

Строительная механика

Construction mechanics

Научная статья

УДК 624.04:539.3:534

DOI: 10.14529/build250404

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОГО КАРКАСА ПРИ ВНЕЗАПНОМ УДАЛЕНИИ КОЛОННЫ

А.Н. Потапов^{1✉}, Е.С. Созыкина², Д.Е. Дудин³

¹ Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия

² ГК «CRONOR Construction», Челябинск, Россия

³ ООО «УралНИИстров», Челябинск, Россия

[✉]potapov.alni@gmail.com

Аннотация. Приведены физический закон, математические модели колебаний и алгоритм расчёта дискретной диссипативной системы (ДДС) при выключении конструктивного элемента, вызванном запроектной (ударной) нагрузкой. В рамках теории временного анализа записаны разрешающие уравнения реакции конструктивно-нелинейной системы для двух состояний: до выключения несущего элемента (при $t \leq t_1$) и после выключения (при $t > t_1$). Учет внутреннего трения материала осуществлен на основе теории упруговязкого сопротивления по модели непропорционального демпфирования. Результаты иллюстрируются на примере колебаний модели 2-этажного железобетонного каркасного здания при разрушении угловой колонны нижнего этажа при случайному (внезапному) наезде на нее транспортного средства. Приведены осциллограммы колебаний параметров динамической реакции расчетных моделей каркаса: базовой (исходной) модели (БМ) и поврежденной модели (ПМ). Осциллограммы ускорений и силовых параметров реакции ПМ в момент удаления колонны при t_1 содержат скачки. Кроме того, для вектора внешних динамических сил в компоненте крутящего момента 1-го этажа ПМ обнаружен эффект скачка, явившийся следствием изменения положения координат центра жесткости (ц. ж.) этажа в момент внезапного удаления колонны.

Ключевые слова: диссипативная система, разрушение, динамическая реакция, перемещение, колебание, восстанавливающая сила, матрица жёсткости

Для цитирования. Потапов А.Н., Созыкина Е.С., Дудин Д.Е. Анализ колебаний железобетонного каркаса при внезапном удалении колонны // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». 2025. Т. 25, № 4. С. 33–44. DOI: 10.14529/build250404

Original article

DOI: 10.14529/build250404

ANALYSIS OF STRUCTURAL-NONLINEAR VIBRATIONS OF REINFORCED CONCRETE FRAME

A.N. Potapov^{1✉}, E.S. Sozikina², D.E. Dudin³

¹ South Ural State University, Chelyabinsk, Russia

² GC “CRONOR Construction”, Chelyabinsk, Russia

³ UralNIstrom LLC, Chelyabinsk, Russia

[✉]potapov.alni@gmail.com

Abstract. The article presents a physical law, mathematical models of oscillations and an algorithm for calculating a discrete dissipative system (DDS). The algorithm is based on the following condition: the structural element is disabled due to an out-of-design (shock) load. Within the theory of time analysis, the resolving equations of the reaction of a structurally nonlinear system are written for two states: before switching off the carrier element (at $t \leq t_1$) and after switching off (at $t > t_1$). The internal friction of the material is taken into account on the basis of the theory of elastic-viscous resistance in accordance with the model of disproportionate damping. The article considers the oscillation of the model of a 2-storey reinforced concrete frame building during the destruction of the corner column of the lower floor.

The destruction of the column occurs as a result of an accidental (sudden) impact of a vehicle. The oscillograms of fluctuations in the dynamic reaction parameters of the models are given: the basic (initial) model (BM) and the damaged model (PM). The oscillograms of accelerations and force parameters of the PM reaction at the time of column extraction at t_1 contain sharp changes in values (jumps). A jump effect was found for the vector of external dynamic forces as part of the torque of the 1st floor of the PM. It occurs as a result of a change in the position of the coordinates of the center of rigidity (c.w.) of the overlap at the time of the sudden removal of the column.

Keywords: dissipative system, destruction, dynamic reaction, displacement, oscillation, restoring force, stiffness matrix

For citation. Potapov A.N., Sozikina E.S., Dudin D.E. Analysis of structural-nonlinear vibrations of reinforced concrete frame. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture.* 2025;25(4):33–44. (in Russ.). DOI: 10.14529/build250404

Обзорная часть

Прогрессирующее обрушение представляет собой экстремальное событие в зданиях и сооружениях, начинающееся с локального повреждения какой-то конструкции, а затем переходящее в виде цепной реакции на другие части сооружения, приводя его либо к частичному, либо полному разрушению. К данному явлению, проявляющему неоппорциональный характер разрушения, обращено внимание инженеров и научных специалистов как отечественных, так и зарубежных, о чем свидетельствуют многочисленные публикации и конференции [1–11].

Непропорциональный характер разрушения состоит в том, что отказ одного конструктивного элемента, напр., колонны или ригеля, имеющее вид локального события в конструкции, неожиданно принимает лавинообразный характер и может вызвать обрушение всего здания. Особенностью этих разрушений также является то, что они происходят, как правило, при выполнении всех норм и правил строительного проектирования. Сложный и непредсказуемый характер таких разрушений вынуждает выделить их в особую категорию так называемых запроектных воздействий [1], не подчиняющихся условиям нормальной эксплуатации строительных объектов.

Поэтому первостепенной задачей строительной науки является обеспечение живучести зданий и сооружений. Этой теме в последнее время посвящено огромное количество различных подходов к проектированию зданий и сооружений по их защите от прогрессирующего обрушения.

В России на основе этих подходов разработан ряд мероприятий по предотвращению прогрессирующего (или лавинообразного) обрушения для различных категорий зданий (высотных, монолитных жилых, крупнопанельных, большепролетных сооружений), приведенных в рекомендациях [12, 13], публикациях [2, 4, 6, 10, 14] и нормативных документах [15]. Аналогичные разработки по защите конструкций зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения ведутся за рубежом (американские [16, 17] и европейские [18] стандарты и требования).

Из обзора публикаций зарубежных источников следует, что основные направления исследо-

ваний по методам оценки живучести зданий можно условно разделить на три направления. Первое направление относится к методам разработки надёжности конструктивных элементов с использованием 2- и 3-мерных моделей разрушения [8, 10, 19–21], второе – к методам разработки мероприятий, которые связаны с повышением сопротивляемости конструктивной схемы к разрушению [7, 22–24]. Третье направление исследований связано с созданием стойких к разрушению каркасных зданий, для этого используется опыт проектирования и расчёта конструкций в условиях сейсмических воздействий [22, 24].

В большинстве случаев все исследования по оценкам сопротивления нагрузки и режиму внезапных отказов конструкции получены либо по результатам численного моделирования на основе различных модификаций метода конечного элемента [25], либо экспериментальным путем. Отсутствие аналитических методов расчета конструкций на прогрессирующее обрушение объясняется сложностью задачи, хотя при этом отмечается важность теоретических исследований по созданию аналитических моделей для анализа поврежденных конструкций [1, 2].

При внезапном выключении критического элемента (колонны или ригеля) поврежденная система из состояния покоя переходит в состояние движения. Это связано с тем, что положение статического равновесия для системы уже становится невозможным и переход в режим колебаний – это вынужденный для неё шаг, чтобы сохранить свою целостность. Поэтому при создании математической модели колебаний поврежденной системы следует учитывать наличие инерционных эффектов и сил сопротивления, свойственных задаче динамического анализа. Решение этой задачи требует построения системы уравнений динамической реакции расчетной модели с выключающимся конструктивным элементом, что при численном моделировании выполнить чрезвычайно сложно.

Однако решение такой задачи по созданию математической модели колебаний и построению комплекса уравнений динамической реакции конструктивной системы с выключающимся несущим элементом можно получить на основе временного анализа. В статье предложен подход к расчету по-

врежденного каркаса с использованием метода моделирования альтернативного пути [10, 12] в рамках теории временного анализа дискретных диссипативных систем (ДДС) [26]. Анализ колебаний проведён для 2-этажного железобетонного каркаса при внезапном выключении угловой колонны.

Метод исследования

Условия динамического равновесия расчетной модели, рассматриваемой в виде ДДС, представляется системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) движения. В матричной форме эта система вместе с начальными условиями имеет вид:

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = f(t), \quad (1)$$

$$Y_0(t_0) = Y(t_0), \dot{Y}_0(t_0) = \dot{Y}(t_0), \quad (2)$$

где $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, $C = C^T$, $K = K^T$ – матрицы масс, затухания и жесткости; $Y(t)$, $\dot{Y}(t)$, $\ddot{Y}(t)$ – векторы перемещений и их производных; $f(t) = Q + P(t)$ – вектор внешней нагрузки, содержащий векторы статических ($Q = KY_{st}$) и динамических $P(t)$ воздействий; Y_{st} – вектор статических перемещений расчетной модели.

В процессе колебаний помимо внешней нагрузки на узлы дискретной модели действуют внутренние силовые параметры модели – восстанавливающие, диссипативные и инерционные силы. Они представляют соответствующие векторы левой части ОДУ (1):

$$R(t) = KY(t), F(t) = C\dot{Y}(t), I(t) = -M\ddot{Y}(t). \quad (3)$$

В случае внезапного разрушения колонны происходит снижение параметров жесткости расчетной модели (каркаса), характерное для конструктивно-нелинейного процесса. Математическая формулировка этого процесса, определяемая связью между восстанавливающими силами и перемещениями узлов модели, приведена в [26] и имеет вид:

$$\begin{aligned} R(t) &= K_i Y(t), \\ K_i &= K_0 \quad (t \leq t_1), \quad K_i = K_1 \quad (t > t_1), \end{aligned} \quad (4)$$

где t_1 – время, при котором происходит выключение (удаление) колонны.

Матрица жесткости K_i ($i = 0, 1$) в (4) при $t \leq t_1$ формируется по расчетной схеме, соответствующей базовой модели (БМ), а при $t > t_1$ – по схеме поврежденной модели (ПМ). Для БМ индекс $i = 0$ в дальнейшем опущен.

Помимо уравнения движения расчётной модели конструктивно-нелинейной системы огромное значение имеет уравнение движения собственных форм колебаний ДДС, которое является характеристическим по отношению к однородному ОДУ в (1):

$$MS^2 + CS + K = 0, \quad (5)$$

где $S \in M_n(\mathbf{C})$. Матрица S с помощью фундаментальной матрицы $\Phi(t) = e^{St}$ осуществляет связь

между однородным ОДУ в (1) и характеристическим уравнением (5). В матрице S заключены свойства внутренних динамических параметров расчетной модели, так как ее спектр содержит все параметры собственных колебаний ДДС (коэффициенты демпфирования, частоты и формы собственных колебаний).

Соотношения (4) представляют физическую зависимость между компонентами вектора восстанавливающих сил $R(t)$ и вектора перемещений $Y(t)$ конструктивно-нелинейной системы. Уравнения (1)–(5) являются математической моделью колебаний такой системы при запроектном воздействии, моделируемом внезапно удаленным конструктивным элементом (колонной).

Система разрешающих уравнений динамической реакции расчетной модели до удаления колонны (БМ) при $t \in [t_0, t_1]$ принимает вид [26]:

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re}\{X(t)\} + Y_{st}, \quad \dot{Y}(t) = 2\text{Re}\{SX(t)\}, \\ \ddot{Y}(t) &= 2\text{Re}\{S^2 X(t)\} + M^{-1}P(t), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= X^0(t-t_0) + Z^P(t-t_0), \\ X^0(t-t_0) &= \\ &= \Phi(t-t_0)U^{-1}M[-\bar{S}(Y_0(t_0)-Y_{st}) + \dot{Y}_0(t_0)], \\ Z^P(t-t_0) &= U^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(t-t)^T P(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В этих уравнениях матрица U является характеристикой решения матричного квадратичного уравнения (5). Выражение реакции при свободных колебаниях в вектор-функции $X^0(t-t_0)$ зависит от начальных условий задачи (2). Если в момент разрушения колонны (при t_0) БМ находилась в состоянии покоя, то $Y_0(t_0) = 0$, $\dot{Y}_0(t_0) = 0$ и реакция $X^0(t-t_0)$ содержит только статические перемещения (вектор Y_{st}).

Выражение реакции при вынужденных колебаниях выражается интегралом Дюамеля, определяемым вектор-функцией $Z^P(t-t_0)$. Характер динамической нагрузки импульсного типа задается вектором $P(t)$. В момент времени $t = t_1$ расчетная модель переходит в поврежденное состояние.

При переходе в режим колебаний поврежденной модели происходит замена внешних динамических параметров (матриц M , C , K), сформированных до повреждения системы, на «новые» параметры (матрицы M_1 , C_1 , K_1), соответствующие моменту времени t_1 , при котором происходит удаление колонны. Одновременно с этим формируются векторы начальных условий (перемещений и скоростей), назначаемые из предыдущей системы уравнений (6), (7) в конце интервала $t = t_1$:

$$Y_0(t_1) = Y(t_1), \quad \dot{Y}_0(t_1) = \dot{Y}(t_1).$$

Система уравнений динамической реакции ПМ при ($t \geq t_1$) имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= 2\operatorname{Re}\{X(t)\} + Y_{st}(t_1), \\ \dot{Y}(t) &= 2\operatorname{Re}\{S_1 X(t)\}, \\ \ddot{Y}(t) &= 2\operatorname{Re}\{S_1^2 X(t)\} + M_1^{-1} P(t), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= X_1^0(t-t_1) + Z_1^P(t-t_1), \\ X_1^0(t-t_1) &= \Phi_1(t-t_1) U_1^{-1} M_1 \times \\ &\times \left[-\bar{S}_1(Y_0(t_1) - Y_{st}(t_1)) + \dot{Y}_0(t_1) \right], \\ Y_{st}(t_1) &= K_1^{-1} Q, \\ Z_1^P(t-t_1) &= U_1^{-1} \int_{t_1}^t \Phi_1(t-\tau)^T P(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Компонентами вектора $Y_{st}(t_1)$ являются статические перемещения ПМ.

При анализе ПМ помимо количественных оценок значительный интерес представляют качественные оценки параметров динамической реакции в критической точке t_1 . Для параметров (4), (6)–(9) получены уравнения векторных невязок, записанные в виде разности динамической реакции после (уравнения (8), (9)) и до (уравнения (6), (7)) выключения колонны. Тогда величина скачков при t_1 в аналитическом виде записывается так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y(t_1) &= 0, \quad \Delta \dot{Y}(t_1) = 0, \\ \Delta \ddot{Y}(t_1) &= \Delta(M^{-1}K) \cdot Y_0(t_1) + \\ &+ \Delta(M^{-1}C) \cdot \dot{Y}_0(t_1) - \Delta(M^{-1}P), \\ \Delta I(t_1) &= \Delta R(t_1) + \Delta F(t_1) + \Delta P(t_1), \\ \Delta R(t_1) &= -\Delta K \cdot Y_0(t_1), \quad \Delta F(t_1) = -\Delta C \cdot \dot{Y}_0(t_1), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где невязки

$$\left. \begin{aligned} \Delta K &= K - K_1, \quad \Delta C = C - C_1, \\ \Delta(M^{-1}K) &= (M^{-1}K - M_1^{-1}K_1), \\ \Delta(M^{-1}C) &= (M^{-1}C - M_1^{-1}C_1), \\ \Delta(M^{-1}P) &= [M^{-1}P(t_1^-) - M_1^{-1}P(t_1^+)], \\ \Delta P(t_1) &= P(t_1^-) - P(t_1^+), \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

построены для матричных величин при t_1 до и после удаления колонны; t_1^- , t_1^+ – критическое время t_1 , рассматриваемое соответственно до и после выключения колонны.

Из формул (10) следует, что перемещения и скорости при t_1 не имеют скачков, являясь непрерывными функциями времени, что обусловлено постановкой начальных условий. Остальные параметры динамической реакции в общем случае имеют скачки.

Результаты, анализ

Проведен динамический анализ 2-этажного железобетонного каркаса при запроектном воздействии, произошедшем в результате случайного наезда транспортного средства на угловую колонну (рис. 1а). Параметры каркаса: план здания 30×12 м, высота колонн этажей: $h_1 = 4,2$ м, $h_2 = 3,3$ м; шаг сетки колонн $l = 6$ м, поперечное сечение $0,4 \times 0,4$ м.

Жесткости колонн на изгиб и кручение: $EJ_x = EJ_y = 501330000 \text{ кНсм}^2$; $GJ = 336900000 \text{ кНсм}^2$ ($G = 0.35E$ [27]).

Массы и моменты инерции плит перекрытий этажей:

$$m_1 = 1,97 \text{ kH}\cdot\text{c}^2/\text{cm}, m_2 = 1,82 \text{ kH}\cdot\text{c}^2/\text{cm};$$

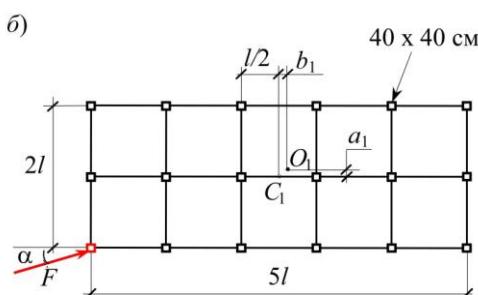
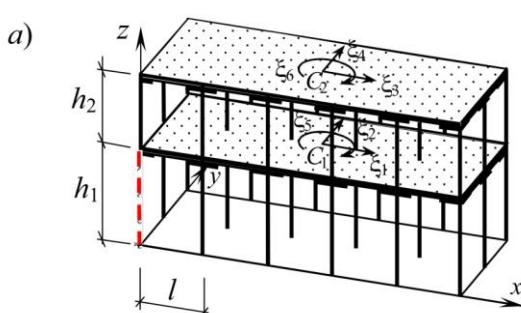
$$J_1 = 1713900 \text{ kH}\cdot\text{cm}\cdot\text{c}^2, J_2 = 1583400 \text{ kH}\cdot\text{cm}\cdot\text{c}^2.$$

Координаты центра жесткости (ц. ж.) O_1 1-го этажа ПМ, отсчитываемые от центра тяжести (ц. т.) C_1 , равны $a_1 = 35,29$ см, $b_1 = 38,24$ см (рис. 1б).

Для каркаса принята сдвиговая модель, согласно которой плиты перекрытий – абсолютно жесткие диски, колонны – упругие, невесомые и несжимаемые стойки с жестким защемлением в верхней и нижней части. Каждый этаж имеет 3 степени свободы: поступательные перемещения в направлении координатных осей x и y и вращательное движение, относительно вертикальной оси, проходящей через ц.ж. упругих связей (см. рис. 1а).

Матрица масс: $M = \text{diag} ([m_1, m_1, m_2, m_2, J_1, J_2])$.

Матрицы жесткости K , K_1 обеих расчетных моделей (БМ и ПМ) сформированы с помощью соответствующих матриц податливости L , L_1 с использованием фундаментального соотношения $K = L^{-1}$, $K_1 = (L_1)^{-1}$:



**Рис. 1. Расчетная модель 2-этажного железобетонного каркаса:
а – расчетная динамическая модель; б – сетка колонн**

$$K = \begin{bmatrix} 0,378 & 0 & -0,232 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,378 & 0 & -0,232 & 0 & 0 \\ -0,232 & 0 & 0,232 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,232 & 0 & 0,232 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 491080,625 & -301089,917 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -301089,917 & 301089,917 \end{bmatrix} \times 10^4, \text{ кН/см (кН·см);}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0,370 & 0 & -0,232 & 0 & 4,870 & 0 \\ 0 & 0,370 & 0 & -0,232 & -5,276 & 0 \\ -0,232 & 0 & 0,232 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,232 & 0 & 0,232 & 0 & 0 \\ 4,870 & -5,276 & 0 & 0 & 491769,301 & -301089,917 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -301089,917 & 301089,917 \end{bmatrix} \times 10^4, \text{ кН/см (кН·см).}$$

Силы сопротивления при колебаниях каркаса учтены по модели непропорционального демпфирования [26]:

$$C = (KT + TK)/2,$$

где $T = \gamma \sqrt{MK_d^{-1}} = \text{diag}(\Delta t_1, \dots, \Delta t_n)$; $\Delta t_j = \frac{\gamma}{w_j}$ ($j = 1, \dots, n$); $w_j = \sqrt{\frac{r_{jj}}{m_j}}$ – частота собственных колебаний соответствующей консервативной системы; $\gamma = \delta / \pi$; $\delta = 0,2$ – логарифмический декремент колебаний; матрица $K_d = \text{diag}(r_{11}, \dots, r_{nn})$ содержит диагональные элементы матрицы жесткости K .

Ударная нагрузка на колонну каркаса составила $F = 50$ кН при угле наклона вектора F к горизонту $\alpha = 30^\circ$ (см. рис. 1б). Ее воздействие на узлы расчетной схемы моделируется в виде синусоидального закона

$$P(t) = P_0 \sin\left(\frac{\pi t}{t_a}\right),$$

где P_0 – вектор амплитуд, t_a – время действия ударной нагрузки.

Векторы амплитуд внешних воздействий и векторы нагрузки в критической точке t_1 соответственно до (t_1^-) и после (t_1^+) удаления колонны принимают вид (вектор Q в (1) принят равным нулю):

$$P_0 = \begin{bmatrix} 15,588 \\ 9,000 \\ 0 \\ 0 \\ 4146,926 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН} \quad P(t_1^-) = \begin{bmatrix} 9,163 \\ 5,290 \\ 0 \\ 0 \\ 2437,502 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН} \quad P(t_1^+) = \begin{bmatrix} 9,163 \\ 5,290 \\ 0 \\ 0 \\ 2316,443 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН} \quad (12)$$

По результатам расчета собственных колебаний базовой и поврежденной моделей, проводимых на основе процедуры решения матричного квадратичного уравнения (5), получены при $n = 6$ частотные спектры и коэффициенты демпфирования, приведенные в таблице.

Частоты и коэффициенты демпфирования расчетных моделей 2-этажного каркаса

№	Частоты собственных колебаний, рад/с		Коэффициенты демпфирования, рад/с	
	БМ	ПМ	БМ	ПМ
1	18,170	17,702	0,274	0,260
2	18,170	17,738	0,274	0,262
3	22,207	22,264	0,335	0,337
4	53,478	53,235	2,257	2,254
5	53,478	53,238	2,257	2,255
6	65,314	65,337	2,757	2,757

Из таблицы видно, что в целом спектр частот БМ превышает спектр ПМ, а формы собственных колебаний БМ демпфируются несколько сильнее форм ПМ, что характерно для более повышенной жесткости БМ.

Анализ колебаний расчетной модели проводится в соответствии с методом альтернативного подхода [8, 10], согласно которому одна из угловых колонн каркаса считается удаленной (при t_1), после чего оценивается устойчивость к разрушению оставшейся структуры. Для этой цели используются системы разрешающих уравнений реакции БМ (6), (7) на интервале времени $t \in [t_0, t_1]$ и уравнений реакции ПМ (8), (9) при $t \geq t_1$, полагая, что t_0 – это время начала наезда транспортного средства на угловую колонну.

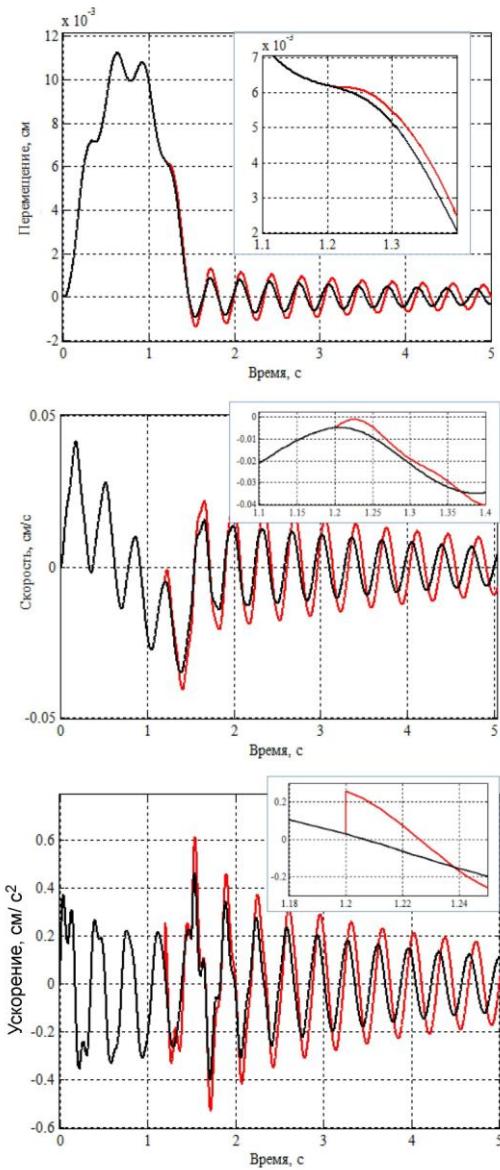


Рис. 2. Кинематические параметры реакции в ц. т. плиты перекрытия 1-го этажа (по направлению оси x)

Время, при котором происходит удаление колонны, принято равным $t_1 = 0,8t_a = 1,2$ с ($t_a = 1,5$ с). Шаг временного анализа равен $\Delta t = t_a / 500 = 0,003$ с. При $t_a = 1,5$ с внешнее воздействие является кратковременной ударной нагрузкой ввиду $t_a > 2,5T_1 = 0,864$ с (см. таблицу) [27].

На рис. 2, 3 приведены кинематические и силовые параметры динамической реакции БМ и ПМ первого этажа каркаса вдоль оси x : кинематические характеристики (перемещения, скорости и ускорения) на рис. 2, силовые (восстанавливающие, диссипативные и инерционные силы) на рис. 3. На всех графиках параметры реакции БМ изображены черным цветом, для ПМ – красным цветом.

Вследствие более высокой жесткости и более повышенного демпфирования БМ для всех пара-

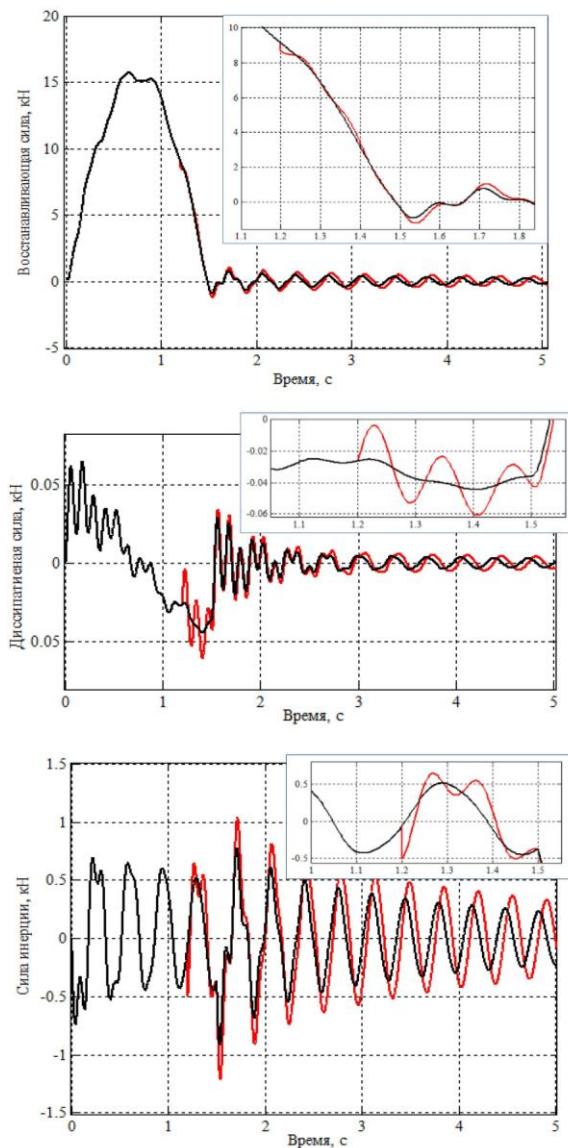


Рис. 3. Силовые параметры реакции, действующие в ц. т. плиты перекрытия 1-го этажа (по направлению оси x)

метров реакции характерно некоторое отставание кривых БМ от соответствующих кривых ПМ и снижение амплитуд БМ по сравнению с амплитудами ПМ.

На осциллограммах ускорений (см. рис. 2) и всех силовых параметрах реакции (см. рис. 3) при t_1 ПМ каркаса содержит скачки, согласующиеся со значениями, полученными по аналитическим выражениям невязок (10), (11). Перемещения и скорости при t_1 в ПМ скачков не имеют. На некоторых осциллограммах параметров реакции (ускорения, диссипативные и инерционные силы) сразу после разрушения колонны на небольшом интервале времени (в пределах $t \in [1,2; 1,5]$ с) наблюдаются обертональные всплески, характеризуемые повышенными амплитудами и подключением к основному тону колебания ПМ более высокочастотных гармоник.

Угловые параметры горизонтальных колебаний (перемещений и скоростей), связанные с вращением плиты перекрытия 1-го этажа, даны на осциллограммах рис. 4. Поворот перекрытия происходит вокруг ц. ж. O_1 .

В плите перекрытия 1-го этажа возникает крутящий момент от действия внешних горизонтальных сил относительно ц. ж. O_1 , вызывающий ответную реакцию – внутренние моменты от восстановливающих, диссипативных и инерционных сил. На 2-м этаже крутящие моменты отсутствуют из-за нулевых горизонтальных сил. На рис. 5 представлены моменты восстановливающих (упругих) и инерционных сил, действующие в базовой и поврежденной моделях 1-го этажа.

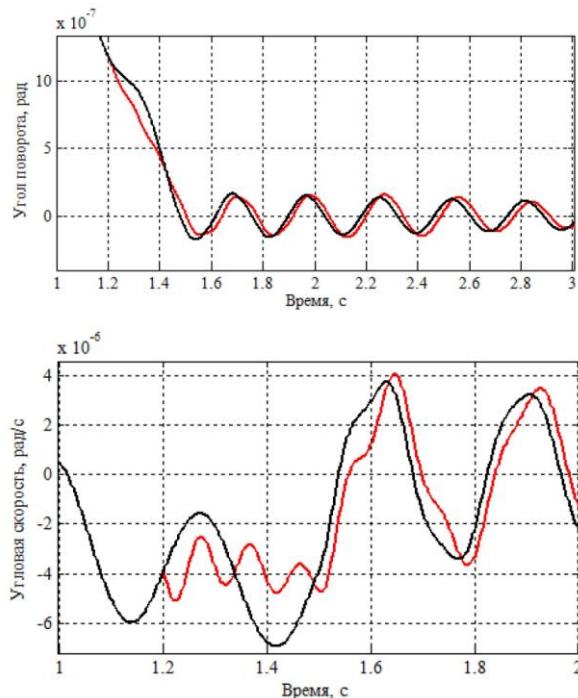


Рис. 4. Угловые параметры реакции плиты перекрытия 1-го этажа

Скачки на осциллограммах крутящих моментов от действия восстановливающих и инерционных сил (см. рис. 5) появились в плите перекрытия 1-го этажа вследствие образования эксцентриситетов a_1 , b_1 между ц. т. C_1 и ц. ж. O_1 упругих связей этажа ПМ (см. рис. 1б). Из формул (10), (11) следует, что наличие эксцентриситетов привело к появлению ненулевых невязок матриц жесткости и демпфирования (ΔK , ΔC), а также невязки вектора нагрузки в критической точке t_1 : $\Delta P(t_1) = P(t_1^-) - P(t_1^+)$ с ненулевой 5-й компонентой (см. (12)). Невязки приведенных величин появились только после разрушения колонны, поэтому на всех осциллограммах до экстремального события (при $t_1 = 1,2$ с) динамические реакции БМ и ПМ совпадают между собой.

На рис. 6 даны осциллограммы горизонтальных перемещений (по оси x) и ускорений (по оси y) плиты перекрытия расчетных моделей 2-го этажа. Хотя ц. т. C_2 и ц. ж. O_2 во 2-м этаже совпадают друг с другом, на осциллограмме ускорений при $t_1 = 1,2$ с имеется скачок. Это позволяет сделать вывод о том, что удаление связи в каком-либо одном этаже каркаса приводит к изменению жесткости всей системы, а значит, к изменению параметров динамической реакции на других этажах каркаса.

На рис. 7 показан крутящий момент $P_5(t)$ в 1-м этаже плиты перекрытия. В ПМ крутящий момент имеет скачок, причина которого, как уже отмечено – внезапное изменение положения координат ц. ж., изменившее плечо горизонтальной силы. Значение скачка крутящего момента в ПМ опреде-

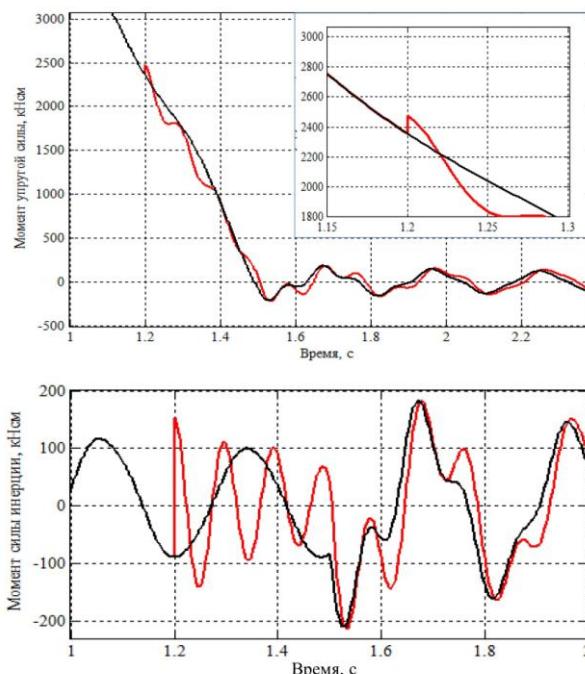


Рис. 5. Моментные характеристики реакции, действующие в плите перекрытия 1-го этажа

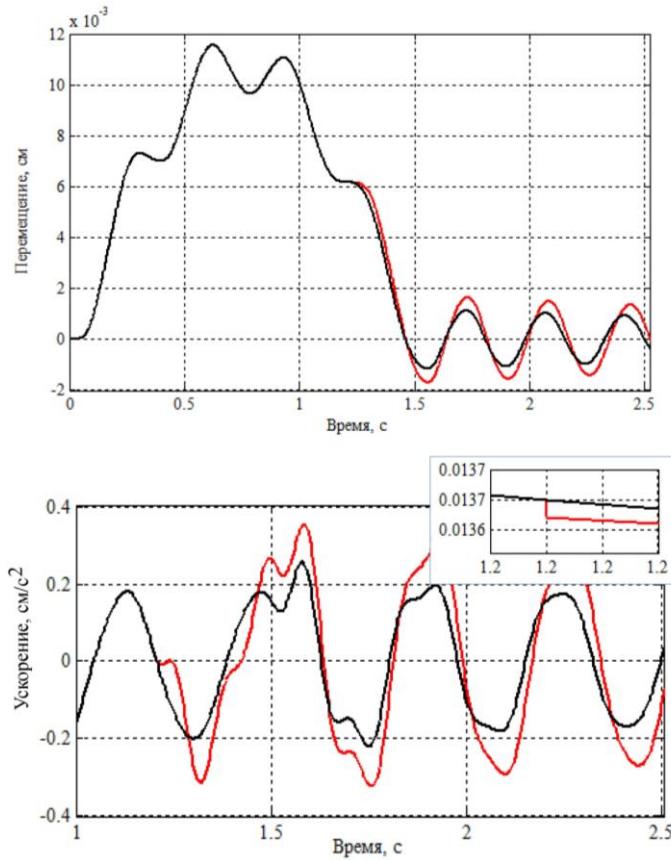


Рис. 6. Параметры реакции во 2-м этаже каркаса:
горизонтальное перемещение ц. т. С₂ по оси x;
ускорение плиты перекрытия по оси y

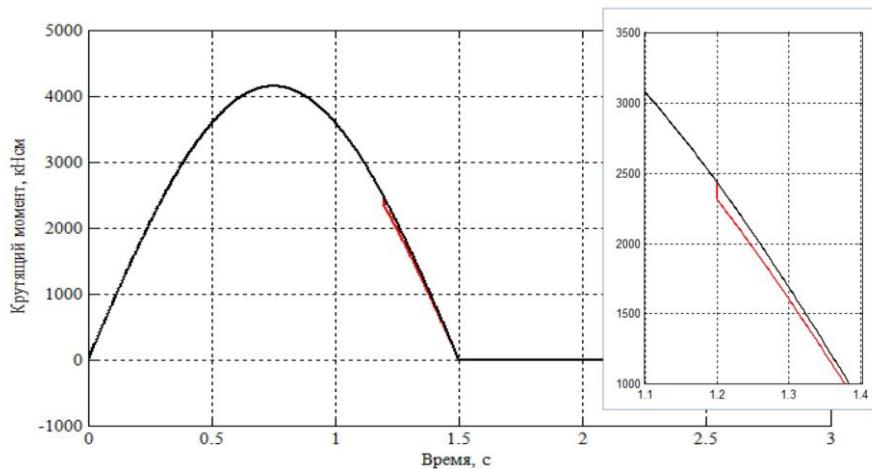


Рис. 7. Крутящий момент от действия внешней горизонтальной силы
в 1-м этаже расчетных моделей каркаса (БМ и ПМ)

ляется разностью (12): $\Delta P_5(t) = P_5(t_1^-) - P_5(t_1^+) = 121,058 \text{ кН}\cdot\text{см}$.

Для оценки решения введены вектор-функции:

$$\varphi(t) = R(t) + F(t) - I(t), \quad \Delta(t) = \varphi(t) - P(t).$$

Первая величина $\varphi(t)$ – суть алгебраическая сумма всех сил левой части ОДУ (1); она дает качественную оценку приближения построенного решения к заданной вектор-функции $P(t)$ внешних

воздействий. Вторая $\Delta(t)$ является векторной неизвестной между построенной левой и заданной правой частями ОДУ (1) и служит критерием точности решения.

На рис. 8 приведен суммарный крутящий момент $\varphi_5(t)$, вызванный действием внутренних сил левой части ОДУ в 1-м этаже. Величина $\varphi_5(t)$ выражает степень приближения решения к функции заданной нагрузки $P_5(t)$.

Левый фрагмент: скачок у крутящего момента ПМ при $t_1 = 1,2$ с. На правых фрагментах показаны свободные колебания моделей при $t_1 \geq 1,5$ с, когда внешняя нагрузка отсутствует. Здесь значения крутящего момента близки к нулю: для ПМ по-

грешность не превышает: $\varepsilon \leq 3e^{-9}$ (красный цвет на верхнем фрагменте), для БМ – $\varepsilon \leq 2e^{-13}$ (черный цвет на нижнем фрагменте).

На рис. 9, 10 приведены осциллограммы функциональных невязок $\Delta_1(t)$ и $\Delta_5(t)$ соответст-

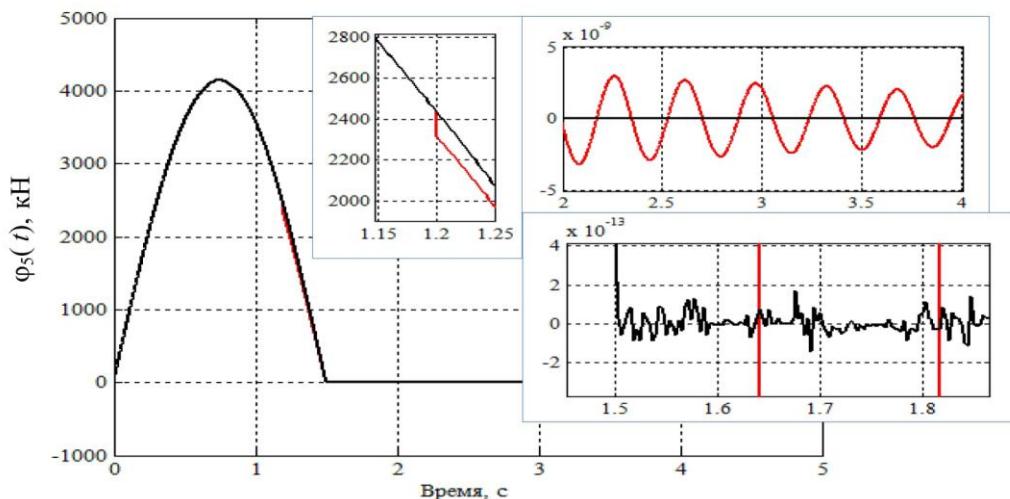


Рис. 8. Функции $\phi_5(t)$ левой части ОДУ движения (1) расчетных моделей каркаса (БМ и ПМ) – суммарный крутящий момент в 1-м этаже

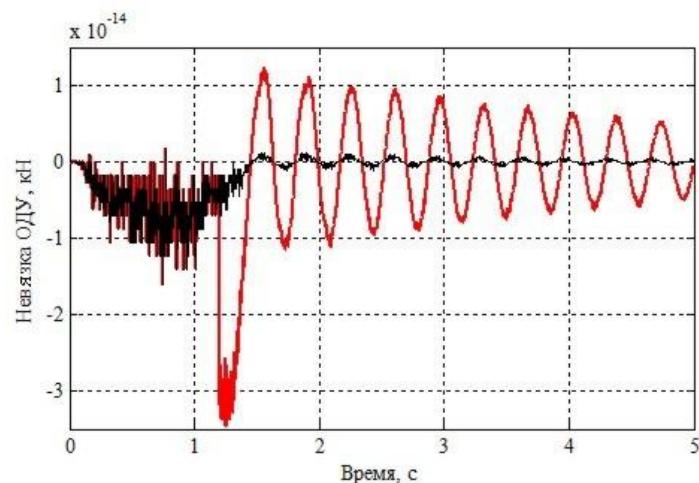


Рис. 9. Осциллограммы невязки $\Delta_1(t)$ ОДУ (1) горизонтальной силы, действующей в ц. т. плиты перекрытия 1-го этажа вдоль оси x

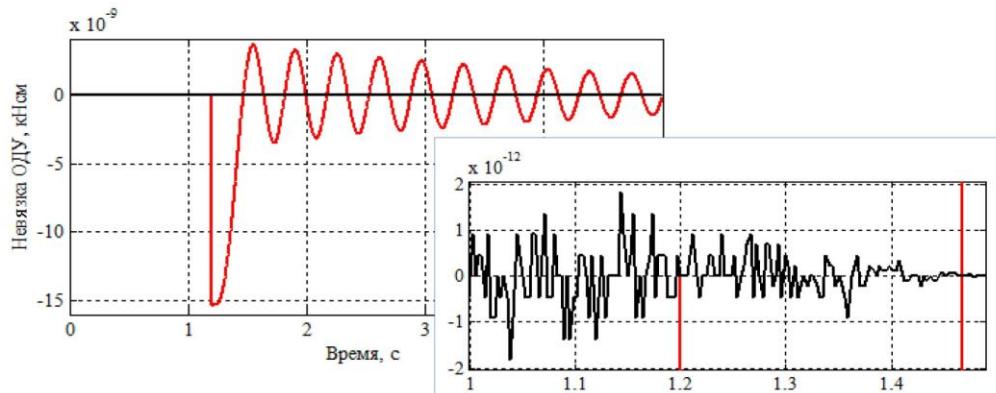


Рис. 10. Осциллограммы невязки $\Delta_5(t)$ ОДУ (1) для крутящего момента в плите перекрытия 1-го этажа расчетных моделей каркаса

венно суммарной горизонтальной силы, действующей в ц. т. C_1 вдоль оси x , и крутящего момента в плите перекрытия 1-го этажа. В обоих случаях осциллограммы невязок показывают высокую точность решения. Для кривых $\Delta_1(t)$ на рис. 9 точность интегрирования ОДУ движения (1) по обеим расчетным моделям не превышает $\varepsilon \leq 3,5 \cdot 10^{-14}$ кН, для кривых $\Delta_5(t)$ (рис. 10) величина погрешности: $\varepsilon \leq 15 \cdot 10^{-9}$ кН·см.

Результаты, приведенные на рис. 7–10, свидетельствуют о высокой точности построения динамической реакции каркаса с внезапно выключенной колонной на основе временного анализа.

Выводы. Заключение

1. Анализ отечественных и зарубежных источников показывает, что подавляющее большинство исследований по моделям разрушения основано на численных и экспериментальных методах. Специалистами отмечен дефицит теоретической базы в разработке основ механизма живучести конструктивных систем, без создания которой невозможно получить строго обоснованные предложения для их включения в нормативные документы.

2. Построена математическая модель конструктивно-нелинейных колебаний системы с внезапно выключающимся элементом при нагрузке, моделирующей запроектное воздействие. Разрешающие уравнения динамической реакции, сформированные с помощью временного анализа, учитывают поведение расчетной модели как до, так и после ее повреждения.

3. В анализе 2-этажного железобетонного каркаса при внезапном удалении угловой колонны 1-го этажа у вектора внешних динамических сил ПМ обнаружен эффект скачка (для компоненты крутящего момента 1-го этажа), появившийся вследствие изменения положения координат ц. ж. этажа.

4. Показана эффективность метода решения задачи конструктивно-нелинейных колебаний каркаса при использовании теории временного анализа ДДС. В рамках предложенной математической модели оценка точности интегрирования дифференциального уравнения движения ПМ каркаса не превышает значений: $3,5 \cdot 10^{-14}$ кН (для линейной составляющей невязки $\Delta_1(t)$) и $15 \cdot 10^{-9}$ кН·см (для невязки крутящего момента $\Delta_5(t)$).

Предложенный аналитический аппарат открывает возможности для более глубокого и детального анализа конструктивно-нелинейных систем при критических ситуациях отказа несущих элементов и позволяет выявлять скрытые резервы в оценке механизма живучести этих систем.

Разработка более совершенных расчетных моделей, апробированных в аналитических подходах, может найти применение в создании расчетных схем анализа численных методов, включая МКЭ. Учет новых знаний в основе механизма процессов, связанных с внезапными отказами критических элементов, способен качественно изменить ситуацию в области расчета конструкций при запроектных воздействиях.

Список литературы

1. Андросова Н.Б., Клюева Н.В., Колчунов В.И. Некоторые предложения к нормированию параметров живучести сооружений // Вестник отделения строительных наук. 2011. № 15. С. 17–25.
2. Еремеев П.Г. Предотвращение лавинообразного (прогрессирующего) обрушения несущих конструкций уникальных большепролетных сооружений при аварийных воздействиях // Строительная механика и расчет сооружений. 2006. № 2. С. 65–72.
3. Травуш В.И., Емельянов С.Г., Колчунов В.И. Безопасность среды жизнедеятельности – смысл и задача строительной науки // Промышленное и гражданское строительство. 2015. №7. С. 20–27.
4. Колчунов В.И., Емельянов С.Г. Вопросы расчетного анализа и защиты крупнопанельных зданий от прогрессирующего обрушения // Жилищное строительство. 2016. № 10. С. 17–20.
5. Dmitriev A.N., Lalin V. Comparison of different procedures for progressive collapse analysis of RC flat slab structures under corner column loss scenario // Buildings. 2021. Vol. 11(9), p. 405.
6. Savin S., Kolchunov V., Fedorova N. Experimental and numerical investigations of RC frame stability failure under a corner column removal scenario // Buildings. 2023, vol. 13(4), p. 908.
7. Nair R.S. Preventing disproportionate collapse // Journal of Performance of Constructed Facilities. 2006. Vol. 20, no. 4, pp. 309–314.
8. Ruth P., Marchand K.A., Williamson E.B. Static equivalency in progressive collapse alternate path analysis: reducing conservatism while retaining structural integrity // Journal of Performance of Constructed Facilities. 2006, vol. 20(4), pp. 349–364.
9. El-Tawil S., Li H. Progressive collapse research: current state and future needs // Advanced Materials Research. 2013. Vol. 639. pp. 3–12.
10. Shan L., Petrone F., Kunath S. Robustness of RC buildings to progressive collapse: influence of building height // Engineering Structures, 2019, vol. 183, pp. 690–701.
11. Fedorova N.V., Savin S.Yu. Progressive collapse resistance of facilities experienced to localized structural damage – an analytical review // Construction and reconstruction. 2021. Vol. 3(95), pp. 76–98.
12. Рекомендации по предотвращению от прогрессирующих обрушения крупнопанельных зданий. М.: МНИИТЭП, 1999. 55 с.

13. СП 385.1325800.2018. Защита зданий и сооружений от прогрессирующего обрушения. М.: Стандартинформ, 2018. 24 с.
14. Бондаренко В.М., Колчунов В.И. Итоги круглого стола «Безопасность зданий и сооружений» // Строительство и реконструкция. 2010. № 3. С. 76–78.
15. ГОСТ 27751-2014. Надежность строительных конструкций и оснований. М.: Стандартинформ, 2015. 16 с.
16. GSA progressive collapse analysis and design guidelines for new federal office buildings and major modernization projects. Washington, 2016. 125 p.
17. UFC 4-023-03. Design of buildings to resist progressive collapse, with change 3. 2016. 245 p.
18. EN 1991-1-7 (2006) (English): Eurocode 1: Actions on structures – Part 1–7: General actions – Accidental actions. The European Union Per Regulation, 2006. 69 p.
19. Adam J.M., Buitrago M., Bertolesi E., Sagaseta J., Moragues J.J. Dynamic performance of a real-scale reinforced concrete building test under a corner-column failure scenario // Engineering Structures. 2020, vol. 210, p.110414.
20. Kong D.-Y., Li S., Yang B., Yang Y., Richard J.Y. Liew experimental and analytical study on progressive collapse of 3D composite floor system under corner column loss // Journal of Structural Engineering. 2022, vol. 148(4), p. 04022012.
21. Fu Q.-L., Tan L., Long B., Kang S.-B. Numerical investigations of progressive collapse behaviour of multi-storey reinforced concrete frames // Buildings. 2023, vol. 13(2), p. 533.
22. Li Y., Lu X.Z., Guan H., Ren P. Numerical investigation of progressive collapse resistance of reinforced concrete frames subject to column removals from different stories // Advances in Structural Engineering. 2016. Vol. 19(2), pp. 314–326.
23. Petrone F., Shan L., Kunnath S.K. Modeling of RC frame buildings for progressive collapse analysis // International Journal of Concrete Structures and Materials. 2016. Vol. 10, no. 1, pp. 1–13.
24. Lu X., Lin K., Li Y., Guan H., Ren P., Zhou. Y. Experimental investigation of RC beam-slab substructures against progressive collapse subject to an edge-column-removal scenario // Engineering Structures. 2017, vol. 149, pp. 91–103.
25. Клаф Р., Пензиен Д.Ж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
26. Потапов А.Н., Созыкина Е.С. Анализ колебаний поврежденного каркаса при импульсных воздействиях: монография. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2024. 162 с.
27. СП 413.1325800.2018. Здания и сооружения, подверженные динамическим воздействиям. М.: Стандартинформ, 2018. 36 с.

References

1. Androsova N.B., Klyueva N.V., Kolchunov V.I. [Some proposals for the standardization of the parameters of the survivability of structures]. *Vestnik otdeleniya stroitel'nykh nauk* [Bulletin of the Department of Building Sciences], 2011, no. 15, pp. 17–25. (in Russ.)
2. Eremeev P.G. [Prevention of avalanche (progressive) collapse of the load-bearing structures of unique long-span structures under emergency effects]. *Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Design of Structures], 2006, no. 2, pp. 65–72. (in Russ.)
3. Travush V.I., Emel'yanov S.G., Kolchunov V.I. [Safety of the living environment – the meaning and task of construction science]. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Construction], 2015, no. 7, pp. 20–27. (in Russ.)
4. Kolchunov V.I., Emel'yanov S.G. [Issues of design analysis and protection of large-panel buildings from progressive collapse]. *Zhilishchnoe stroitel'stvo* [Housing Construction], 2016, no. 10, pp. 17–20. (in Russ.)
5. Dmitriev A.N. Comparison of different procedures for progressive collapse analysis of RC flat slab structures under corner column loss scenario. *Buildings*, 2021, vol. 11(9), p. 405.
6. Savin S., Kolchunov V., Fedorova N. Experimental and numerical investigations of RC frame stability failure under a corner column removal scenario. *Buildings*, 2023, vol. 13(4), p. 908.
7. Nair R.S. Preventing disproportionate collapse. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 2006, vol. 20, no. 4, pp. 309–314.
8. Ruth P., Marchand K.A., Williamson E.B. Static equivalency in progressive collapse alternate path analysis: reducing conservatism while retaining structural integrity. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 2006, vol. 20(4), pp. 349–364.
9. El-Tawil S., Li H. Progressive collapse research: current state and future needs. *Advanced Materials Research*, 2013, vol. 639, pp. 3–12.
10. Shan L., Petrone F., Kunnath S. Robustness of RC buildings to progressive collapse: Influence of building height. *Engineering Structures*, 2019, vol. 183, pp. 690–701.
11. Fedorova N.V., Savin S.Yu. Progressive collapse resistance of facilities experienced to localized structural damage – an analytical review. *Construction and reconstruction*, 2021, vol. 3(95), pp. 76–98.

12. *Rekomendatsii po zashchite zhilykh karkasnykh zdaniy pri chrezvychaynykh situatsiyakh* [Recommendations for the protection of residential frame buildings in emergency situations]. Moscow, Moskomarkhitektura, 2002. 8 p. (in Russ.)
13. SP 385.1325800.2018. *Zashchita zdaniy i sooruzheniy ot progressiruyushchego obrusheniya* [Set of Rules 385.1325800.2018. Protection of buildings and structures from progressive collapse]. Moscow: Standartinform Publ.; 2018. 24 p. (in Russ.)
14. Bondarenko V.M., Kolchunov V.I. [Results of the round table “Safety of buildings and structures”]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya* [Construction and Reconstruction], 2010, no. 3, pp. 76–78. (in Russ.)
15. GOST 27751–2014. *Nadezhnost' stroitel'nykh konstruktsiy i osnovaniy* [GOST 27751–2014. Reliability of building structures and foundations]. Moscow: Standartinform Publ.; 2015. 16 p. (in Russ.)
16. GSA progressive collapse analysis and design guidelines for new federal office buildings and major modernization projects. Washington, 2016. 125 p.
17. UFC 4-023-03. Design of buildings to resist progressive collapse, with change 3. 2016. 245 p.
18. EN 1991-1-7 (2006) (English): Eurocode 1: Actions on structures – Part 1–7: General actions – Accidental actions. The European Union Per Regulation, 2006. 69 p.
19. Adam J.M., Buitrago M., Bertolesi E., Sagaseta J., Moragues J.J. Dynamic performance of a real-scale reinforced concrete building test under a corner-column failure scenario. *Engineering Structures*, 2020, vol. 210, p. 110414.
20. Kong D.-Y., Li S., Yang B., Yang Y., Richard J.Y. Liew experimental and analytical study on progressive collapse of 3D composite floor system under corner column loss. *Journal of Structural Engineering*, 2022, vol. 148(4), p. 04022012.
21. Fu Q.-L., Tan L., Long B., Kang S.-B. Numerical investigations of progressive collapse behaviour of multi-storey reinforced concrete frames. *Buildings*, 2023, vol. 13(2), p. 533.
22. Li Y., Lu X.Z., Guan H., Ren P. Numerical investigation of progressive collapse resistance of reinforced concrete frames subject to column removals from different stories. *Advances in Structural Engineering*, 2016, vol. 19(2), pp. 314–326.
23. Petrone F., Shan L., Kunnath S.K. Modeling of RC frame buildings for progressive collapse analysis. *International Journal of Concrete Structures and Materials*, 2016, vol.10, no. 1, pp. 1–13.
24. Lu X., Lin K., Li Y., Guan H., Ren P., Zhou. Y. Experimental investigation of RC beam-slab substructures against progressive collapse subject to an edge-column-removal scenario. *Engineering Structures*, 2017, vol. 149, pp. 91–103.
25. Klaf R., Penzien D.Zh. *Dinamika sooruzheniy* [Dynamics of structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1979. 320 p. (in Russ.)
26. Potapov A.N., Sozykina E.S. *Analiz kolebaniy povrezhdenogo karkasa pri impul'snykh vozdeystviyah: monografiya* [Analysis of damaged frame oscillations under pulse effects: monograph]. Chelyabinsk, SUSU Publishing Center, 2024. 162 p. (in Russ.)
27. SP 413.1325800.2018. *Zdaniya i sooruzheniya, podverzhennye dinamicheskim vozdeystviyam* [Set of Rules 413.1325800.2018. Buildings and structures exposed to dynamic loads]. Moscow: Standartinform Publ.; 2018. 36 p. (in Russ.)

Информация об авторах:

Потапов Александр Николаевич, доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Строительное производство и теория сооружений», Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия; potapov.alni@gmail.com

Созыкина Екатерина Сергеевна, ведущий инженер, ГК «CRONOR Construction», Челябинск, Россия; ekat-ss@ya.ru

Дудин Дмитрий Евгеньевич, инженер, ООО «УралНИИстром», Челябинск, Россия; wolfandmoon100@yandex.ru

About the authors:

Alexander N. Potapov, Professor of Technical Sciences, Professor of the Department of Construction Production and Theory of Structures, South Ural State University, Chelyabinsk, Russia; potapov.alni@gmail.com

Ekaterina S. Sozikina, Principal Engineer, GC “CRONOR Construction”, Chelyabinsk, Russia; ekat-ss@yandex.ru

Dmitry E. Dudin, Engineer of UralNIIstrom LLC, Chelyabinsk, Russia; wolfandmoon100@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 05.09.2025, принята к публикации 16.09.2025.

The article was submitted 05.09.2025, approved after reviewing 16.09.2025.