

Теория расчета строительных конструкций

УДК 624.048

СПОСОБ ФОРМИРОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФИЗИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЙ В ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ РАСЧЕТА МНОГОФАЗНЫХ СТЕРЖНЕЙ

А.В. Мищенко

Предложен алгоритмичный способ формирования физических соотношений для составных многофазных стержней, основанный на аппроксимации диаграмм деформирования фазовых материалов целыми рациональными полиномами произвольной степени. Применены жесткостные характеристики высших порядков.

Ключевые слова: многофазный стержень, армированный стержень, слоистая структура, физическая нелинейность, жесткостные характеристики высших порядков, предельные состояния.

Рассматриваются стержни, составленные из квазиоднородных частей (фаз) произвольной геометрической формы. При условии рационального проектирования подобные структуры позволяют создавать весьма эффективные несущие конструкции, адаптированные к возникающему в них напряженно-деформированному состоянию, обладающими повышенной несущей способностью, жесткостью, трещиностойкостью при одновременном снижении расхода материалов [1]. Номенклатура используемых в них материалов может включать металлы, бетоны, конструкционные пластмассы, древесину, искусственные дисперсные композиты и т.п.

1. В системе координат xuz многофазный стержень (МФС) обладает свойствами симметрии относительно плоскости xu , в которой стержень испытывает прямой продольно-поперечный изгиб, продольная ось совмещена с осью x . Будем считать, что в стержне: обеспечены условия идеального межфазного контакта при отсутствии разрывов в деформациях на границах фаз; материал каждой фазы представляет собой сплошную, однородную, изотропную нелинейно упругую среду со значениями физических характеристик одинакового порядка; длина и характерный поперечный размер стержня удовлетворяют условию $l \geq (5 \div 6)h$.

В зависимости от геометрических параметров фаз может быть выделен ряд частных типов структур МФС (рис. 1): поперечно- и продольно-слоистая, полярно- и радиально-слоистая, поперечно-продольно-слоистые структуры. Отличаются они формами межфазных поверхностей и направлением реализации неоднородности. Так, для схем «б», «в», «г», «д» такими направлениями соответственно являются: ось y , луч cm , радиус r , ось x .

Примем вариант кинематических соотношений и условий равновесия в форме

$$\begin{aligned} \varepsilon_x + 1 &\approx 1, \quad \sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1, \\ \varepsilon_x(x, y) &= \varepsilon_0 - \kappa \cdot y, \quad \varepsilon_y(x, y) = 0, \\ \gamma_{yx}(x, y) &= -\gamma_0(x) = v' - \theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\varepsilon_0(x) = u', \quad \kappa(x) = \theta', \quad (2)$$

$$N' + (Q\theta)' = -q_x, \quad Q' - (N\theta)' = q_y, \quad (3)$$

$$M' = Q + m_z.$$

Здесь $(\prime) = \partial(\prime) / \partial x$, γ_{yx} , ε_x , ε_y – сдвиг, продольная и поперечная деформация; u , v – продольное и поперечное перемещение точек отсчетной оси x ; θ – угол поворота поперечного сечения;

$$[N, Q, M](x) = \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} [\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}, -\sigma_x^{(k)} y] dA \quad (4)$$

продольная и поперечная силы, изгибающий момент.

Основой расчетной модели МФС является способ представления физических соотношений (определяющих соотношений). Из трех компонент тензора напряжения в данной задаче при учете принятых допущений основной компонентой будем считать σ_x , а τ_{yx} , σ_y – второстепенными [2].

Последней из них в данной задаче будем пренебрегать. Для основной компоненты будут выполнены все группы соотношений, а для второстепенных – все, кроме физических, что является результатом введения в расчетную модель гипотез (1).

Компоненту $\sigma_x^{(k)}$ тензора напряжений для материала k -й фазы представим в виде суммы

$$\sigma_x^{(k)}(\varepsilon) = \sum_{i=0}^r p_{k,i} \sigma_{k,i} f_{\varepsilon,i}(\varepsilon), \quad (5)$$

где $f_{\varepsilon,i}$ ($i = 0, 1, \dots, r$) – набор гладких базисных функций, определенных либо на всей области допустимых деформаций, либо на непересекающихся ее подобластях, что дает возможность описывать особенности законов деформирования в виде

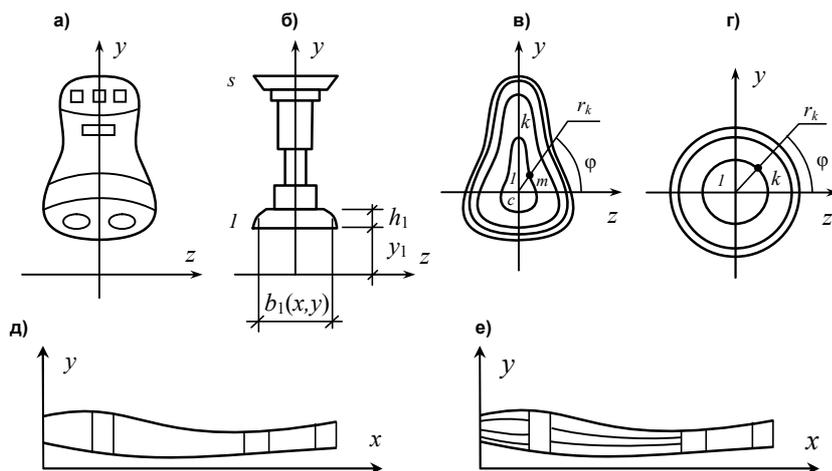


Рис. 1. Структуры многофазных стержней: общего вида (а), поперечно-слоистая (б), полярно-слоистая (в), радиально-слоистая (г), продольно-слоистая (д), продольно-поперечно-слоистая (е)

разрывов функции напряжения и ее производных; $p_{k,i}^\sigma = [p_{k,i}^{\sigma+}, p_{k,i}^{\sigma-}]$ – числовые параметры i -й аппроксимации для областей растяжения и сжатия в k -м материале.

В данной статье рассмотрим способ построения физических соотношений, основанный на использовании в качестве базисных функций степеней с натуральными показателями [3]

$$f_{\varepsilon,i}(\varepsilon) = \varepsilon^i, \quad (i = 0, 1, \dots, r). \quad (6)$$

В отличие от множества других вариантов представления законов деформирования способ (5), (6) отличается: наличием физического смысла и совпадением с классическими методами в случае применения первых двух членов ряда (6), дающих модели жестко-пластического и линейно-упругого деформирования [4]; возможностью последовательного уточнения при увеличении членов разложения [5].

Подставив (5), (6), (1) в первые два выражения (4), получим

$$\sum_{i=0}^r B_{Ni}(\varepsilon_0, \kappa) = N, \quad \sum_{i=0}^r B_{Mi}(\varepsilon_0, \kappa) = M. \quad (7)$$

Здесь B_{Ni} , B_{Mi} – полные алгебраические полиномы i -й степени обобщенных деформаций ε_0 , κ :

$$B_{Ni} = \sum_{j=0}^i c_{ij} D_{ij} \varepsilon_0^{i-j} \kappa^j, \quad (8)$$

$$B_{Mi} = -\sum_{j=0}^i c_{ij} D_{i,j+1} \varepsilon_0^{i-j} \kappa^j,$$

записанные с использованием жесткостных характеристик D_{ij} многофазного сечения из нелинейно-упругих материалов i -го физического и j -го геометрического порядков

$$D_{ij}(x) = \sum_{k=1}^s p_{k,i}^\sigma \iint_{A_k} y^j dA = \sum_{k=1}^s D_{ij}^{(k)}, \quad (9)$$

c_{ij} ($j = 0, \dots, i$) – коэффициенты биномов

Ньютона i -й степени $(\varepsilon_0 - \kappa)^i$. Вычисляя жесткости (9), следует использовать параметры материалов $p_{k,i}^\sigma = [p_{k,i}^{\sigma+}, p_{k,i}^{\sigma-}]$, соответствующие знакам деформации.

Для степеней $i = 0, 1, 2, 3$ левые части уравнений (7) принимают вид

$$\begin{cases} B_{N1} = D_{10}\varepsilon_0 - D_{11}\kappa, \\ B_{M1} = -D_{11}\varepsilon_0 + D_{12}\kappa, \\ B_{N2} = D_{20}\varepsilon_0^2 - 2D_{21}\varepsilon_0\kappa + D_{22}\kappa^2, \\ B_{M2} = -D_{21}\varepsilon_0^2 + 2D_{22}\varepsilon_0\kappa - D_{23}\kappa^2, \\ B_{N0} = D_{00}, \\ B_{M0} = -D_{01}, \\ B_{N3} = D_{30}\varepsilon_0^3 - 3D_{31}\varepsilon_0^2\kappa + 3D_{32}\varepsilon_0\kappa^2 - D_{33}\kappa^3, \\ B_{M3} = -D_{31}\varepsilon_0^3 + 3D_{32}\varepsilon_0^2\kappa - 3D_{33}\varepsilon_0\kappa^2 + D_{34}\kappa^3. \end{cases}$$

Для конкретных неоднородных структур в зависимости от свойств фазовых материалов могут применяться различные (необязательно последовательные) наборы блоков (8). Физическое соотношение для сдвигов может быть представлено в виде $\gamma_0 D_Q = Q$ с использованием сдвиговой жесткости многофазного сечения D_Q .

2. Рассмотрим постановки обратных задач на основе соотношений (8).

Для замыкания краевой задачи (2), (3), (7) при соответствующих граничных условиях используем ограничение деформации

$$|\varepsilon_x(x, y)| \leq \varepsilon_{x,adm}^{(k)} = \varepsilon_{x,u}^{(k)} / k_u^\varepsilon, \quad (k = 1, \dots, s), \quad (10)$$

где $\varepsilon_{x,adm}^{(k)\pm}$ – допустимый уровень деформации при растяжении и сжатии при оценке предельных состояний материала k -й фазы; $k_u^\varepsilon > 1$ – коэффици-

Теория расчета строительных конструкций

ент запаса по отношению к уровню предельной деформации $\varepsilon_{x,u}^{(k)}$.

Способ записи расчетного критерия через деформации обладает определенными преимуществами по отношению к способу записи через напряжения. Среди них: линейность критерия относительно величин обобщенных деформаций; отсутствие необходимости использования физических соотношений при формулировке левой части критерия. Применение же в расчетном критерии разрывных нелинейных функций напряжений существенно усложняет анализ возникающих предельных состояний.

В правой части критерия (10) могут использоваться предельные деформации (как таковые), превышение которых недопустимо по тем или иным соображениям. Кроме того, предельные деформации могут определяться на основе специальных зависимостей, описывающих некоторые физические предельные состояния. Например, предельный уровень деформации, вводимой по условию прочности, потребует формулировки обобщенного эквивалентного напряжения $\sigma_{eqv}^{(k)} = \Psi(\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}) \leq \sigma_s^{(k)}$ согласно принятой теории прочности и, как следствие, – возникновение зависимости правой части (10) от различных компонент тензора напряжения [4]. Таким образом, несмотря на принятую для удобства квазиодноосную форму записи, критерий (10) отражает и сложные напряженные состояния.

В обратных задачах рационального проектирования, связанных с поиском эффективной структуры стержня, потребуем реализации условия (10) в форме строгого равенства в максимально возможном числе точек пространства X, Y , занятого стержнем. В s -фазном стержне условие предельного состояния сформулируем в виде *непрерывно-дискретного многоточечного расчетного критерия* (НДРК) на основе следующего определения.

Предельное состояние на участке многофазного стержня, занимающего пространство X, Y , при нелинейно-упругом деформировании реализуется в том случае, если условие (10) выполняется в форме строгого равенства

$$|\varepsilon_0(x) - \kappa(x)y| = \varepsilon_{adm}^{(k)\pm} \quad (11)$$

непрерывно по продольной координате $x \in X_* \in X$ в дискретном числе уровней n_y по поперечной координате $y = \xi_1, \dots, \xi_{n_y} = Y_* \in Y$. Для всех иных точек $x \in X_*, y \notin Y_*$ условие (10) реализуется в форме неравенства.

Кратность критерия n_y , в зависимости от условий задачи, принимает значения от 0 до $s+1$. В общем случае удовлетворение указанных равенств кроме варьирования геометрических функций требует и изменения физической структуры стержня. Для стержней с фиксированной структурой максимальная кратность .. равна двум.

В поперечно-слоистых структурах выявление серии точек ξ_1, \dots, ξ_{n_y} удобно выполнять с использованием полигона предельных деформаций $\varepsilon_{adm}^{(k)\pm}(y)$. На рис. 2 показано предельное состояние для двухточечного НДРК при осуществлении внутреннего касания эпилорой деформаций $\varepsilon_*(y)$ полигона допустимых деформаций в двух точках. Это позволяет сразу определить расчетную деформацию и кривизну

$$\varepsilon_{0*} = \frac{\pm \varepsilon_{adm}^{(k_1)\pm} \xi_2 \mp \varepsilon_{adm}^{(k_2)\pm} \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}, \quad (12)$$

$$\kappa_*(x) = \frac{\pm \varepsilon_{adm}^{(k_1)\pm} \mp \varepsilon_{adm}^{(k_2)\mp}}{\xi_2 - \xi_1}$$

для дальнейшего использования при решении краевой задачи (2), (3), (7). Здесь при растяжении берутся верхние, а при сжатии – нижние знаки.

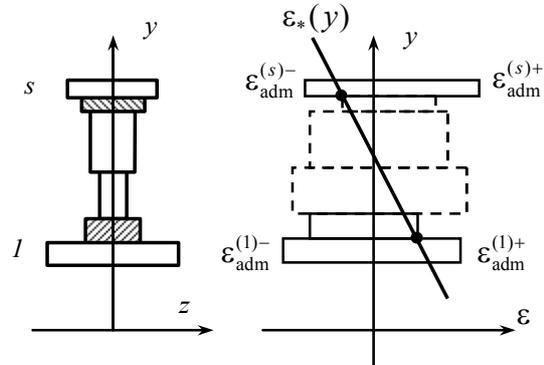


Рис. 2. Геометрическая интерпретация расчетного критерия (11) для поперечно-слоистой структуры при $n_y = 2$

В сечении многофазной структуры может существовать несколько допустимых вариантов расчетных полей деформаций, отличающихся координатами точек касания допустимого полигона линией $\varepsilon_*(y)$. Для выбора наиболее рационального варианта может использоваться оценка

$$K_\varepsilon = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \frac{1}{A_k \varepsilon_{adm}^{(k)\pm}} (\varepsilon_0 A_k - \kappa S_k) \rightarrow \max, \quad (13)$$

основанная на суммарной интегральной величине $0 \leq K_\varepsilon \leq 1$ относительного уровня деформации. Применение (13) дает возможность: а) для заданных неоднородных структур осуществить отбор наилучших деформированных состояний $\varepsilon_*(y)$; б) осуществить отбор физических структур, наиболее эффективных для деформированных состояний определенных типов. Для структур с прямоугольными сечениями слоев выражение (13) принимает вид

$$K_\varepsilon = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s \frac{1}{\varepsilon_{adm}^{(k)\pm}} \left(\varepsilon_0 - \kappa \frac{y_{k+1}^2 - y_k^2}{2h_k} \right) \rightarrow \max.$$

Жесткостные характеристики записываются для конкретной структуры при помощи выражений (9). Например, для структуры, показанной на рис. 2, получим выражения

$$D_{ij}(x) = \sum_{k=1}^s p_{k,i}^{\sigma} b_k(y_{k+1}^{j+1} - y_k^{j+1}) / (j+1), \quad (14)$$

которые позволяют организовать численную или аналитическую процедуру нахождения ширины $b_{k_1}(x)$, $b_{k_2}(x)$ или толщины $h_{k_1}(x)$, $h_{k_2}(x)$ расчетных (варьируемых) слоев.

Рассмотрим стержень, армированный продольными волокнами (рис. 3). Выделим в нем две фазы: арматуру ($k = 1$), деформирующуюся линейно $\sigma_x^{(1)} = E_a \varepsilon$, и связующее ($k = 2$) при квадратичном законе деформирования $\sigma_x^{(2)+} = p_{2,0}^{\sigma+} + p_{2,1}^{\sigma+} \varepsilon + p_{2,2}^{\sigma+} \varepsilon^2$, $\sigma_x^{(2)-} = p_{2,0}^{\sigma-} + p_{2,1}^{\sigma-} \varepsilon + p_{2,2}^{\sigma-} \varepsilon^2$. Систему уравнений (7) сформируем из блоков (8) 0, 1 и 2 степени

$$\begin{cases} +D_{00} + D_{10}\varepsilon_0 - D_{11}\kappa + D_{20}\varepsilon_0^2 - 2D_{21}\varepsilon_0\kappa + D_{22}\kappa^2 = N, \\ -D_{01} - D_{11}\varepsilon_0 + D_{12}\kappa - D_{21}\varepsilon_0^2 + 2D_{22}\varepsilon_0\kappa - D_{23}\kappa^2 = M. \end{cases} \quad (15)$$

Жесткостные характеристики (9) примут вид

$$\begin{aligned} D_{00}(x) &= p_{2,0}^{\sigma+} A_2^+ + p_{2,0}^{\sigma-} A_2^-, \\ D_{01}(x) &= p_{2,1}^{\sigma+} S_2^+ + p_{2,1}^{\sigma-} S_2^-, \\ D_{10}(x) &= E_a A_1 + p_{2,1}^{\sigma+} A_2^+ + p_{2,1}^{\sigma-} A_2^-, \\ D_{11}(x) &= E_a A_1 y_a + p_{2,1}^{\sigma+} S_2^+ + p_{2,1}^{\sigma-} S_2^-, \\ D_{12}(x) &= E_a A_1 y_a^2 + p_{2,1}^{\sigma+} I_2^+ + p_{2,1}^{\sigma-} I_2^-, \\ D_{20}(x) &= p_{2,2}^{\sigma+} A_2^+ + p_{2,2}^{\sigma-} A_2^-, \\ D_{21}(x) &= p_{2,2}^{\sigma+} S_2^+ + p_{2,2}^{\sigma-} S_2^-, \\ D_{22}(x) &= p_{2,2}^{\sigma+} I_2^+ + p_{2,2}^{\sigma-} I_2^-, \\ D_{23}(x) &= p_{2,2}^{\sigma+} J_2^+ + p_{2,2}^{\sigma-} J_2^-, \end{aligned}$$

где $A_1 = A_a n$ – площадь сечения n армирующих элементов; A_2^{\pm} , S_2^{\pm} , I_2^{\pm} , J_2^{\pm} – геометрические характеристики областей растяжения и сжатия вто-

рой фазы – обобщенные моменты инерции соответственно 0, 1, 2 и 3-го порядков, в соответствии с (9) при $\kappa > 0$ заданные выражениями

$$\begin{aligned} [A_2^+, S_2^+, I_2^+, J_2^+](x) &= \int_{y_1(x)}^{y_0(x)} b_2(x) [1, y, y^2, y^3] dy, \\ [A_2^-, S_2^-, I_2^-, J_2^-](x) &= \int_{y_0(x)}^{y_2(x)} b_2(x) [1, y, y^2, y^3] dy. \end{aligned}$$

Для сформированной системы (15) расчетные деформация и кривизна устанавливаются по выражениям типа (12) при анализе полигона предельных деформаций двухфазного сечения. В результате их нахождения из двух уравнений (15) могут быть найдены геометрические параметры, например, A_1 и b_2 или A_1 и $h_2 = y_2 - y_1$.

Из рассмотренной постановки (15) как частный случай, вытекает методика проектирования железобетонного сечения при следующих расчетных предпосылках: замена диаграммы деформирования бетона «нулевой» аппроксимацией (6) $\sigma_x^{(2)-} = p_{2,0}^{\sigma-} = -\sigma_0^-$; пренебрежение сопротивлением растянутого бетона $\sigma_x^{(2)+} = 0$. В таком случае вышерассмотренные уравнения принимают вид

$$\begin{cases} -\sigma_0^-(y_2 - y_0)b_2 + E_a A_1 (\varepsilon_{0*} - y_a \kappa_*) = N, \\ 0,5\sigma_0^-(y_2^2 - y_0^2)b_2 + E_a A_1 y_a (\varepsilon_{0*} - y_a \kappa_*) = M, \\ y_0 = \varepsilon_* / \kappa_*, \end{cases}$$

$$\varepsilon_{0*} = \frac{\varepsilon_a y_2 - \varepsilon_b y_a}{y_2 - y_a}, \quad \kappa_*(x) = \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_b}{y_2 - y_a},$$

где ε_a , ε_b^- – допустимые деформации арматуры и бетона. Из них легко находится площадь арматуры A_1 и ширина прямоугольного сечения b_2 .

Изложенный способ формирования физических зависимостей нелинейно деформируемых многофазных стержней на основе аппроксимации нормального напряжения степенным рядом позволяет алгоритмизировать запись физических соот-

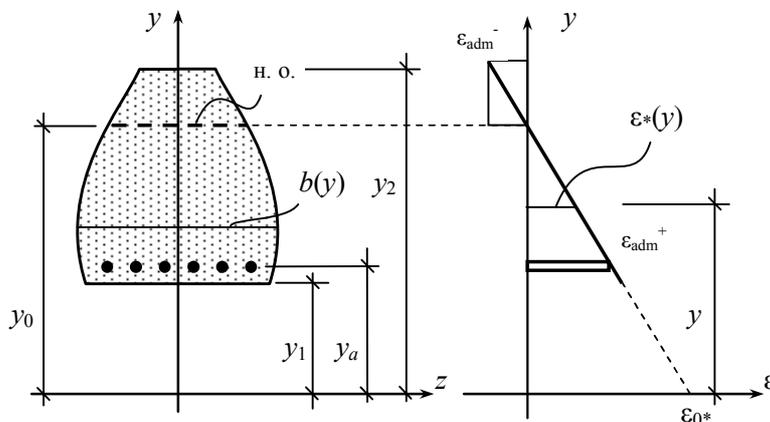


Рис. 3. Расчетные и предельные деформации в сечении армированного стержня

ношений для интегральных силовых факторов с применением жесткостных характеристик сечений высших порядков; обоснованно, в соответствии с реальными свойствами используемых конструктивных материалов, формировать блочную структуру систем уравнений при построении алгоритмов решения обратных задач.

Литература

1. Немировский, Ю.В. Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем / Ю.В. Немировский, А.В. Мищенко, И.Т. Вохмянин. – Новосибирск: НГАСУ, 2004. – 488 с.
2. Васильев, В.В. Механика конструкций из композитных материалов / В.В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

3. Мищенко, А.В. Прямая и обратная задачи деформирования слоистых стержней с учетом физической нелинейности / А.В. Мищенко // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: труды XIX Всероссийской конференции, Бийск, 28–31 августа 2005 г. – Новосибирск: Параллель, 2005. – С. 184–188.

4. Мищенко, А.В. Напряжения в слоистых стержнях переменного сечения / А.В. Мищенко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13. – № 4. – С. 537–547.

5. Мищенко, А.В. Расчет и проектирование деревянных стержневых систем с учетом физической нелинейности / А.В. Мищенко, Ю.В. Немировский // Строительная механика и расчет сооружений. – 2007. – № 6. – С. 46–52.

Мищенко Андрей Викторович, кандидат технических наук, доцент кафедры строительной механики, Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет (Сибстрин), mavr@hnet.ru

Поступила в редакцию 14 января 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Construction Engineering and Architecture"
2014, vol. 14, no. 2, pp. 12–16

METHOD OF FORMING NON-LINEAR PHYSICAL EQUATIONS IN THE DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF MULTIPHASE RODS ANALYSIS

A.V. Mishchenko, Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin), Novosibirsk, Russian Federation, mavr@hnet.ru.

The algorithmic method of forming non-linear physical equations for multiphase rods analysis is suggested. The method is based on the approximation of the diagrams of phase materials deformation by integer rational polynomial in arbitrary degree. The higher order rigidity characteristics are used.

Keywords: multiphase rod, armature rod, layered structure, physical non-linearity, higher order rigidity characteristics, limiting states.

References

1. Nemirovsky Yu.V., Mishchenko A.V., Vokhmianin I.T. *Ratsional'noe i optimal'noe proektirovanie sloistyykh stержnevyykh sistem* [Rational and Optimal Design of Layered Rod Structures]. Novosibirsk, NSACEU Publ., 2004. 488 p.
2. Vasiliev V.V. *Mekhanika konstruksiy iz kompozitnykh materialov* [Mechanics of the Composite Material Structures]. Moscow, Machinery construction Publ., 1988. 272 p.
3. Mishchenko A.V. [Direct and Inverse Problem of Deformation of Layered Rods with the Regard for Physical Nonlinear]. *Chislennye metody reshenia zadach teorii uprugosti i plastichnosti: Trudy 19 Vserossiiskoy konferencii* [Numerical Methods Solution of Elasticity and Plasticity Theory Problems: Transactions of XIX All-Russian Conference]. Novosibirsk, Parallel Publ., 2005, pp. 184–188 (in Russ.).
4. Mishchenko A.V., Nemirovsky Yu.V. [Analysis and Rational Designing of Wood Rod Systems with the Regard for Physical Nonlinear]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Building], 2007, no. 6, pp. 46–52 (in Russ.).
5. Mishchenko A.V. [Stresses on the layered rods of variable cross sections]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii* [Composite Mechanics and Design], 2007, vol. 13, no. 4, pp. 537–547 (in Russ.).

Received 14 January 2014