

Теория расчета строительных конструкций

УДК 624.04:539.3:534

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С УЧЁТОМ ПРОДОЛЬНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ ЕЁ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ЗАПРОЕКТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев

Показано приложение метода временного анализа к задачам механики стержневых систем с учётом упругопластической работы материала. Приведён пример динамического расчёта плоской 3-стержневой ферменной конструкции на действие импульсной нагрузки.

Ключевые слова: метод, временной анализ, математическая модель, билинейная диаграмма, колебания, перемещения, восстанавливающая сила, упругопластические деформации, гистерезис.

Введение. Одной из актуальных проблем, связанной с расчётами современных конструкций (особенно при динамических воздействиях), является проблема учёта работы материала за пределом упругости. Экспериментальные исследования в этом направлении показывают, что характер работы различных материалов может быть довольно сложным [1]. Несмотря на это, на сегодняшний день разработаны и внедрены в практику вычислительные методы, позволяющие проводить расчёты в такой постановке [2–4].

Однако большинство используемых методов построено на численных подходах. С одной стороны, это делает возможным решение широкого спектра задач, а с другой – остаётся открытым вопрос адекватности результатов расчётов и оценки действительного состояния конструкций.

В связи с этим по-прежнему актуальной является разработка аналитических подходов для решения подобных задач. Наиболее естественным является метод временного анализа, основанный на исследовании характеристического матричного квадратного уравнения [5].

В данной статье рассматривается проблема расчёта систем указанным методом с учётом упругопластической работы материала при действии динамических нагрузок. Приводится пример расчёта статически нагруженной плоской стальной ферменной конструкции при действии импульсной нагрузки и даётся анализ работы системы.

Математическая модель упругопластического расчёта. Физическая модель материала принята по билинейному закону в координатах $\sigma \sim \epsilon$ (рис. 1). В осях «восстанавливающая сила – относительное перемещение» ($R \sim \tilde{y}$), вектор динамических восстанавливающих сил выражается зависимостью (рис. 2):

$$R(t) = R_{ke}(t) + R_u(t_j) - R_p(t_j). \quad (1)$$

Эта формула представляет собой математическую модель расчёта системы при упругопластическом деформировании её несущих элементов.

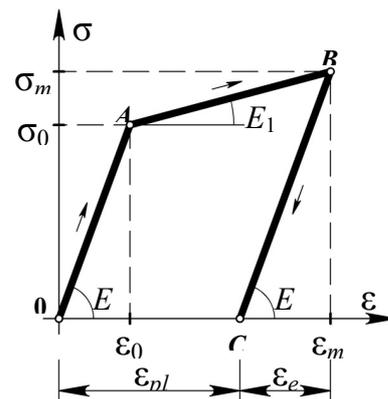


Рис. 1. Диаграмма деформирования материала

Представим характеристику векторных величин правой части выражения (1).

Составляющая $R_{ke}(t) = K(t_j) \cdot Y(t)$ – вектор квазиупругих усилий, где $K(t_j)$ – матрица жёсткости системы в момент t_j (точка A на диаграмме), – время перехода квазиупругой системы из одного промежуточного состояния в другое (начало текучести в некотором несущем элементе). Здесь tga , tga_1 – жёсткость некоторого несущего элемента, соответственно, на участках OA и AB.

Составляющая $R_u(t_j) = \Delta K(t_j) \cdot Y(t_j)$ – есть вектор предельных значений (на рис. 2 приведена k -я компонента этого вектора), где $\Delta K(t_j) = K(t_{j-1}) - K(t_j)$ – разность матриц жёсткости, соответствующих предыдущему (участок OA) и текущему (участок AB) состояниям системы.

Теория расчета строительных конструкций

Составляющая $R_p(t_j) = K(t_j) \cdot Y_p(t_j)$ – суть вектор остаточных усилий. При достижении экстремальных деформаций (в момент времени t_j) в несущем элементе начинается разгрузка (участок BC). В результате этого он приобретает необратимые остаточные напряжения и деформации, что в координатах $R \sim \tilde{y}$ выражается векторами $R_p(t_j)$ и $Y_p(t_j)$, постоянными на интервале $[t_j, t_{j+1}]$, где $Y_p(t_j)$ – вектор пластических перемещений.

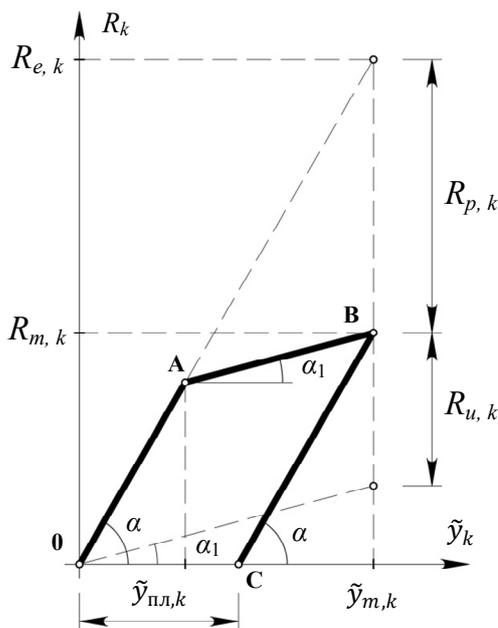


Рис. 2. Составляющие вектора динамических восстанавливающих сил R

Таким образом, описанная математическая модель позволяет разбить процесс временного анализа на ряд квазиупругих интервалов $[t_j, t_{j+1}]$ ($j = 0, 1, \dots$), внутри которых составляющие вектора восстанавливающих сил $R_u(t_j)$ и $R_p(t_j)$ представляют собой постоянные величины. В результате такого моделирования уравнение движения дискретной диссипативной системы на отдельном интервале можно реализовать по схеме упругого решения:

$$\begin{aligned} M\ddot{Y}(t) + CY(t) + K(t_j)Y(t) = \\ = P(t) + Q - R_u(t_j) + R_p(t_j). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как векторные добавки $R_u(t_j)$ и $R_p(t_j)$ представляют собой силовые характеристики, действующие на массы системы, то их внезапное появление или исчезновение, связанное с упругопластическими процессами в материале, будет приводить к изменению ускорений масс, дополнительные значения которых равны $M^{-1} \cdot [R_p(t_j) - R_u(t_j)]$.

Численная реализация задачи. В качестве примера рассмотрена задача колебаний плоской ферменной конструкции как системы с двумя степенями свободы ($n=2$), расчётная динамическая модель (РДМ) которой представлена на рис. 3. Элементы системы имеют квадратные поперечные сечения со сторонами: 1 – 2,6 см, 2 – 1,0 см, 3 – 2,5 см и выполнены из стали 09Г2С с начальным модулем упругости $E = 210060$ МПа. Точечная масса принята $m = 10$ т. Векторы перемещений и узловой статической нагрузки, а также матрица масс имеют вид:

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 \\ mg \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы жёсткости $K(t_j)$ вследствие нелинейности задачи, обусловленной моделью (1), вычисляются в процессе временного анализа с использованием пособия [6]. Матрица демпфирования C строится по модели непропорционального демпфирования [5] и вычисляется в процессе временного анализа совместно с матрицей жёсткости.

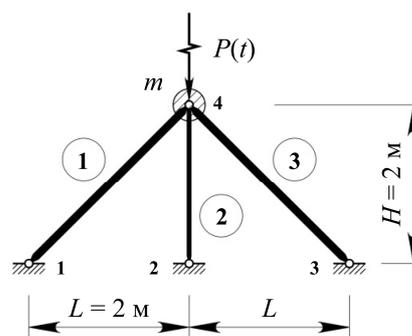


Рис. 3. Расчётная схема конструкции

Внешняя нагрузка представлена в виде синусоидального импульса $P(t) = P_0 \cdot \sin(\theta t)$, где $P_0 = [0, 425]^T$ кН – вектор амплитуд, $\theta = \pi / t_a$; $t_a = 0,01$ с – время действия импульса.

Система разрешающих уравнений динамической задачи (2) на квазиупругом интервале $t \in [t_j, t_{j+1}]$ имеет вид:

$$Y(t) = 2\text{Re} \{Z(t)\}, \quad \dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{\dot{S} \cdot Z(t)\}, \quad (3)$$

где

$$\begin{cases} Z(t) = 0,5Y_{st} + Z_0(t-t_j) + Z^{QR}(t-t_j) + Z^P(t-t_j), \\ Z^{QR}(t-t_j) = [\Phi(t-t_j) - E](US)^{-1}[Q-+], \\ Z_0(t-t_j) = \Phi(t-t_j)U^{-1}M[-Y_0+], \\ Z^P(t-t_j) = \{S[\Phi(t-t_j) \sin(qt_j) - \sin(qt)] + \\ + [\Phi(t-t_j) \cos(qt_j) - \cos(qt)]q\}[U(S^2 + Eq^2)]^{-1}P_0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $Y_{st} = K^{-1}Q$, $\Phi(t) = e^{St}$, $U = MS + S^T M + C$, S – матрица внутренних характеристик конструкции – решение матричного характеристического уравнения, соответствующего системе однородных диф-

ференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2) [5]; Y_0, \dot{Y}_0 – векторы начальных условий.

Временной анализ реакции проводится на интервале времени $t = [0, 5]$ с при шаге интегрирования $\Delta t = 0,0001$ с. При заданных условиях работы нелинейные колебания происходят в наиболее нагруженном 2-м элементе фермы (рис. 3), в то время как остальные стержни работают упруго. Упругопластические процессы во 2-м стержне протекают в течение первых 0,15 секунд и, главным образом, на этапе свободных колебаний, после чего система переходит в режим упругих колебаний с учётом накопленных пластических деформаций.

Нелинейная стадия работы характеризуется тем, что система находится в состоянии циклического упругопластического деформирования. За наступившими пластическими деформациями следует разгрузка, затем этот процесс неоднократно повторяется, что свидетельствует о гистерезисном поведении зависимости $\sigma \sim \epsilon$. На рис. 4 показана первая петля гистерезиса с характерными точками, отделяющими линейные участки друг от друга. Эти же точки, согласно представленной математической модели расчёта (1), находятся в соответствии с временными точками, расчленяющими процесс упругопластической реакции системы на квазиупругие интервалы (см. таблицу).

В упругой стадии (при $t > 0,15$ с) свободные колебания системы совершаются относительно нового положения равновесия, которое отличается от первоначального положения статического равновесия $Y_{st}(t)$ тем, что к последнему добавляются остаточные перемещения – компоненты вектора $Y_p(t)$, накопленные системой в процессе пластического деформирования.

При реализации разрешающих уравнений (3), (4) положения характерных точек диаграммы (рис. 4) (с учётом одинаковой работы материала на растяжение-сжатие) находятся следующим образом. Точка A определяется из условия достижения нормальными напряжениями в среднем стержне предела текучести σ_0 , а положение точки B – из условия достижения в нем экстремальных деформаций. Нахождение точки D связано с использованием принципа Мазинга [1], согласно которому переход к неупругому деформированию во втором полуцикле происходит после упругого деформирования на величину, равную двум пределам текучести. То есть суммарное напряжение (расстояние между точками B и D) не должно превышать $2\sigma_0$. Положение точки E , как и точки B , определяется из условия достижения экстремума деформаций.

Анализ результатов. На рис. 5 показаны осциллограммы перемещений (а), ускорений (б) и восстанавливающих сил (в). Цифры обозначают направление колебаний: 1 – по горизонтали; 2 – по вертикали.

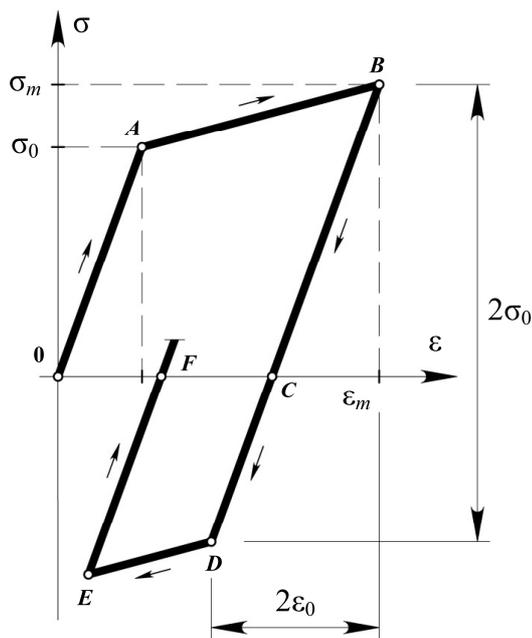


Рис. 4. Диаграмма деформирования 2-го стержня фермы за один полный цикл на интервале времени $t = [0; 0,0874]$

Временные точки переходов системы в новые состояния

Точки диаграммы (рис. 4)	Время t , с
0	0
A	0,0098
B	0,0265
C	0,0455
D	0,0584
E	0,0680
F	0,0874

Осциллограмма вертикальных перемещений массы m (рис. 5, а) представляет собой график без переломов и разрывов. При этом колебания совершаются относительно ненулевой асимптоты, высота которой меняется при переходе от одного квазиупругого интервала к другому. После $t = 0,15$ с высота асимптоты остаётся постоянной и равна $y_{st,2} + y_{p,2} = -0,2038$ см, где $y_{st,2} = -0,167$ см – статический прогиб в начальный момент времени, $y_{p,2} = -0,0368$ см – вертикальная компонента вектора остаточных перемещений. Для колебаний массы в горизонтальном направлении характерны те же эффекты, что и для вертикальных колебаний, но они выражены значительно слабее.

В отличие от графиков перемещений осциллограммы ускорений (рис. 5, б) не имеют смещения относительно положения статического равновесия системы. На фрагментах графика ускорений масс в

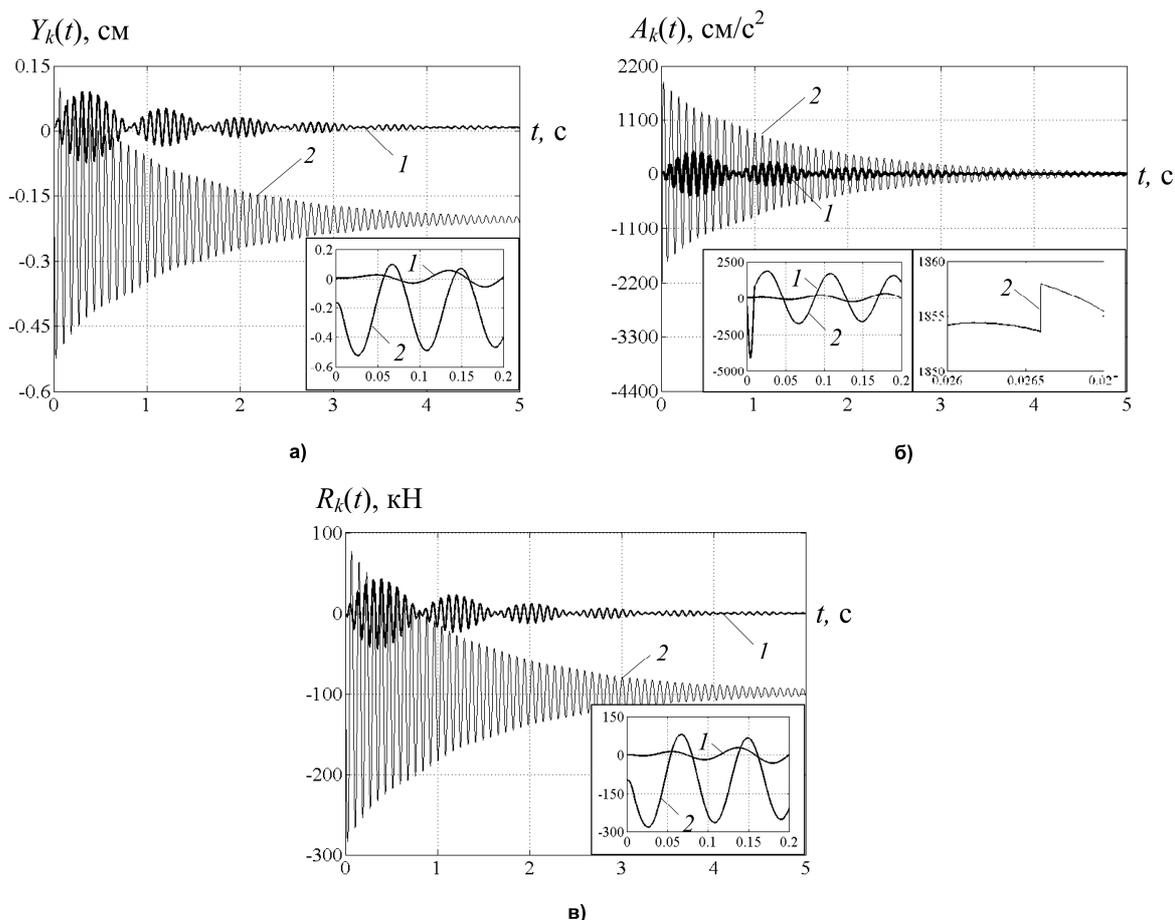


Рис. 5. Параметры реакции системы (1 – по горизонтали, 2 – по вертикали):
а – перемещения; б – ускорения; в – восстанавливающие силы

вертикальном направлении можно видеть перелом, связанный с окончанием действия импульсной нагрузки при $t = 0,01$ с (фрагм. 1), и один из скачков (фрагм. 2). Скачки образуются в результате внезапного изменения жёсткости системы.

Осциллограммы восстанавливающих сил $R(t)$ (рис. 5, в), как и осциллограммы перемещений, являются непрерывными. Компоненты восстанавливающих сил в горизонтальном направлении имеют нулевую асимптоту, в вертикальном направлении – асимптоту, соответствующую значению статического усилия от собственного веса конструкции Q .

Характер свободных колебаний всех параметров реакции – затухающий. При этом осциллограммы, соответствующие горизонтальным параметрам, имеют форму «биения», период которого составляет:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{2\pi}{76,69 - 69,3} = 0,82 \text{ с,}$$

где ω_1, ω_2 – частоты собственных колебаний конструкции.

На рис. 6 показан график действующих вертикальных сил правой части уравнения (2). Пунк-

тирной линией (а) изображена составляющая нагрузки правой части, включающая внешнюю нагрузку: импульсную $P(t)$ и статическую (собственный вес Q). Сплошной линией (б) изображена полная нагрузка, включающая, помимо внешней, добавки к восстанавливающим силам $R_u(t_j)$ и $R_p(t_j)$:

$$\Sigma P_i(t) = P(t) + Q - R_u(t_j) + R_p(t_j).$$

Данная нагрузка имеет ступенчатый характер, который связан с внезапным появлением или исчезновением составляющих $R_u(t_j)$ и $R_p(t_j)$, что обусловлено принятой математической моделью упругопластического расчёта (1).

Выводы

1. Временной анализ позволяет получить точное решение задачи в аналитическом виде.

2. В замкнутой форме построены кинематические и силовые параметры реакции системы для динамической задачи с билинейной диаграммой деформирования гистерезисного типа.

3. Определены и изучены особенности поведения параметров реакции динамической системы: асимптоты, переломы, скачки и т. д.

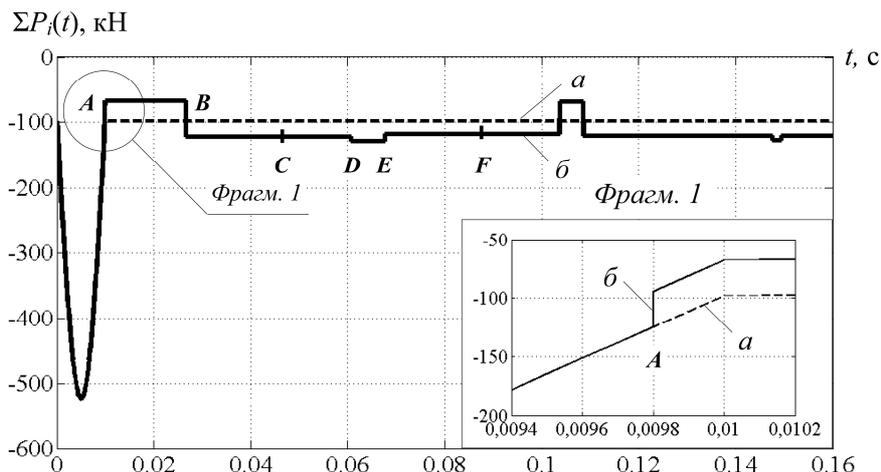


Рис. 6. Вертикальные силы правой части уравнения (2): а – составляющая импульсной и статической нагрузок; б – полная нагрузка

Литература

1. Москвитин, В.В. Пластичность при переменных нагружениях / В.В. Москвитин. – М.: Изд-во МГУ, 1965 – 264 с.
2. Трушин, С.И. Метод конечных элементов. Теория и задачи: учеб. пособие / С.И. Трушин. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2008. – 256 с.
3. Расчёты зданий на устойчивость против прогрессирующего обрушения с учётом физической и геометрической нелинейностей / А.М. Белоостоцкий, А.А. Аул, О.А. Козырев, А.С. Павлов // Междунар. науч.-практ. конф. «Теория и практика расчёта зданий, конструкций и элементов кон-

- струкций. Аналитические и численные методы»: сб. тр. – М.: Изд-во МГСУ, 2008. – С. 183–193.
4. Агапов, В.М. Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций / В.М. Агапов. – М.: АСВ, 2004. – 248 с.
5. Потапов, А.Н. Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях: моногр. / А.Н. Потапов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.
6. Сеницын, С.Б. Строительная механика в методе конечных элементов стержневых систем: учеб. пособие / С.Б. Сеницын. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2002. – 320 с.

Потапов Александр Николаевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), potapov.alni@gmail.com.

Уфимцев Евгений Михайлович, ассистент кафедры «Строительная механика», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), comtech606@yandex.ru.

Поступила в редакцию 6 февраля 2014 г.

**Bulletin of the South Ural State University
Series “Construction Engineering and Architecture”
2014, vol. 14, no. 2, pp. 5–10**

**ELASTOPLASTIC OSCILLATIONS OF BAR SYSTEM
TAKING INTO ACCOUNT LONGITUDINAL MALLEABILITY
OF ITS ELEMENTS UNDER THE INFLUENCE BEYOND DESIGN**

A.N. Potapov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, potapov.alni@gmail.com,
E.M. Ufimtsev, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, comtech606@yandex.ru

The application of time analysis to the problems of bar systems mechanics in the context of elastoplastic behavior of the material was shown. An example of dynamic design of a plane three-core truss structure by impulse load was given.

Keywords: method, time analysis, mathematical model, bilinear.

References

1. Moskvitin V.V. *Plastichnost pri peremennykh nagrujeniyah* [Plasticity by Alternating Loading]. Moscow, MSU Publ., 1965. 264 p.
2. Trushin S.I. *Metod konechnykh elementov* [Finite Element Method. Theory and Problems]. Moscow, BIA Publ., 2008. 256 p.
3. Belostotsky A.M., Aul A.A., Kozyrev O.A., Pavlov O.A. *Raschety zdaniy na ustoichivost protiv progressivnogo obrusheniya s uchetom fizicheskoy i geometricheskoy nelineynostey: Mejdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferenciya "Teoriya i praktika rascheta zdaniy, konstrukciy i elementov konstrukciy. Analiticheskie i chislennye metody"* [Calculations of Buildings for Buckling Resistance Against the Progressive Damage with a Glance of Physical and Geometric Nonlinearity: International Theoretical and Practical Conference "Theory and Practice of Buildings and Constructions Calculations. Analytical and Numerical Methods"]. Moscow, MSBU Publ., 2008, p. 183-193.
4. Agapov V.M. *Metod konechnykh elementov v statike, dinamike i ustoychivosti konstrukciy* [Finite Element Method in Static, Dynamic and Stability of Constructions]. Moscow, BIA Publ., 2004. 248 p.
5. Potapov A.N. *Dinamicheskii analiz diskretnykh dissipativnykh sistem pri nestacionarnykh vozdeistviyakh* [Dynamical Analysis of Discrete Dissipative Systems by Nonstationary Loadings]. Chelyabinsk, SUSU Publ., 2003. 167 p.
6. Sinicyn S.B. *Stroitel'naya mekhanika v metode konechnykh elementov* [Building Mechanics in Finite Elements Method of Bar Systems]. Moscow, BIA Publ., 2002. 320 p.

Received 6 February 2014