

Инженерная геометрия и компьютерная графика. Цифровая поддержка жизненного цикла изделий Engineering geometry and computer graphics. Digital support for product lifecycle

Научная статья
УДК 514.122.3
DOI: 10.14529/build240108

АППРОКСИМАЦИЯ СОПРЯЖЕНИЯ КРИВЫХ БЕЗЬЕ С СОХРАНЕНИЕМ ПОРЯДКА ГЛАДКОСТИ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

С.Н. Ганчук¹, sngchukan@rosatom.ru
О.В. Кривошеев¹, OLvkrivosheev@rosatom.ru
С.В. Маврин¹, s.mavrin@yandex.ru
С.А. Рыжов², sergey.ryzhov2001@yandex.ru

¹ *Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики –
Российский федеральный ядерный центр, Саров, Россия*

² *Саровский физико-технический институт – филиал Национального
исследовательского ядерного университета «МИФИ», Саров, Россия*

Аннотация. Кривые Безье являются обязательной составляющей геометрического ядра современных систем автоматизированного проектирования (CAD – *Computer-Aided Design*). В статье предлагается математический подход, позволяющий выполнить аппроксимацию сопряжения (соединения) кривых Безье произвольной степени таким образом, чтобы в точке сопряжения выполнялись условия гладкости (непрерывности) до порядка, равного степени заданных Безье кривых. Данный подход позволяет представить сопряженные кривые одной кривой Безье со степенью, равной степеням заданных кривых. На сопряженные кривые и аппроксимирующую кривую могут быть наложены дополнительные ограничения в виде полного совпадения с одной из заданных кривых или прохождения аппроксимирующей кривой через заданную точку и равенства производных заданным значениям в этой точке. Для решения указанных задач вводятся две различные метрики разности между заданными кривыми и аппроксимирующей кривой, формулируются оптимизационные задачи с ограничениями в виде равенств, для решения которых применяется метод множителей Лагранжа, который сводится к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Для представления кривых Безье предлагается использовать базисные функции В-сплайнов, что позволяет пользоваться программными функциями входящих в геометрическое ядро современных CAD-систем. Это существенно упрощает получение производных всех степеней для кривых и без существенных изменений в последующем позволит распространить результаты на задачи сопряжения В-сплайнов. Приводятся примеры аппроксимаций с использованием различных метрик и с учетом ограничений.

Ключевые слова: кривая Безье, сопряжение, параметрическая непрерывность, геометрическое ядро, CAD-системы

Для цитирования. Аппроксимация сопряжения кривых Безье с сохранением порядка гладкости и дополнительными ограничениями / С.Н. Ганчук, О.В. Кривошеев, С.В. Маврин, С.А. Рыжов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». 2024. Т. 24, № 1. С. 59–69. DOI: 10.14529/build240108

APPROXIMATION OF CONJUGATION OF BEZIER CURVES WITH PRESERVATION OF SMOOTHNESS ORDER AND ADDITIONAL RESTRICTIONS

S.N. Ganchuk¹, sngchukan@rosatom.ru

O.V. Krivosheev¹, OLvkrivosheev@rosatom.ru

S.V. Mavrin¹, s.mavrin@yandex.ru

S.A. Ryzhov², sergey.ryzhov2001@yandex.ru

¹ All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Russian Federal Nuclear Center, Sarov, Russia

² Sarov Physics and Technology Institute of the National Research Nuclear University MEPhI, Sarov, Russia

Abstract. Bezier curves are a mandatory component of the geometric core of modern computer-aided design (CAD). The article proposes a mathematical approach that makes it possible to approximate the conjugation (connection) of Bezier curves of arbitrary degree, so that at the conjugation point the conditions of smoothness (continuity) are satisfied up to the order of an equal degree of the given Bezier curves. This approach helps to represent conjugate curves of a single Bezier curve with the degree equal to the degrees of the given curves. Additional restrictions can be imposed on the conjugate curves and the approximating curve in the form of a complete coincidence with one of the given curves, or the passage of the approximating curve through a given point and the equality of the derivatives to the given values at this point. To solve these problems, we introduced two difference metrics between the given curves and the approximating curve, and formulated optimization problems with constraints in the form of equalities. We applied the method of Lagrange multipliers which solves the corresponding system of linear algebraic equations. To represent Bezier curves, it is proposed to use the basic functions of B-splines, which allows you to use the software functions included in the geometric core of modern CAD systems. This greatly simplifies the derivation of all degree derivatives for curves and, without significant changes in the future, will make it possible to extend the results to conjugation problems of B-splines. The paper provides examples of approximations using various metrics and their limitations.

Keywords: Bezier curve, conjugation, parametric steadiness, geometric kernel, CAD-systems

For citation. Ganchuk S.N., Krivosheev O.V., Mavrin S.V., Ryzhov S.A. Approximation of conjugation of Bezier curves with preservation of smoothness order and additional restrictions. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2024;24(1):59–69. (in Russ.). DOI: 10.14529/build240108

Введение

В настоящее время конструирование и технологическая подготовка высокосложных изделий невозможна без использования систем автоматизированного проектирования (CAD). При повсеместном применении этих систем постоянно возникают задачи по развитию и совершенствованию «геометрического ядра» – набора программных компонент, отвечающих за математическое представление и преобразования геометрических объектов. Одним из таких преобразований является аппроксимация сопряжения двух заданных кривых Безье, то есть аппроксимация соседних кривых при заранее заданных ограничениях на аппроксимирующую кривую, при этом в общем случае кривые могут быть не смежными. Задачи аппроксимации гладкого сопряжения не смежных кривых являются типовыми при использовании CAD-систем для разработки технологий соединения элементов оболочки внешней поверхности летательных аппаратов, элементов наружной обшивки корпуса судов и т. д. В этих задачах кроме требования гладкости сопряжения, всегда присутствуют

заданные из технологических и функциональных требований ограничения на аппроксимирующую кривую.

Кривые Безье находят широкое применение в моделировании, например, в работе [1] приводится обширная библиография областей применения кривых Безье (18 ссылок) и предлагается алгоритм построения замкнутой кривой, проходящей через заданные точки, при этом кривая формируется из сегментов кривых Безье второго порядка. В обзоре [2] рассматриваются многочисленные применения кривых Безье в различных областях производства (траектории движения инструмента, конструирование сложных поверхностей, реинжиниринг, уменьшение объема данных при обмене информацией и т. п.). В [3] строится сплайн, состоящий из кубических кривых Безье, сглаживающий ломаную линию и обеспечивающий непрерывность первой и второй производных. В работах [4, 5] графоаналитическими методами строятся плоские и пространственные кубические кривые Безье, проходящие через заданные точки, в которых эти кривые стыкуются с учетом заданных заранее

направляющих векторов и радиусов кривизны. Столь широкое использование кривых Безье объясняется тем [6, 7], что по сравнению с B-сплайнами кривые Безье сохраняют все степени непрерывности во внутренней области определения параметрической переменной и у этих кривых отсутствует вопрос об определении точек смены поддиапазонов параметрической переменной (*interior knot values* в терминологии [6, 7], *breakpoints* в терминологии [8]).

Задачи аппроксимации сопряжения кусочно-полиномиальных функций возникают в дизайне [9] и при конструировании устройств со свободными поверхностями [10], при этом в современных CAD-системах методы сопряжения обеспечивают не более четвертого порядка гладкости [11]. Кроме этого, при использовании CAD-систем, постоянно происходит обмен графическими данными между CAD- и CAM- (*Computer-Aided Manufacturing*) системами [2], совместная обработка графических объектов и интеграция результатов в графические объекты более высокого уровня, что требует преобразования графической информации, к которому предъявляются требования высокой точности, минимальных потерь и уменьшения объема. Задачи, возникающие при преобразовании графических данных в форматы иных CAD-систем и при уменьшении объема графической информации, рассмотрены в работе [12], в которой указывается на необходимость использования процедуры аппроксимации, которые применяются к полиномиальным и/или кусочно-полиномиальным функциям и включают в себя следующие преобразования:

1) понижение степени: аппроксимацию заданной параметрической кривой степени n кривой степени m ($m < n$);

2) сопряжение: аппроксимацию отдельных полиномиальных сегментов, сегментом одной кривой.

Алгоритмам понижения степени кривых Безье посвящено достаточное количество работ [13–15], включая ставшую классической монографию [8]. Разработки алгоритмов сопряжения кривых Безье приводятся в довольно незначительном числе работ. Так, например, в обзорной работе [2] рассматриваются всего лишь 2 работы по сопряжению кривых Безье [16, 17]. В работе [16] предлагается алгоритм аппроксимации нескольких смежных Безье кривых с различными степенями одной кривой преобразованием параметров заданных кривых к несовместной системе линейных уравнений, которая решается методом псевдообращения Мура – Пенроуза. На аппроксимирующую кривую не накладываются какие-либо ограничения, а также в предлагаемом подходе отсутствует метрика отличия аппроксимирующей кривой от заданных кривых, что является обязательным условием применения метода в геометрическом ядре CAD-системы. В работе [17] предлагается подход к аппроксимации двух соседних (смежность не

требуется) Безье кривых с равными степенями одной Безье кривой той же степени, для чего предлагаются две различные метрики, которые минимизируются при наличии ограничений в виде равенств, используя метод множителей Лагранжа. На аппроксимирующую кривую накладываются простейшие ограничения в виде задания точек на заданных кривых, через которые должна проходить аппроксимирующая кривая. Настоящая работа базируется на постановке задачи из работы [17] и является дальнейшим развитием этой работы.

Целью настоящей работы является разработка математических методов сопряжения двух кривых Безье произвольных степеней с сохранением в точке сопряжения порядка гладкости (непрерывности), соответствующего степени заданных кривых, и последующая замена двух сопряженных кривых одной кривой Безье той же степени. При этом на сопряженные кривые и аппроксимирующую кривую могут быть наложены дополнительные ограничения в виде полного совпадения с одной из заданных кривых или прохождения аппроксимирующей кривой через заданные точки и равенства производных в этих точках заданным значениям.

В настоящей работе решаются следующие задачи. Формулируются условия полностью гладкого сопряжения двух кривых Безье произвольной степени с учетом дополнительных ограничений, вводятся две различные метрики разности заданных и сопряженных кривых Безье, выполняется аппроксимация сопряжения как минимизация одной из метрик методом множителей Лагранжа и описывается подход к переходу от двух сопряженных кривых Безье к одной кривой Безье той же степени. В отличие от [17], для решения всех представленных задач предлагается единый подход, основанный на представлении кривых Безье как линейной комбинации базисных функций B-сплайнов, что позволяет решить сформулированные задачи единым методом и воспользоваться для решения задач программными функциями, входящими в геометрическое ядро современных CAD-систем. Это существенно упрощает получение производных всех степеней для кривых и, без существенных изменений в последующем, позволит распространить результаты на задачи сопряжения B-сплайнов. Использование базисных функций B-сплайнов позволяет в предлагаемом подходе выразить равенство производных в точке слияния кривых не через конечные разности, как в [17], а через производные базисных функций, которые в геометрическом ядре современных CAD-систем рассчитываются «автоматически» при расчете базисных функций [8] B-сплайнов. Кроме этого, в отличие от [17], в настоящей работе предлагаются подходы, позволяющие учитывать дополнительные ограничения не только в виде заданной точки на исходной кривой, через которую должна пройти аппроксимирующая кривая,

но и такие ограничения, как равенство производных в этой точке производным заданной кривой и «запрет» на изменение одной из заданных кривых (то есть требование полного совпадения аппроксимирующей кривой с одной из заданных). В настоящей работе приводится математический подход к замене двух сопряженных кривых одной кривой того же порядка с сохранением порядка гладкости, что отличает данную работу от [17], в которой приводится вычислительный алгоритм без каких-либо пояснений. Предлагаемые алгоритмы позволяют гладко сопрягать с учетом ограничений как 2D, так и 3D кривые Безье.

Постановка задачи

Заданы две кривые Безье $P(u)$ и $Q(v)$ ¹ степени n , представление которых будем рассматривать как частный случай В-сплайнов:

$$P(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^n(u), \quad u \in [0,1], \quad (1)$$

$$Q(v) = \sum_{i=0}^n Q_i N_i^n(v), \quad v \in [0,1], \quad (2)$$

где u, v – параметрические переменные; N_i^n – i -я базисная функция В-сплайнов степени n ; $P_i, Q_i, i = \overline{0, n}$ – контрольные точки (многоугольники) кривых P и Q соответственно.

Так как кривые Безье рассматриваются как частный случай В-сплайнов, то узловые векторы кривых (1) и (2) задаются как $u, v = \underbrace{0, \dots, 0}_n, 0, 1, \underbrace{1, \dots, 1}_n$.

Если для расчета кривых Безье (1) и (2) используются алгоритмы и программные функции NURBS [8] (*Non-Uniform Rational B-Splines*), то веса $w_i, i = \overline{0, n}$ контрольных точек $P_i, Q_i, i = \overline{0, n}$ полагаются тождественно равными 1.

Необходимо выполнить сопряжение кривых $P(u)$ и $Q(v)$, то есть определить кривую Безье $R(t)$ степени n , которая минимизирует заданную метрику $d(R, \bar{R})$ между $R(t)$ и $\bar{R}(t)$, где

$$\bar{R}(t) = \begin{cases} P\left(\frac{t}{\lambda}\right) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^n\left(\frac{t}{\lambda}\right), & 0 \leq t \leq \lambda, \\ Q\left(\frac{t-\lambda}{1-\lambda}\right) = \sum_{i=0}^n Q_i N_i^n\left(\frac{t-\lambda}{1-\lambda}\right), & \lambda \leq t \leq 1, \end{cases}$$

где $\lambda \in (0,1)$ – параметр, выбираемый как середина интервала либо пропорционально длинам сторон контрольных многоугольников [6].

Минимизация метрики $d(R, \bar{R})$ выполняется на всем диапазоне изменения параметрической переменной $t \in [0,1]$.

Нахождение аппроксимирующей кривой $R(t)$ будем выполнять в два этапа.

Этап 1. Гладкое сопряжение кривых $P(u)$ и $Q(v)$, то есть расчет новых контрольных точек $\hat{P}_i, \hat{Q}_i, i = \overline{0, n}$, по которым строятся новые сопряженные кривые Безье $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$. При этом кривые $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ должны удовлетворять условиям полного гладкого сопряжения:

$$\hat{P}^{(r)}(u)|_{u=1} = \hat{Q}^{(r)}(v)|_{v=0}, \quad r = \overline{0, n}, \quad (3)$$

где r – порядок производной (нулевая производная ($r = 0$) соответствует значению функции).

Кривые Безье $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ определяются следующим образом:

$$\hat{P}(u) = \sum_{i=0}^n \hat{P}_i N_i^n(u) = \sum_{i=0}^n (P_i + \varepsilon_i) N_i^n(u), \quad u \in [0,1], \quad (4)$$

$$\hat{Q}(v) = \sum_{i=0}^n \hat{Q}_i N_i^n(v) = \sum_{i=0}^n (Q_i + \delta_i) N_i^n(v), \quad v \in [0,1], \quad (5)$$

где $\varepsilon_i, \delta_i, i = \overline{0, n}$ – приращения координат $P_i, Q_i, i = \overline{0, n}$ соответственно.

Этап 2. Замена без погрешности (абсолютно точно) кривых Безье $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ одной кривой Безье $R(t)$ степени n , для чего рассчитываются ее контрольные точки $R_i, i = \overline{0, n}$.

На кривые $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ (и соответственно на $R(t)$) могут быть наложены следующие дополнительные ограничения:

1) полного совпадения с одной из заданных кривых:

$$\hat{P}(u) = P(u), \quad u \in [0,1] \quad (6)$$

или

$$\hat{Q}(v) = Q(v), \quad v \in [0,1]; \quad (7)$$

2) сопряженные кривые $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ должны проходить через заданные точки исходных кривых с сохранением значений производных вплоть до некоторого порядка в этих точках:

$$\left(\hat{P}^{(r_1)}(u)\right)|_{u=u_{kp}} = \left(P^{(r_1)}(u)\right)|_{u=u_{kp}}, \quad kp = \overline{0, l}, \quad r_1 = \overline{0, rp}, \quad (8)$$

¹ Если степени кривых не совпадают, то для кривой меньшей степени необходимо выполнить процедуру увеличения степени [8], которая не приводит к искажению заданной кривой.

$$\left(\hat{Q}^{(r2)}(v)|_{v=v_{kq}}\right) = \left(P^{(r2)}(v)|_{v=v_{kq}}\right), \quad kq = \overline{0, m}, \quad r2 = \overline{0, r\overline{q}}, \quad (9)$$

где rp, rq – максимальный порядок производных (как и ранее, нулевая производная соответствует значению функции).

Очевидно, что максимальное значение порядка производных не должно превышать n . Как показано в [17], ограничения (8) и (9) должны удовлетворять условию:

$$[(l + 1) + (m + 1)] \leq (n + 1) \quad (10)$$

Метрику $d(R, \bar{R})$, как и в [17], запишем в двух формах:

1) дискретная коэффициентная норма:

$$O(\varepsilon_i, \delta_i) = \sum_{i=0}^n (\|\varepsilon_i\|^2 + \|\delta_i\|^2) \rightarrow \min; \quad (11)$$

2) интегральная квадратичная норма:

$$O(\varepsilon_i, \delta_i) = \int_0^1 (R(t) - \bar{R}(t))^2 dt = \int_0^1 \left[\left(\sum_{i=0}^n \varepsilon_i N_i^n(t)\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^n \delta_i N_i^n(t)\right)^2 \right] dt \rightarrow \min \quad (12)$$

Метрика (11) минимизирует отклонение контрольных точек \hat{P}_i и \hat{Q}_i от P_i и Q_i , $i = \overline{0, n}$. Метрика (12) минимизирует площадь между кривыми $\hat{P}(u)$, $\hat{Q}(v)$ и $P(u)$, $Q(v)$.

Таким образом, сформулирована задача полностью гладкого сопряжения, которая состоит в оптимизационной задаче (11) или (12), при наличии ограничений (3), где также дополнительно могут присутствовать ограничения (8) и (9).

Метод

Условия полностью гладкого сопряжения (3) с учетом представления кривых в развернутом виде (4), (5) представляют собой систему $(n + 1)$ равенств:

$$\sum_{i=0}^n (P_i + \varepsilon_i) N_i^{n(r)}(1) = \sum_{i=0}^n (Q_i + \delta_i) N_i^{n(r)}(0), \quad r = \overline{0, n}, \quad (13)$$

где $N_i^{n(r)}(1)$, $N_i^{n(r)}(0)$ – производные порядка r i -й базисной функции порядка n при значении параметрической производной 1 и 0 соответственно.

Использование в (13) производных базисных функций В-сплайнов, в отличие от конечных разностей в [17], позволяет отказаться от довольно сложной рекурсивной процедуры расчета этих конечных разностей, что позволяет существенно упростить построение коэффициентной матрицы системы линейных уравнений за счет единообразия расчетных выражений и воспользоваться существующими в современных геометрических ядрах САД-систем программными функциями и классами расчета базисных функций В-сплайнов и их производных.

Рассмотрим оптимизационную задачу (11) при ограничениях (13), для решения которой применяется метод неопределенных множителей Лагранжа [18]. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \sum_{i=0}^n (\|\varepsilon_i\|^2 + \|\delta_i\|^2) + \sum_{r=0}^n \lambda_r \left[\sum_{i=0}^n (P_i + \varepsilon_i) N_i^{n(r)}(1) - \sum_{i=0}^n (Q_i + \delta_i) N_i^{n(r)}(0) \right], \quad (14)$$

где λ_r , $r = \overline{0, n}$ – множители Лагранжа.

Находя частные производные функции (14) по переменным ε_i , δ_i , λ_r , $i, r = \overline{0, n}$ и приравнявая их нулю, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных переменным ε_i , δ_i , λ_r , $i, r = \overline{0, n}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \varepsilon_i} = 2\varepsilon_i + \sum_{r=0}^n \lambda_r N_i^{n(r)}(1) = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_i} = 2\delta_i - \sum_{r=0}^n \lambda_r N_i^{n(r)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_r} = \sum_{i=0}^n \left[(P_i + \varepsilon_i) N_i^{n(r)}(1) - (Q_i + \delta_i) N_i^{n(r)}(0) \right], \quad r = \overline{0, n}. \quad (17)$$

Выполнив в уравнении (17) перенос слагаемых, не содержащих искомого переменных, в правую часть, получаем:

$$\sum_{i=0}^n \left[\varepsilon_i N_i^{n(r)}(1) - \delta_i N_i^{n(r)}(0) \right] = - \sum_{i=0}^n \left[P_i N_i^{n(r)}(1) - Q_i N_i^{n(r)}(0) \right], \quad r = \overline{0, n}. \quad (18)$$

Таким образом, получили систему $3(n + 1)$ линейных уравнений (15), (16) и (18).

Следует указать, что в уравнениях (15), (16) и (18) производные r -го порядка базисных функций $(N_i^{n(r)}, r = \overline{0, n})$ обладают тем свойством, что только $(r + 1)$ базисных функций отличны от нуля [6, 8]. В нашей работе это свойство не используется, что позволяет упростить (сделать более единообразным) заполнение коэффициентной матрицы и вектора правых частей, тем самым упростив программную реализацию соответствующей функции геометрического ядра.

При использовании оптимизационной задачи (12) при ограничениях (13) система линейных уравнений выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=0}^n \varepsilon_j I_{ji} + \sum_{r=0}^n \lambda_r N_i^{n(r)}(1) = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad (19)$$

$$\sum_{j=0}^n \delta_j I_{ji} - \sum_{r=0}^n \lambda_r N_i^{n(r)}(0) = 0, \quad i = \overline{0, n}, \quad (20)$$

$$\sum_{i=0}^n [\varepsilon_i N_i^{n(r)}(1) - \delta_i N_i^{n(r)}(0)] = - \sum_{i=0}^n [P_i N_i^{n(r)}(1) - Q_i N_i^{n(r)}(0)], \quad r = \overline{0, n}, \quad (21)$$

где интеграл $I_{ji} = 2 \int_0^1 N_j(\tau) N_i(\tau) d\tau$ вычисляется численно.

Дополнительные ограничения

1. Ограничение в виде полного совпадения с одной из заданных кривых.

Рассмотрим ограничения (6) или (7), выполнение которых является тривиальным, для чего из оптимизационных задач исключаются соответствующие неизвестные ($\varepsilon_i, i = \overline{0, n}$ при ограничениях (6), либо $\delta_i, i = \overline{0, n}$ при ограничениях (7)) или, применяя другой способ, уравнения (15) и (19) записываются как $\varepsilon_i = 0, i = \overline{0, n}$ (при ограничениях (6)) и уравнения (16) и (20) записываются как $\delta_i = 0, i = \overline{0, n}$ (при ограничениях (7)).

2. Ограничение в виде «закрепления границ».

Часто встречаемое в реальных задачах сопряжения требование «закрепления границ» (неизменности начальной точки кривой $P(u)$ и конечной точки кривой $Q(v)$) реализуется записью первого и $2(n + 1)$ -го уравнений системы как $\varepsilon_0 = 0$ и $\delta_n = 0$ соответственно.

3. Ограничение в виде прохождения сопряженных кривых через заданные точки исходных кривых с сохранением производных.

Дополнительные ограничения (8) и (9) в развернутом виде выглядят следующим образом:

$$\sum_{i=0}^n (P_i + \varepsilon_i) N_i^{n(r1)}(u_{kp}) = \sum_{i=0}^n P_i N_i^{n(r1)}(u_{kp}), \quad kp = \overline{0, l}, \quad r1 = \overline{0, rp}, \quad (22)$$

$$\sum_{i=0}^n (Q_i + \delta_i) N_i^{n(r2)}(v_{kq}) = \sum_{i=0}^n Q_i N_i^{n(r2)}(v_{kq}), \quad kq = \overline{0, m}, \quad r2 = \overline{0, rq}. \quad (23)$$

Раскрыв в (22) и (23) суммы и, выполнив взаимное уничтожение, получаем:

$$\sum_{i=0}^n \varepsilon_i N_i^{n(r1)}(u_{kp}) = 0, \quad kp = \overline{0, l}, \quad r1 = \overline{0, rp}, \quad (24)$$

$$\sum_{i=0}^n \delta_i N_i^{n(r2)}(v_{kq}) = 0, \quad kq = \overline{0, m}, \quad r2 = \overline{0, rq}. \quad (25)$$

Добавив эти $[(l + 1) + (m + 1)]$ слагаемые с соответствующими дополнительными множителями Лагранжа в функцию (10) и выполнив по аналогии с (15)–(17) расчет частных производных, получаем систему $[3n + (l + 1) + (m + 1)]$ линейных уравнений. При использовании интегральной квадратичной нормы выкладки аналогичны.

Расчет кривой $R(t)$

Переход от двух гладко сопряженных кривых Безье $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ степени n к одной кривой Безье $R(t)$ той же степени выполняется без какой-либо погрешности с помощью расчета контрольных точек $R_i, i = \overline{0, n}$, по которым в последующем строится кривая $R(t)$. Рассматривая расчет кривой $R(t)$ как процедуру, обратную к процедуре разбиения кривой Безье [6, 7, 19], можно записать следующую систему уравнений:

для нечетного n :

$$\mu^{k0} R^{(k0)}(0) = \hat{P}^{(k0)}(0), \quad k0 = 0, \overline{\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad (26)$$

$$\mu^{k1} R^{(k1)}(\mu) = \hat{P}^{(k1)}(1), \quad k1 = 0, \overline{\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad (27)$$

где $\left[\frac{n}{2}\right]$ – целая часть числа $\frac{n}{2}$.

Для четного n система имеет тот же вид, что (26) и (27), за исключением диапазонов изменения индексов:

$$k0 = 0, \overline{\frac{n}{2}}$$

$$k1 = 0, \overline{\left(\frac{n}{2} - 1\right)}$$

Уравнения (26) и (27) описывают равенство как самих кривых R и \hat{P} , так и их производных в начальных точках этих кривых (уравнения (26)) и в точке окончания кривой \hat{P} (уравнения (27)). Значения параметра μ определяет интервал репараметризации [20], и в последующих примерах его значение было задано как 0,5.

Результаты и обсуждения

Рассмотрим результаты применения представленных выше математических подходов на конкретной задаче аппроксимации сопряжения кривых Безье сохранением порядка гладкости и дополнительными ограничениями.

На рис. 1 представлены две заданные кривые Безье третьей степени, для которых будут выполнены различные виды полностью гладких сопряжений при различных дополнительных ограничениях.

На рис. 2 приведены результаты полностью гладкого сопряжения кривых, представленных на рис. 1, с использованием дискретной коэффициентной нормы (11) без дополнительных ограничений.

На рис. 3 представлен переход от двух гладко сопряженных кривых Безье $\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$ (см. рис. 2) к одной кривой Безье $R(t)$.

На рис. 4 представлено решение той же задачи (полностью гладкое сопряжение кривых, при-

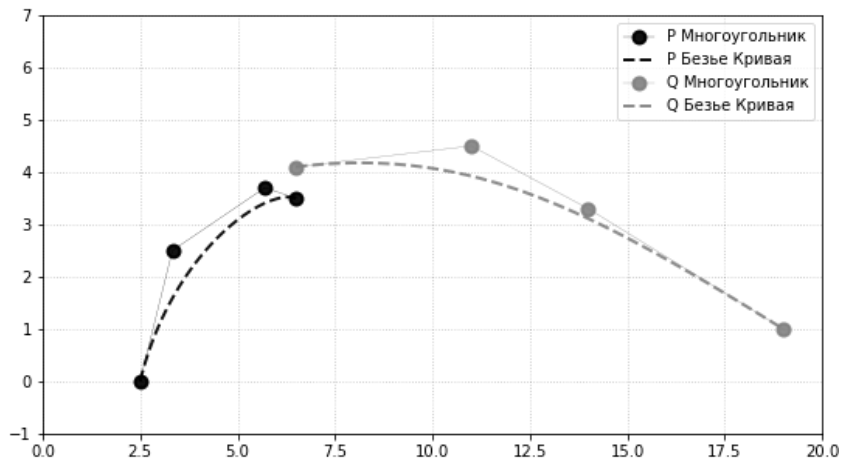


Рис. 1. Заданные кривые Безье $P(u)$ и $Q(v)$

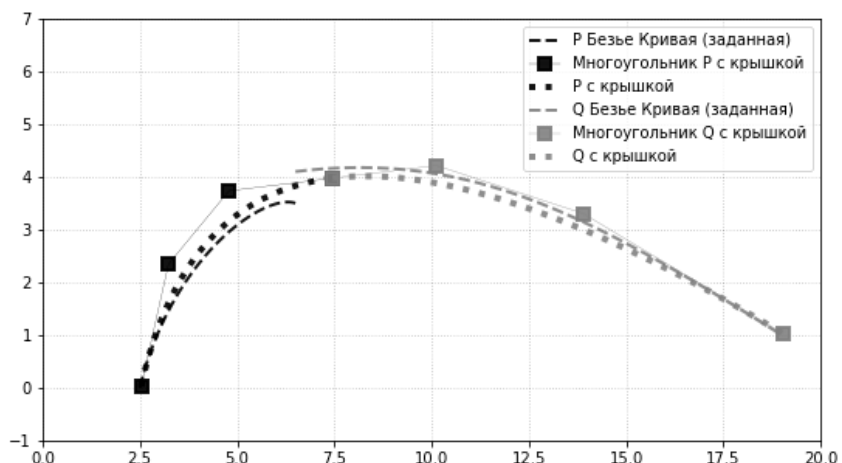


Рис. 2. Заданные кривые ($P(u)$ и $Q(v)$) и эти же кривые после сопряжения ($\hat{P}(u)$ и $\hat{Q}(v)$) (дискретная норма)

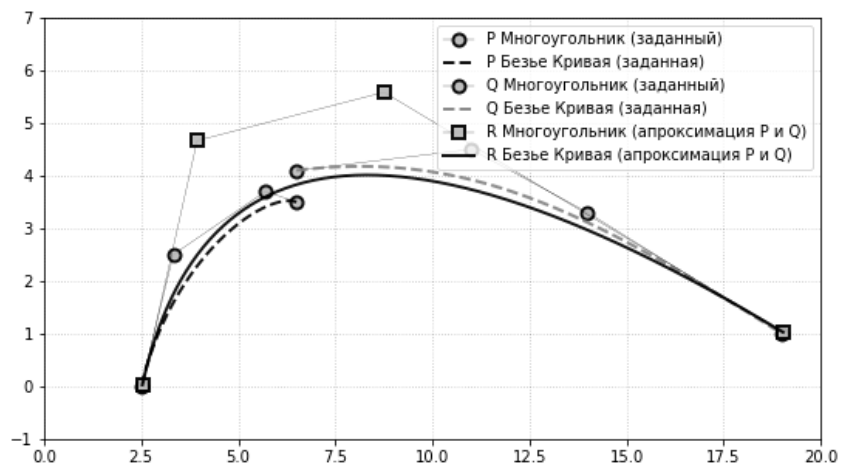


Рис. 3. Замена двух гладко сопряженных кривых (см. рис. 2) одной кривой $R(t)$ (дискретная норма)

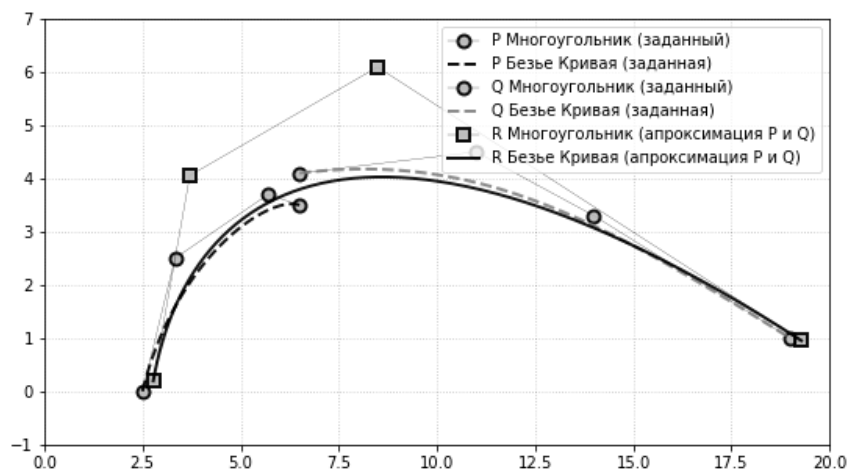


Рис. 4. Замена двух гладко сопряженных кривых (см. рис. 2) одной кривой $R(t)$ (интегральная норма)

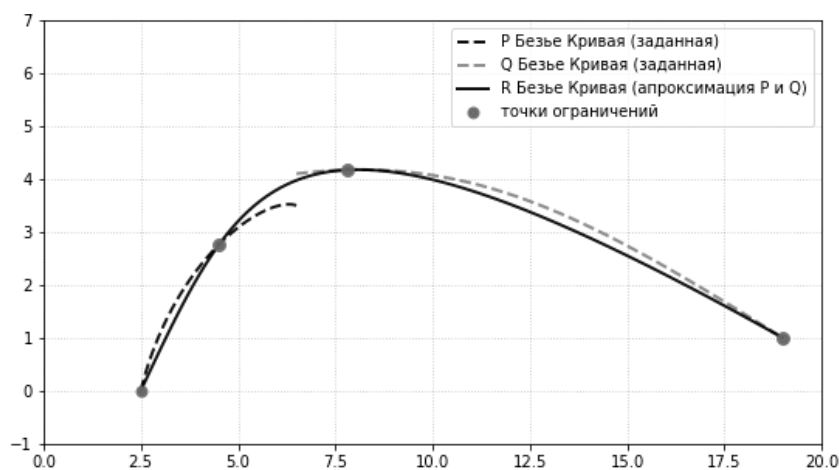


Рис. 5. Сопряжение при ограничениях (28) (дискретная норма)

веденных на рис. 1) с применением интегральной квадратичной нормы (12) без дополнительных ограничений. Как видно из рис. 4, при интегральной норме начальная и конечная точки аппроксимирующей кривой отклоняются от соответствующих точек заданных кривых. Эти отклонения могут быть легко устранены введением дополнительных ограничений в виде закрепленных границ.

На рис. 5 приведены результаты сопряжения для дискретной коэффициентной нормы при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \hat{P}(u_0) &= P(u_0), & u_0 &= 0, \\ \hat{P}(u_1) &= P(u_1), & u_1 &= 0,5, \\ \hat{Q}(v_0) &= Q(v_0), & v_0 &= 0,1, \\ \hat{Q}(v_1) &= Q(v_1), & v_1 &= 1,0. \end{aligned} \quad (28)$$

На рис. 6 приведены результаты сопряжения для интегральной квадратичной нормы при последовательном добавлении следующих ограничений при $u_0 = 0,4$:

$$\hat{P}(u_0) = P(u_0), \quad (29)$$

$$\hat{P}^{(1)}(u_0) = P^{(1)}(u_0), \quad (30)$$

$$\hat{P}^{(2)}(u_0) = P^{(2)}(u_0). \quad (31)$$

Дополнительное ограничение (29) устанавливает требование прохождения аппроксимирующей кривой (кривой R) через заданную точку u_0 на кривой $P(u)$. Совместные ограничения (29) и (30) задают требование прохождения через точку u_0 с сохранением первой производной в этой точке. Совместные ограничения (29), (30) и (31) – прохождение через точку u_0 с сохранением двух первых производных.

Из сравнения сопряжения без ограничений (см. рис. 4) с сопряжением при различных ограничениях (см. рис. 6) можно заключить, что ограничение в виде задания второй производной существенно влияет на отклонение аппроксимирующей кривой (см. рис. 6, в) от аппроксимации без ограничений (см. рис. 4).

Выводы

В работе предложен математический подход к задаче полностью гладкого сопряжения кривых Безье, что позволяет в точке сопряжения сохранить непрерывность как самой функции, так и всех ее производных до порядка, равного степени заданных

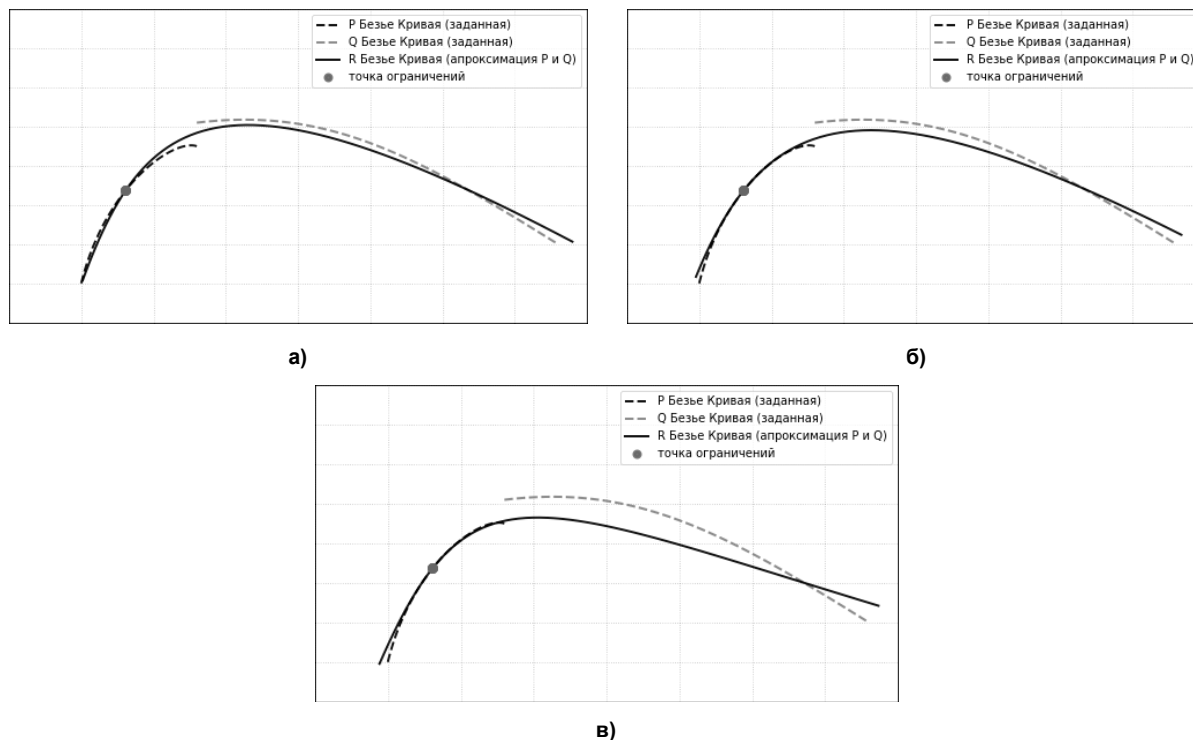


Рис. 6. Сопряжение с ограничениями (интегральная норма),
а – ограничение (29), б – ограничения (29-30), в – ограничения (29-31)

кривых Безье. Подход позволяет наложить на аппроксимирующую кривую дополнительные ограничения в виде прохождения через заданную точку и равенства производных в этой точке заданным значениям. Подход основан на формулировке экстремальной задачи при ограничениях в виде равенств, которая решается методом множителей Лагранжа и сводится к системе линейных алгебраических уравнений. В общем виде сформулированы дополнительные

ограничения и приведен способ их включения в задачу сопряжения через дополнительные слабые функции Лагранжа. Кривые Безье и все ограничения записываются как частный случай В-сплайнов, для чего используется математический аппарат базисных функций В-сплайнов, что позволит в дальнейшем развить предлагаемый метод для задач сопряжений В-сплайнов и NURBS. Приводятся примеры аппроксимаций с учетом различных ограничений.

Список литературы

1. Панчук К.Л., Мясоедова Т.М. Описание дискретно заданного плоского контура составной линией из дробно-рациональных кривых Безье второго порядка // Программные системы и вычислительные методы. 2019. № 3. С. 49–60. DOI: 10.7256/2454-0714.2019.3.30637
2. A review on approaches for handling Bezier curves in CAD for Manufacturing / H.N. Fitter, A.B. Pandey, D.D. Patel, J.M. Mistry // Procedia Engineering. 2014. 97. P. 1155–1166. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.394
3. Ромакин В.А. Сглаживание ломаных линий составными сплайнами Безье // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2022. Т. 11, № 4. С. 37–50. DOI: 10.14529/cmse220403.
4. Короткий, В.А. Конструктивные алгоритмы формирования составных кубических кривых Безье в пространстве и на плоскости // Омский научный вестник. 2022. № 2(182). С. 10–16. DOI: 10.25206/1813-8225-2022-182-10-16
5. Короткий В.А. Незакономерные кривые в инженерной геометрии и компьютерной графике // Научная визуализация. 2022. Т. 14, №1. С. 1–17. DOI: 10.26583/sv.14.1.01
6. Rogers D.F. An Introduction to NURBS: With Historical Perspective. Burlington: Morgan Kaufmann publisher, 2001. 324 p.
7. Роджерс Д.Ф., Адамс Дж.А. Математические основы машинной графики. М.: Мир, 2001. 602 с.
8. Piegl L., Tiller W. The NURBS Book. Springer, 1997. 646 p.
9. Ившин К.С., Башарова А.Ф. Принципы современного трехмерного моделирования в промышленном дизайне // Архитектон: известия вузов. 2012. № 3(39). С. 101–113.

10. Куреннов Д.В., Партин А.С. Алгоритм построения гладкого сопряжения поверхностей // Программные продукты и системы. 2009. № 39. С. 62–64.
11. Techniques for modeling a high-quality B-spline curves by S-polygons in a float format / R. Ziatdinov, V. Muftajev, R. Nabiyev, A. Mardanov, R. Akhmetshin // *Geometric Modeling. Computer Graphics in Education. GraphiCon-2018 Conference Proceedings*, Tomsk, Russia. 2018. P. 324–327. DOI: 10.48550/arXiv.1812.04223
12. Hoschek J. Approximate conversion of spline curves // *Computer Aided Geometric Design*. 1987. Vol. 4. P. 59–66. DOI: 10.1016/0167-8396(87)90024-0
13. Chen G.D., Wang G.J. Optimal multi-degree reduction of Bezier curves with constraints of endpoints continuity // *Computer Aided Geometric Design*. 2002. Vol. 19. P. 365–377. DOI: 10.1016/S0167-8396(02)00093-6
14. Eck M. Least square degree reduction of Bezier curves // *Computer-Aided Design*. 1995. Vol. 27, № 11. P. 845–851. DOI: 10.1016/0010-4485(95)00008-9
15. Sunwoo H., Lee N. A unified matrix representation for degree reduction of Bezier curves // *Computer Aided Geometric Design*. 2004. Vol. 21. P. 151–164. DOI: 10.1016/j.cagd.2003.07.007
16. Cheng M., Wang G.J. Approximate merging of multiple Bezier segments // *Progress in Natural Science*. 2008. Vol. 18 P. 757–762. DOI: 10.1016/j.pnsc.2008.01.021
17. Approximate merging of a pair of Bezier curves / S.-M. Hu, R.-F. Tong, T. Ju, J.-G. Sun // *Computer-Aided Design*. 2001. Vol. 33. P. 125–136. DOI: 10.1016/S0010-4485(00)00083-X
18. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. 2-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 384 с.
19. Bartels R.H., Beatty J.C., Barsky B.A. An Introduction to the Use of Splines in Computer Graphics. Berkeley: University of California, 1985. 232 p.
20. Salomon D. Curves and Surfaces for Computer Graphics. Springer Science Business Media, 2006. 461 p.

References

1. Panchuk K.L., Myasoedova T.M. Description of a discretely defined flat contour with a composite line of rational second-order Bezier curves. *Software Systems And Computational Methods*. 2019;3:50-59. (in Russ.) DOI: 10.7256/2454-0714.2019.3.30637
2. Fitter H.N., Pandey A.B., Patel D.D., Mistry J.M. A review on approaches for handling Bezier curves in CAD for Manufacturing. *Procedia Engineering*. 2014;97:1155–1166. DOI: 10.1016/j.proeng.2014.12.394
3. Romakin V.A. Polyline Smoothing with Compound Bezier Splines. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2022;11(4):37–50. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse220403.
4. Korotkiy V.A. Constructive algorithms for forming compound cubic Bezier curves in space and on plane. *Omsk Scientific Bulletin*. 2022;2(184):10-16. (in Russ.) DOI: 10.25206/1813-8225-2022-182-10-16
5. Korotkiy V.A. Irregular curves in engineering geometry and computer graphics. *Scientific Visualization*. 2022;14(1):1–17. (in Russ.) DOI: 10.26583/sv.14.1.01
6. Rogers D.F. *An Introduction to NURBS: With Historical Perspective*. Burlington: Morgan Kaufmann publisher; 2001. 324 p. (in Russ.)
7. Rogers D.F., Adams J.A. *Mathematical elements for computer graphics*. McGraw-Hill Publ. Company; 1990.
8. Piegl L., Tiller W. *The NURBS Book*. Springer, 1997. 646 p.
9. Ivshin K.S., Basharova A.F. Principles of modern three-dimensional modeling. *Architecton: Proceedings of Higher Education*. 2012;3(39):101–113. (in Russ.)
10. Kurennov D.V., Partin A.S. [Algorithm for constructing a smooth conjugation of surfaces]. *Software & Systems*. 2009;39:62–64. (in Russ.)
11. Ziatdinov R., Muftajev V., Nabiyev R., Mardanov A., Akhmetshin R. Techniques for modeling a high-quality B-spline curves by S-polygons in a float format. In: *Geometric Modeling. Computer Graphics in Education. GraphiCon-2018 Conference Proceedings, Tomsk, Russia*. 2018; P. 324–327. DOI: 10.48550/arXiv.1812.04223
12. Hoschek J. Approximate conversion of spline curves. *Computer Aided Geometric Design*. 1987;4:59–66. DOI: 10.1016/0167-8396(87)90024-0
13. Chen G.D., Wang G.J. Optimal multi-degree reduction of Bezier curves with constraints of endpoints continuity. *Computer Aided Geometric Design*. 2002;19:365–377. DOI: 10.1016/S0167-8396(02)00093-6
14. Eck M. Least square degree reduction of Bezier curves. *Computer-Aided Design*. 1995;27(11):845-851. DOI: 10.1016/0010-4485(95)00008-9
15. Sunwoo H., Lee N. A unified matrix representation for degree reduction of Bezier curves. *Computer Aided Geometric Design*. 2004;21:151–164. DOI: 10.1016/j.cagd.2003.07.007
16. Cheng M., Wang G.J. Approximate merging of multiple Bezier segments. *Progress in Natural Science*. 2008;18:757–762. DOI: 10.1016/j.pnsc.2008.01.021

17. Hu S.-M., Tong R.-F., Ju T., Sun J.-G. Approximate merging of a pair of Bezier curves. *Computer-Aided Design*. 2001;33:125–136. DOI: 10.1016/S0010-4485(00)00083-X
18. Alekseev V.M., Tikhomirov V.M., Fomin S.V. *Optimal'noe upravlenie*. [Optimal control]. 2nd ed. Moscow: FIZMATLIT; 2005. 384 p. (in Russ.)
19. Bartels R.H., Beatty J.C., Barsky B.A. *An Introduction to the Use of Splines in Computer Graphics*. Berkeley: University of California; 1985. 232 p.
20. Salomon D. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer Science Business Media; 2006. 461 p.

Информация об авторах:

Ганчук Сергей Николаевич, заместитель начальника отделения, начальник отдела, Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики – Российский федеральный ядерный центр, Саров, Россия; sngchukan@rosatom.ru.

Кривошеев Олег Викторович, кандидат технических наук, заместитель директора по технологиям полного жизненного цикла – директор института цифровых технологий – главный конструктор систем полного жизненного цикла, Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики – Российский федеральный ядерный центр, Саров, Россия; OLVkrivosheev@rosatom.ru.

Маврин Сергей Валентинович, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики – Российский федеральный ядерный центр, Саров, Россия; s.mavrin@yandex.ru

Рыжов Сергей Александрович, магистрант, Саровский физико-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», Саров, Россия; sergey.ryzhov2001@yandex.ru.

Information about the authors:

Sergey N. Ganchuk, Deputy Head of the Department, Head of Division, All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Russian Federal Nuclear Center, Sarov, Russia, sngchukan@rosatom.ru.

Oleg V. Krivosheev, Candidate of Science in Engineering, Deputy Head of All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Russian Federal Nuclear Center, Director of Institute of Digital Technologies, Chief Structural Engineer of Full life cycle systems, Sarov, Russia, OLVkrivosheev@rosatom.ru.

Sergey V. Mavrin, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Chief Researcher, All-Russian Research Institute of Experimental Physics, Russian Federal Nuclear Center, Sarov, Russia, s.mavrin@yandex.ru.

Sergey A. Ryzhov, Post-graduate student, Sarov Physics and Technology Institute of the National Research Nuclear University MEPhI, Sarov, Russia; sergey.ryzhov2001@yandex.ru.

Статья поступила в редакцию 03.10.2023, принята к публикации 16.10.2023.

The article was submitted 03.10.2023; approved after reviewing 16.10.2023.