}$$

где $\mathbf{T}_B, \mathbf{T}_C, \mathbf{T}_D$ – единичные касательные векторы в точках B, C, D . Производные (22) определяются из условий гладкости. Согласно (20), условия гладкости имеют вид:

$$\begin{aligned} 3\mathbf{r}_C + 3\mathbf{r}_B(\lambda_B^2 - 1) - 3\mathbf{r}_A\lambda_B^2 &= w_A \mathbf{T}_A \lambda_B^2 + 2w_B^{(2)}(1 + \lambda_B) \mathbf{T}_B + \mathbf{T}_C w_C^{(3)} / \lambda_C, \\ 3\mathbf{r}_D + 3\mathbf{r}_C(\lambda_C^2 - 1) - 3\mathbf{r}_B\lambda_C^2 &= w_B^{(2)} \mathbf{T}_B \lambda_C^2 + 2w_C^{(3)}(1 + \lambda_C) \mathbf{T}_C + \mathbf{T}_D w_D^{(4)} / \lambda_D, \\ 3\mathbf{r}_E + 3\mathbf{r}_D(\lambda_D^2 - 1) - 3\mathbf{r}_C\lambda_D^2 &= w_C^{(3)} \mathbf{T}_C \lambda_D^2 + 2w_D^{(4)}(1 + \lambda_D) \mathbf{T}_D + w_E \mathbf{T}_E, \end{aligned} \tag{23}$$

или, с учетом (22):

$$\begin{aligned} 3\mathbf{r}_C + 3\mathbf{r}_B(\lambda_B^2 - 1) - 3\mathbf{r}_A\lambda_B^2 &= \dot{\mathbf{r}}_A \lambda_B^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_B^{(2)}(1 + \lambda_B) + \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)} / \lambda_C, \\ 3\mathbf{r}_D + 3\mathbf{r}_C(\lambda_C^2 - 1) - 3\mathbf{r}_B\lambda_C^2 &= \dot{\mathbf{r}}_B^{(2)} \lambda_C^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_C^{(3)}(1 + \lambda_C) + \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)} / \lambda_D, \\ 3\mathbf{r}_E + 3\mathbf{r}_D(\lambda_D^2 - 1) - 3\mathbf{r}_C\lambda_D^2 &= \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)} \lambda_D^2 + 2\dot{\mathbf{r}}_D^{(4)}(1 + \lambda_D) + \dot{\mathbf{r}}_E, \end{aligned} \tag{23'}$$

где $\lambda_B = w_B^{(2)} / w_B^{(1)}, \lambda_C = w_C^{(3)} / w_C^{(2)}, \lambda_D = w_D^{(4)} / w_D^{(3)}$ (отношения модулей первых производных в стыковых точках B, C, D).

Системы уравнений (23), (23') могут трактоваться двойственным образом. Если задать скалярные величины $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$, то система уравнений (23') становится *системой линейных уравнений* относительно трех неизвестных векторных величин $\dot{\mathbf{r}}_B^{(2)}, \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)}, \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)}$. Если же задать направления единичных касательных векторов $\mathbf{T}_B, \mathbf{T}_C, \mathbf{T}_D$ в стыковых точках B, C, D , то система (23) становится *системой нелинейных уравнений* относительно шести неизвестных скалярных величин $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D, w_B^{(2)}, w_C^{(3)}, w_D^{(4)}$.

Инженерная геометрия и компьютерная графика

4.2.1. Сплайн Фергюсона с заданными $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$. Будем полагать, что величины $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$ заданы.

Раскладывая (23') по осям x, y , получаем условия гладкости:

$$\begin{aligned} 2(1+\lambda_B)\dot{r}_{BX}^{(2)} + \dot{r}_{CX}^{(3)} / \lambda_C &= 3x_C + 3x_B(\lambda_B^2 - 1) - 3x_A\lambda_B^2 - \lambda_B^2 w_A \cos \delta_A, \\ 2(1+\lambda_B)\dot{r}_{BY}^{(2)} + \dot{r}_{CY}^{(3)} / \lambda_C &= 3y_C + 3y_B(\lambda_B^2 - 1) - 3y_A\lambda_B^2 - \lambda_B^2 w_A \sin \delta_A, \\ \lambda_C^2 \dot{r}_{BX}^{(2)} + 2(1+\lambda_C)\dot{r}_{CX}^{(3)} + \dot{r}_{DX}^{(4)} / \lambda_D &= 3x_D + 3x_C(\lambda_C^2 - 1) - 3x_B\lambda_C^2, \\ \lambda_C^2 \dot{r}_{BY}^{(2)} + 2(1+\lambda_C)\dot{r}_{CY}^{(3)} + \dot{r}_{DY}^{(4)} / \lambda_D &= 3y_D + 3y_C(\lambda_C^2 - 1) - 3y_B\lambda_C^2, \\ \lambda_D^2 \dot{r}_{CX}^{(3)} + 2(1+\lambda_D)\dot{r}_{DX}^{(4)} &= 3x_E + 3x_D(\lambda_D^2 - 1) - 3x_C\lambda_D^2 - w_E \cos \delta_E, \\ \lambda_D^2 \dot{r}_{CY}^{(3)} + 2(1+\lambda_D)\dot{r}_{DY}^{(4)} &= 3y_E + 3y_D(\lambda_D^2 - 1) - 3y_C\lambda_D^2 - w_E \sin \delta_E, \end{aligned} \quad (24)$$

где δ_A и δ_E – углы наклона касательных τ_A, τ_E к оси x .

Уравнения (24) позволяют найти векторные производные

$$\dot{\mathbf{r}}_B^{(2)} = \dot{r}_{BX}^{(2)} \mathbf{i} + \dot{r}_{BY}^{(2)} \mathbf{j}, \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)} = \dot{r}_{CX}^{(3)} \mathbf{i} + \dot{r}_{CY}^{(3)} \mathbf{j}, w_B^{(2)} \mathbf{T}_B, \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)} = \dot{r}_{DX}^{(4)} \mathbf{i} + \dot{r}_{DY}^{(4)} \mathbf{j},$$

входящие в коэффициенты уравнения искомого сплайна (21). Производные $\dot{\mathbf{r}}_B^{(1)}, \dot{\mathbf{r}}_C^{(2)}, \dot{\mathbf{r}}_D^{(3)}$, также входящие в (21), определяются из соотношений

$$\lambda_B = \dot{\mathbf{r}}_B^{(2)} / \dot{\mathbf{r}}_B^{(1)}, \lambda_C = \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)} / \dot{\mathbf{r}}_C^{(2)}, \lambda_D = \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)} / \dot{\mathbf{r}}_D^{(3)}. \quad (25)$$

В условиях гладкости (24) можно произвольным образом варьировать пятью управляющими параметрами: модулями первых производных w_A, w_E в граничных точках A, E и величинами $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$ (отношениями модулей первых производных в стыковых точках B, C, D). При изменении этих величин меняется форма сплайна (21).

Пример 1. Найти аппроксимирующую функцию для физического сплайна $ABCDE$ со свободными концами (см. рис. 2), варьируя величинами $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$.

Подставляя в (24) экспериментально полученные значения (1) $\text{tg} \delta_A = 1.134, \text{tg} \delta_E = -2.46$ и координаты опорных точек A, B, C, D, E , получаем систему шести уравнений, линейных относительно $\{\dot{r}_{BX}^{(2)}, \dot{r}_{BY}^{(2)}, \dot{r}_{CX}^{(3)}, \dot{r}_{CY}^{(3)}, \dot{r}_{DX}^{(4)}, \dot{r}_{DY}^{(4)}\}$. Положив $w_A = w_E = 1, \lambda_B = 1, \lambda_C = 2, \lambda_D = 0.5$ и решая систему уравнений (24), находим компоненты векторных производных:

$$\dot{r}_{BX}^{(2)} = 0.82, \dot{r}_{BY}^{(2)} = 1.87, \dot{r}_{CX}^{(3)} = 1.69, \dot{r}_{CY}^{(3)} = 2.14, \dot{r}_{DX}^{(4)} = 0.78, \dot{r}_{DY}^{(4)} = -1.17.$$

В соответствии с (25) находим компоненты еще трех производных: $\dot{r}_{BX}^{(1)} = \dot{r}_{BX}^{(2)} = 0.82, \dot{r}_{BY}^{(1)} = \dot{r}_{BY}^{(2)} = 1.87, \dot{r}_{CX}^{(2)} = \dot{r}_{CX}^{(3)} / \lambda_C = 0.845, \dot{r}_{CY}^{(2)} = \dot{r}_{CY}^{(3)} / \lambda_C = 1.07, \dot{r}_{DX}^{(3)} = \dot{r}_{DX}^{(4)} / \lambda_D = 1.56, \dot{r}_{DY}^{(3)} = \dot{r}_{DY}^{(4)} / \lambda_D = -2.34$.

Компоненты всех производных $\dot{\mathbf{r}}_B^{(1)}, \dot{\mathbf{r}}_B^{(2)}, \dot{\mathbf{r}}_C^{(2)}, \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)}, \dot{\mathbf{r}}_D^{(3)}, \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)}$, входящих в коэффициенты сплайна (21), определены. Раскладывая векторные уравнения (21) по осям x, y , получаем скалярные функции вида $x = x(t), y = y(t)$, позволяющие построить сплайн Фергюсона (рис. 6, а). Погрешность аппроксимации достигает 4 %.

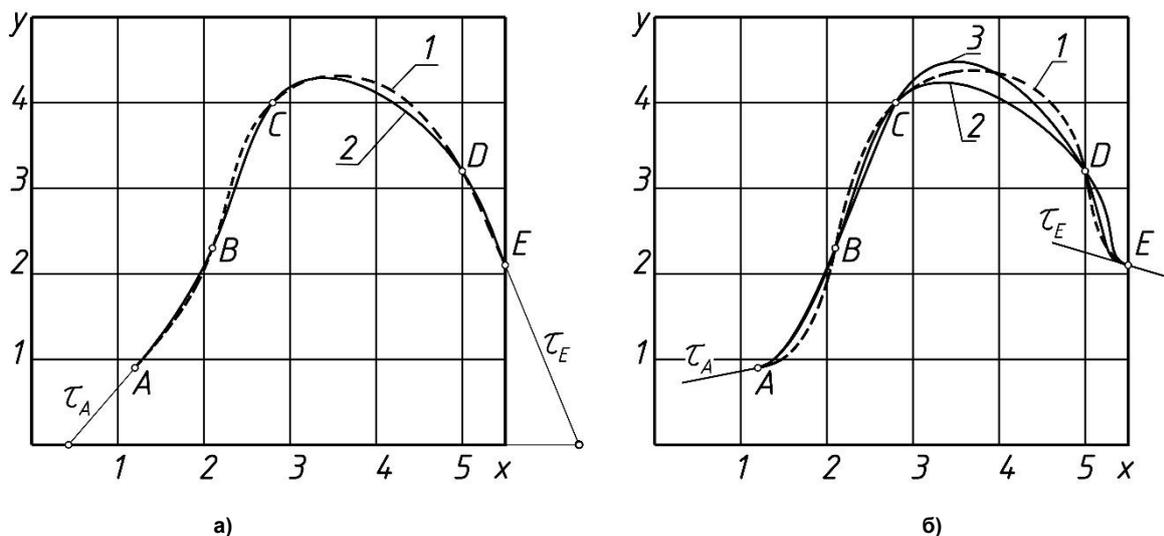


Рис. 6. Аппроксимация физического сплайна сплайном Фергюсона: а – свободные концы; б – заземленные концы (поз. 1 – эксперимент, поз. 2, 3 – расчет)

Пример 2. Найти аппроксимирующую функцию для физического сплайна $ABCDE$ с заземленными концами (см. рис. 3), варьируя величинами $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$.

Подставляя в (24) координаты опорных точек A, B, C, D, E и значения (2) $\text{tg } \delta_A = 0.2, \text{tg } \delta_E = -0.3$, получаем систему шести уравнений, линейных относительно $\{\dot{r}_{BX}^{(2)}, \dot{r}_{BY}^{(2)}, \dot{r}_{CX}^{(3)}, \dot{r}_{CY}^{(3)}, \dot{r}_{DX}^{(4)}, \dot{r}_{DY}^{(4)}\}$. Решая ее, находим (положив $w_A = w_E = 1, \lambda_B = \lambda_D = 1, \lambda_C = 2$):

$$\dot{r}_{BX}^{(2)} = 0.73, \dot{r}_{BY}^{(2)} = 2.03, \dot{r}_{CX}^{(3)} = 1.78, \dot{r}_{CY}^{(3)} = 1.95, \dot{r}_{DX}^{(4)} = 1.33, \dot{r}_{DY}^{(4)} = -1.84.$$

Согласно (25) находим компоненты еще трех векторных производных:

$$\begin{aligned} \dot{r}_{BX}^{(1)} = \dot{r}_{BX}^{(2)} = 0.73, \dot{r}_{BY}^{(1)} = \dot{r}_{BY}^{(2)} = 2.03, \dot{r}_{CX}^{(2)} = \dot{r}_{CX}^{(3)} / \lambda_C = 0.89, \dot{r}_{CY}^{(2)} = \dot{r}_{CY}^{(3)} / \lambda_C = 0.975, \\ \dot{r}_{DX}^{(3)} = \dot{r}_{DX}^{(4)} = 1.33, \dot{r}_{DY}^{(3)} = \dot{r}_{DY}^{(4)} = -1.84. \end{aligned}$$

Компоненты всех производных $\dot{\mathbf{r}}_B^{(1)}, \dot{\mathbf{r}}_B^{(2)}, \dot{\mathbf{r}}_C^{(2)}, \dot{\mathbf{r}}_C^{(3)}, \dot{\mathbf{r}}_D^{(3)}, \dot{\mathbf{r}}_D^{(4)}$, входящих в коэффициенты сплайна (21), определены. Раскладывая векторные уравнения (21) по осям x, y , получаем скалярные функции вида $x = x(t), y = y(t)$, позволяющие построить сплайн. На рис. 6, б представлен физический сплайн (поз. 1) и сплайны Фергюсона при $\lambda_C = 2$ (поз. 2) и $\lambda_C = 3$ (поз. 3). Погрешность аппроксимации более 10 %.

Управление формой сплайна с заданными $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$. В уравнениях сегментов сплайна (21) можно произвольным образом задавать модули w_A, w_E первых производных в крайних точках A, E , а также величины $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$. Следовательно, имеется 5 управляющих параметров, влияющих на форму сплайна. Задача подбора этих параметров для аппроксимации реальной упругой линии может быть решена лишь путем многочисленных «численных экспериментов». К тому же нет уверенности, что найденный таким образом вариант аппроксимирующего сплайна является наилучшим.

Таким образом, условия гладкости (23') с произвольно задаваемыми параметрами $\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D$ не могут быть рекомендованы для моделирования физического сплайна, несмотря на их вычислительное преимущество: применение условий (23') сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

4.2.2. Сплайн Фергюсона с заданными касательными. Рассмотрим алгоритмы построения сплайна (21), проходящего через заданные опорные точки и касающегося в этих точках заданных прямых.

Алгоритм, основанный на методе Ньютона. Введем обозначения

$$z_1 = w_B^{(1)}, z_2 = w_B^{(2)}, z_3 = w_C^{(2)}, z_4 = w_C^{(3)}, z_5 = w_D^{(3)}, z_6 = w_D^{(4)}. \quad (26)$$

Согласно (26), имеем

$$\lambda_B = z_2 / z_1, \lambda_C = z_4 / z_3, \lambda_D = z_6 / z_5. \quad (27)$$

Представим единичные касательные векторы в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_A = \mathbf{i} \cos \delta_A + \mathbf{j} \sin \delta_A, \mathbf{T}_B = \mathbf{i} \cos \delta_B + \mathbf{j} \sin \delta_B, \mathbf{T}_C = \mathbf{i} \cos \delta_C + \mathbf{j} \sin \delta_C, \\ \mathbf{T}_D = \mathbf{i} \cos \delta_D + \mathbf{j} \sin \delta_D, \mathbf{T}_E = \mathbf{i} \cos \delta_E + \mathbf{j} \sin \delta_E, \end{aligned} \quad (28)$$

где $\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D, \delta_E$ – заданные углы наклона касательных к оси x .

Подставляя (26)–(28) в условия гладкости (23) и раскладывая векторные уравнения (23) по осям x, y , получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $z_1 \dots z_6$:

$$\begin{aligned} 3h_2 z_1^2 + (3h_1 - w_A \cos \delta_A) z_2^2 - 2 \cos \delta_B (z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1) - z_1^2 z_3 \cos \delta_C = 0; \\ 3\Delta y_2 z_1^2 + (3\Delta y_1 - w_A \sin \delta_A) z_2^2 - 2 \sin \delta_B (z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1) - z_1^2 z_3 \sin \delta_C = 0; \\ 3h_3 z_3^2 + 3h_2 z_4^2 - z_4^2 z_2 \cos \delta_B - 2 \cos \delta_C (z_4 z_3^2 + z_4^2 z_3) - z_5 z_3^2 \cos \delta_D = 0; \\ 3\Delta y_3 z_3^2 + 3\Delta y_2 z_4^2 - z_4^2 z_2 \sin \delta_B - 2 \sin \delta_C (z_4 z_3^2 + z_4^2 z_3) - z_5 z_3^2 \sin \delta_D = 0; \\ 3h_4 z_5^2 + 3h_3 z_6^2 - z_4 z_6^2 \cos \delta_C - 2 \cos \delta_D (z_6 z_5^2 + z_6^2 z_5) - z_5^2 w_E \cos \delta_E = 0; \\ 3\Delta y_4 z_5^2 + 3\Delta y_3 z_6^2 - z_4 z_6^2 \sin \delta_C - 2 \sin \delta_D (z_6 z_5^2 + z_6^2 z_5) - z_5^2 w_E \sin \delta_E = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} h_1 = x_B - x_A = 0.9; h_2 = x_C - x_B = 0.7; h_3 = x_D - x_C = 2.2; h_4 = x_E - x_D = 0.5; \\ \Delta y_1 = y_B - y_A = 1.4; \Delta y_2 = y_C - y_B = 1.7; \Delta y_3 = y_D - y_C = -0.8; \Delta y_4 = y_E - y_D = -1.1. \end{aligned}$$

Задавая углы δ_A, δ_E наклона касательных и модули w_A, w_E векторных производных $\dot{\mathbf{r}}_A = w_A \mathbf{T}_A, \dot{\mathbf{r}}_E = w_E \mathbf{T}_E$ в концевых точках A, E и решая (методом Ньютона) нелинейную систему уравнений (29), находим модули $z_1 \dots z_6$ производных в стыковых точках B, C, D , что позволяет полностью определить коэффициенты сплайна (21).

Алгоритм подстановки. Зафиксируем первый сегмент AB сплайна (21), произвольно задав модули первых производных w_A и $w_B^{(1)}$ в точках A, B . Варьируя величинами w_A и $w_B^{(1)}$, добиваемся удовлетворительного совпадения расчетного сегмента AB с соответствующим сегментом физического сплайна. Подставляем найденные величины w_A и $w_B^{(1)} = z_1$ в первую пару уравнений системы (29):

$$\begin{aligned} 3h_2 z_1^2 + (3h_1 - w_A \cos \delta_A) z_2^2 - 2 \cos \delta_B (z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1) - z_1^2 z_3 \cos \delta_C &= 0, \\ 3\Delta y_2 z_1^2 + (3\Delta y_1 - w_A \sin \delta_A) z_2^2 - 2 \sin \delta_B (z_1^2 z_2 + z_2^2 z_1) - z_1^2 z_3 \sin \delta_C &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Решая (30), находим неизвестные $z_2 = w_B^{(2)}$, $z_3 = w_C^{(2)}$ и подставляем их во вторую пару уравнений системы (29):

$$\begin{aligned} 3h_3 z_3^2 + 3h_2 z_4^2 - z_4^2 z_2 \cos \delta_B - 2 \cos \delta_C (z_4 z_3^2 + z_4^2 z_3) - z_5 z_3^2 \cos \delta_D &= 0, \\ 3\Delta y_3 z_3^2 + 3\Delta y_2 z_4^2 - z_4^2 z_2 \sin \delta_B - 2 \sin \delta_C (z_4 z_3^2 + z_4^2 z_3) - z_5 z_3^2 \sin \delta_D &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Решая (31), находим неизвестные $z_4 = w_C^{(3)}$, $z_5 = w_D^{(3)}$ и подставляем их в третью пару уравнений системы (29):

$$\begin{aligned} 3h_4 z_5^2 + 3h_3 z_6^2 - z_4 z_6^2 \cos \delta_C - 2 \cos \delta_D (z_6 z_5^2 + z_6^2 z_5) - z_5^2 w_E \cos \delta_E &= 0, \\ 3\Delta y_4 z_5^2 + 3\Delta y_3 z_6^2 - z_4 z_6^2 \sin \delta_C - 2 \sin \delta_D (z_6 z_5^2 + z_6^2 z_5) - z_5^2 w_E \sin \delta_E &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Решая (32), находим неизвестные z_6, w_E . В результате все величины, входящие в коэффициенты сплайна (21), определены.

Примечание. Алгоритм подстановки позволяет заменить решение системы шести нелинейных уравнений (29) последовательным решением трех пар нелинейных уравнений (30)–(32).

Управление формой сплайна Фергюсона с заданными касательными. Раскладывая векторные уравнения (21) по осям x, y , получаем скалярные параметрические уравнения сегментов сплайна Фергюсона:

$$\begin{aligned} x_{AB}(t) &= x_A(1-3t^2+2t^3) + x_B(3t^2-2t^3) + w_A \cos \delta_A t(1-t)^2 + w_B^{(1)} \cos \delta_B (-t^2+t^3), \\ y_{AB}(t) &= y_A(1-3t^2+2t^3) + y_B(3t^2-2t^3) + w_A \sin \delta_A t(1-t)^2 + w_B^{(1)} \sin \delta_B (-t^2+t^3), \\ x_{BC}(t) &= x_B(1-3t^2+2t^3) + x_C(3t^2-2t^3) + w_B^{(2)} \cos \delta_B t(1-t)^2 + w_C^{(2)} \cos \delta_C (-t^2+t^3), \\ y_{BC}(t) &= y_B(1-3t^2+2t^3) + y_C(3t^2-2t^3) + w_B^{(2)} \sin \delta_B t(1-t)^2 + w_C^{(2)} \sin \delta_C (-t^2+t^3), \\ x_{CD}(t) &= x_C(1-3t^2+2t^3) + x_D(3t^2-2t^3) + w_C^{(3)} \cos \delta_C t(1-t)^2 + w_D^{(3)} \cos \delta_D (-t^2+t^3), \\ y_{CD}(t) &= y_C(1-3t^2+2t^3) + y_D(3t^2-2t^3) + w_C^{(3)} \sin \delta_C t(1-t)^2 + w_D^{(3)} \sin \delta_D (-t^2+t^3), \\ x_{DE}(t) &= x_D(1-3t^2+2t^3) + x_E(3t^2-2t^3) + w_D^{(4)} \cos \delta_D t(1-t)^2 + w_E \cos \delta_E (-t^2+t^3), \\ y_{DE}(t) &= y_D(1-3t^2+2t^3) + y_E(3t^2-2t^3) + w_D^{(4)} \sin \delta_D t(1-t)^2 + w_E \sin \delta_E (-t^2+t^3). \end{aligned} \quad (33)$$

Входящие в (33) модули векторных производных определяются из условий гладкости (29). Если используется алгоритм, основанный на методе Ньютона, то в условиях гладкости (29) и в уравнениях сплайна (33) можно варьировать модулями w_A, w_E первых производных в крайних точках A, E . Если используется алгоритм подстановки, то можно произвольно задавать модули w_A и $w_B^{(1)}$ первых производных в граничных точках A, B первого сегмента. Таким образом, на плоскости имеется двухпараметрическое множество сплайнов Фергюсона, проходящих через наперед заданные точки с указанными в этих точках касательными.

Пример 3. Моделирование физического сплайна $ABCDE$ со свободными концами (см. рис. 2).

Используя экспериментальные значения (1) углов наклона касательных в опорных точках

$$\operatorname{tg} \delta_A = 1.134, \operatorname{tg} \delta_B = 2.840, \operatorname{tg} \delta_C = 0.985, \operatorname{tg} \delta_D = -1.815, \operatorname{tg} \delta_E = -2.460,$$

вычисляем синусы и косинусы углов наклона касательных $\delta_A, \delta_B, \delta_C, \delta_D, \delta_E$ и подставляем их в условия гладкости (29). Положив варьируемые параметры $w_A = w_E = 1$, решаем систему уравнений (29) методом Ньютона:

$$\begin{aligned} z_1 = w_B^{(1)} &= 2.175, z_2 = w_B^{(2)} = 1.784, z_3 = w_C^{(2)} = 1.845, z_4 = w_C^{(3)} = 2.0335, \\ z_5 = w_D^{(3)} &= 4.850, z_6 = w_D^{(4)} = 1.1935. \end{aligned} \quad (34)$$

Подставляя (34) в (33), получаем скалярные уравнения сегментов сплайна Фергюсона. Построенный согласно (33) математический сплайн отличается от физического сплайна на 0,4 % (рис. 7, а).

Пример 4. Моделирование физического сплайна $ABCDE$ с защемленными концами (см. рис. 3).

Используем экспериментальные значения (2) углов наклона касательных в опорных точках:

$$\operatorname{tg} \delta_A = 0.2, \operatorname{tg} \delta_B = 5.16, \operatorname{tg} \delta_C = 0.83, \operatorname{tg} \delta_D = -4.36, \operatorname{tg} \delta_E = -0.3.$$

Варьируя модулями w_A и $w_B^{(1)}$ производных $\dot{\mathbf{r}}_A, \dot{\mathbf{r}}_B^{(1)}$ в граничных точках A, B первого сегмента, добиваемся совпадения формы расчетного сегмента AB

$$\mathbf{r}_{AB}(t) = \mathbf{r}_A(1-3t^2+2t^3) + \mathbf{r}_B(3t^2-2t^3) + w_A \mathbf{T}_A t(1-t)^2 + w_B^{(1)} \mathbf{T}_B (-t^2+t^3), t \in [0, 1]$$

с сегментом AB физического сплайна. В рассматриваемом примере требуемое совпадение достигнуто при $w_A = w_B^{(1)} = 2$.

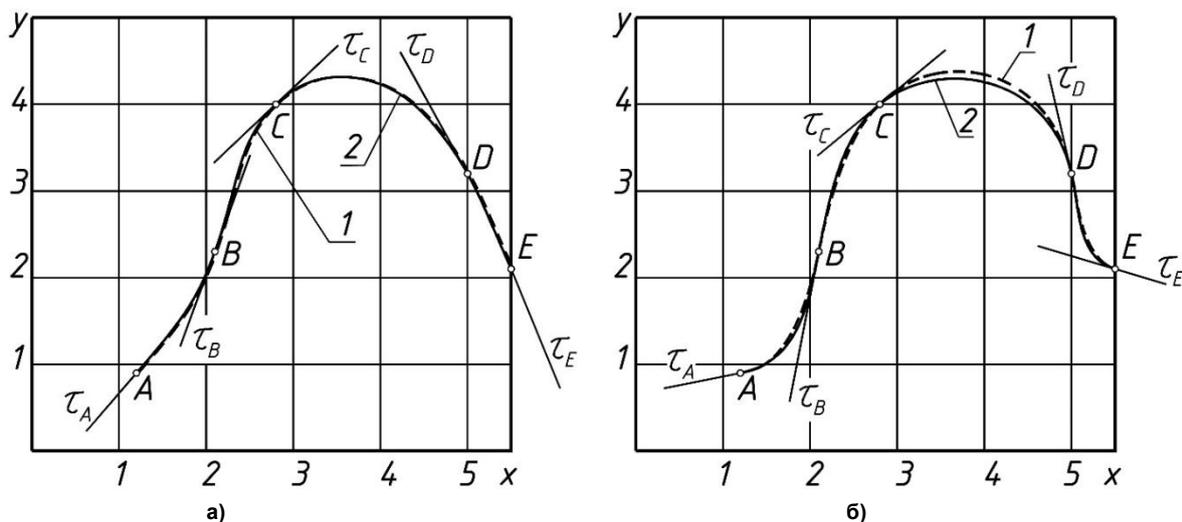


Рис. 7. Физический сплайн (поз. 1) и сплайн Фергюсона (поз. 2):
а – свободные концы; б – заземленные концы

Используя алгоритм подстановки, последовательно решаем системы уравнений (30)–(32) и находим модули векторных производных в точках B, C, D, E :

$$\begin{aligned} z_2 = w_B^{(2)} = 1.978, \quad z_3 = w_C^{(2)} = 1.723, \quad z_4 = w_C^{(3)} = 2.493, \\ z_5 = w_D^{(3)} = 3.672, \quad z_6 = w_D^{(4)} = 1.292, \quad w_E = 1.356. \end{aligned} \quad (35)$$

Подставляя (35) в (33), получаем скалярные уравнения, позволяющие построить сплайн (рис. 7, б). Погрешность аппроксимации менее 1,5%.

Заключение

В работе рассмотрена задача геометрического моделирования природоподобных кривых (физических сплайнов). Показано, что полиномиальные кубические сплайны не могут обеспечить удовлетворительной аппроксимации физических сплайнов с большими прогибами. Форма кубического полинома существенно зависит от выбора системы координат xu , что противоречит природе реального физического сплайна, форма которого в принципе не зависит от выбора системы координат, а определяется только взаимным положением опорных точек и условиями заделки концов упругого элемента.

Для решения задачи предлагается параметрическая модель на основе кубического сплайна Фергюсона. Формой сплайна можно управлять посредством указания касательных в его базисных точках и изменением модулей первых производных в конечных точках конструируемого сплайна. На конкретных примерах показано, что ошибка моделирования упругой линии физического сплайна со свободными концами не превышает 0,4 %, а погрешность моделирования упругой линии с заземленными концами составляет около 1,5 %.

Литература

1. Голованов, Н.Н. Геометрическое моделирование / Н.Н. Голованов. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2012. – 472 с.
2. Иванов, Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1998. – 157 с.
3. Glaeser, G. Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik / G. Glaeser. – Springer Spektrum, 2014. – 508 pp. DOI 10.1007/978-3-642-41852-5
4. Завьялов, Ю.С. Сплайны в инженерной геометрии / Ю.С. Завьялов, В.А. Леус, В.А. Скороспелов. – М.: Машиностроение, 1985. – 224 с.
5. Попов, Е.П. Нелинейные задачи статики тонких стержней / Е.П. Попов. – М.: ГИТТЛ, 1948. – 172 с.
6. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
7. Конопацкий Е.В. Вычислительные алгоритмы моделирования одномерных обводов через k наперед заданных точек / Е.В. Конопацкий, А.А. Крысько, А.И. Бумага // Геометрия и графика. – 2018. – Т. 6, № 3. – С. 20–32. DOI: 10.12737/article_5bc457ece18491.72807735

8. Любчинов, Е.В. О гладкости стыковки линий и поверхностей при циклографическом моделировании поверхностных форм автомобильных дорог / Е.В. Любчинов, К.Л. Панчук // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2020. – Т. 20, № 1. – С. 52–62. DOI: 10.14529/build200106

9. Понтрягин, Л.С. Кубическая парабола / Л.С. Понтрягин // Научно-популярный физико-математический журнал «Квант». – 1984. – № 3. – С. 10–14, 32.

10. Уокер, Р. Алгебраические кривые / Р. Уокер. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 240 с.

11. Шикин, Е.В. Кривые и поверхности на экране компьютера / Е.В. Шикин, Л.И. Плисс. – Диалог-МИФИ, 1996. – 240 с.

12. Курс начертательной геометрии (с учетом принципов программированного обучения) / под ред. Н.Ф. Четверухина. – М.: Высшая школа, 1968. – 266 с.

13. Прасолов, В.В. Геометрия / В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во МЦНМО, 2013. – 336 с.

14. Савелов, А.А. Плоские кривые / А.А. Савелов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 296 с.

15. Короткий, В.А. Кубические кривые в инженерной геометрии / В.А. Короткий // Геометрия и графика. – 2020. Т. 8, № 3. – С. 3–24. DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-24

Короткий Виктор Анатольевич, доктор технических наук, профессор кафедры инженерной и компьютерной графики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), korotkiiva@susu.ru

Витовтов Игорь Георгиевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры естественно-научных дисциплин, Челябинский институт путей сообщения УрГУПС (Челябинск), vitovtovig@gmail.com

Поступила в редакцию 18 марта 2021 г.

DOI: 10.14529/build210308

GEOMETRIC MODEL OF A PHYSICAL SPLINE

V.A. Korotkiy¹, korotkiiva@susu.ru

I.G. Vitovtov², vitovtovig@gmail.com

¹ South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

² Chelyabinsk Institute of Railway Transport, Chelyabinsk, Russian Federation

A physical spline is an elastic bar, the cross-sectional dimensions of which are extremely small compared to the length and radius of curvature of its axis. An example of a physical spline is a thin metal ruler. Such a ruler, when going through given points, immediately acquires a “nature-like” shape, characterized by a minimum energy of internal stresses and a minimum average curvature. Finding the equation of an elastic line is a complex mathematical problem that does not have an elementary solution.

The article considers polynomial and parametric methods for geometric modeling of a physical spline going through predetermined points. The elastic line of the physical spline is obtained experimentally. It is shown that the polynomial model significantly differs from the experimentally obtained physical spline, which makes it difficult to use cubic polynomials for modeling an elastic line with big deflections. A parameterized model based on Ferguson curves gives high accuracy of approximation if tangents to the elastic line of the physical spline are specified at the base points.

The examples of the physical spline modeling with free and restrained ends are considered. In the case of a free spline, the error of the parametric model was 0.4 %, and in the case of a spline with pinched ends, the error was less than 1.5 %. Calculations were performed using the SMath Studio software tool.

Keywords: affine compression, cubic curve, Ferguson curve, polynomial model, parametric model, vector derivative, graphic differentiation.

References

1. Golovanov N.N. *Geometricheskoye modelirovaniye* [Geometric Modeling]. Moscow, Izd-vo fiziko-matematicheskoy literatury Publ., 2012. 472 p.

2. Ivanov G.S. *Teoreticheskiye osnovy nachertatel'noy geometrii* [Theoretical Foundations of Descriptive Geometry]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1998. 157 p.

3. Glaeser G. [Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik]. *Springer Spektrum*, 2014, pp. 508. DOI: 10.1007/978-3-642-41852-5

4. Zav`yalov Yu.S., Leus V.A., Skorospelov V.A. *Splayny v inzhenernoy geometrii* [Splines in engineering geometry]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1985. 224 p.

5. Popov E.P. *Nelineynyye zadachi statiki tonkikh sterzhney* [Nonlinear Problems of Statics of Thin Rods]. Moscow, GITTL Publ., 1948. 172 p.
6. Foks A., Pratt M. *Vychislitel'naya geometriya. Primeneniye v proyektirovanii i na proizvodstve* [Computing Geometry. Application in Design and on Production]. Moscow, Mir Publ., 1982. 304 p.
7. Konopatskiy E.V., Krys'ko A.A., Bumaga A.I. [Computational Algorithms for Modeling One-Dimensional Contours through k Predetermined Points]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2018, vol. 6, no. 3, pp. 20-32. (in Russ.) DOI: 10.12737/article_5bc457ece18491.72807735
8. Lyubchinov E.V., Panchuk K.L. [On the Smoothness of Joining Lines and Surfaces in Cyclographic Modeling of Surface Forms of Highways]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*, 2020, vol. 20, no. 1, pp. 52–62. DOI: 10.14529/build200106
9. Pontryagin L.S. [Cubic Parabola]. *Nauchno-populyarnyy fiziko-matematicheskij zhurnal "Kvant"* [Popular Scientific Physics and Mathematics Journal "Kvant"], 1984, no. 3, pp. 10–14, 32. (in Russ.)
10. Uoker R. *Algebraicheskiye krivyye* [Algebraic Curves]. Moscow, Librokom Publ., 2009. 240 p.
11. Shikin E.V., Pliss L.I. *Krivyye i poverkhnosti na ekrane komp'yutera* [Curves and Surfaces for Computer Screen]. Dialog-MIFI Publ., 1996. 240 p.
12. Chetverukhina N.F. (Ed.) *Kurs nachertatel'noy geometrii (s uchetom printsipov programmirovannogo obucheniya)* [Course of Descriptive Geometry (Taking into Account the Principles of Programmed Learning)]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1968. 266 p.
13. Prasolov V.V., Tikhomirov V.M. *Geometriya* [Geometry]. Moscow, Izd-vo MTsNMO Publ., 2013. 336 p.
14. Savelov A.A. *Ploskiye krivyye* [Flat Curves]. Moscow, Knizhnyy dom "Librokom" Publ., 2009. 296 p.
15. Korotkiy V.A. [Cubic Curves in Engineering Geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2020, vol. 8, no. 3, pp. 3–24. (in Russ.) DOI: 10.12737/2308-4898-2020-3-24

Received 18 March 2021

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Короткий, В.А. Геометрическая модель физического сплайна / В.А. Короткий, И.Г. Витовтов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2021. – Т. 21, № 3. – С. 57–69. DOI: 10.14529/build210308

FOR CITATION

Korotkiy V.A., Vitovtov I.G. Geometric Model of a Physical Spline. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2021, vol. 21, no. 3, pp. 57–69. (in Russ.). DOI: 10.14529/build210308
