

Научно-методический раздел

УДК 514.181.24+692.445

ПРИМЕНЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ ГЛАДКИХ КАРКАСНО-СЕТЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В.А. Короткий, Е.А. Усманова

Предложен графоаналитический алгоритм конструирования гладкой оболочки, опирающейся на плоский четырехугольный контур, каркас которой образован дугами кривых второго порядка.

Ключевые слова: гладкая оболочка, эллиптический купол, плавное сопряжение, кривая второго порядка.

В практике архитектурного проектирования большое значение имеют способы конструирования поверхностей с использованием кривых второго порядка в качестве основных формообразующих элементов [1].

Постановка задачи. Сконструировать гладкую (всюду дифференцируемую) поверхность, опирающуюся на плоский четырехугольный контур и касающуюся боковых граней пирамиды или призмы, построенной на этом контуре как на основании. Иначе говоря, требуется сконструировать поверхность (оболочку), вписанную в данную четырехугольную пирамиду или призму, и касающуюся ее граней вдоль линий заранее заданного плоского сечения.

Предварительно рассмотрим вспомогательную поверхность «прямой клин», образованную движением прямолинейной образующей по направляющим l_0 и g_0 с плоскостью параллелизма zy , и докажем, что если g_0 – эллипс, то сечение прямого клина плоскостью, параллельной плоскости эллипса g_0 , также будет эллипсом (рис. 1).

Отметим точки l_0 и 2_0 на пересечении произвольной горизонтальной плоскости $z=h$ с образующими A_0M_0 и B_0N_0 . Из рассмотрения двух пар треугольников AKA_0 , $1Hl_0$ и AA_0M_0 , BB_0N_0 следует, что $AA_0:AA'=BB_0:BB'$, то есть ряд точек A' , B' ,... образует эллипс g' , полученный ортогональным сжатием направляющего эллипса g_0 к плоскости xz . Так как $1l_0=AA'$ и $2l_0=BB'$, то ряд точек l_0 , 2_0 ,..., полученных в сечении клина горизонтальной плоскостью, образует эллипс g , конгруэнтный «сжато» эллипсу g' , ч.т.д.

Пусть требуется сконструировать гладкую оболочку на прямоугольном фундаменте $TUVW$, проходящую через коньковую линию – полуэллипс g_0 (полуэллипс – дуга эллипса, ограниченная противоположащими вершинами). Поверхность формируется при параллельном перемещении образующей линии e по направляющей g_0 . Кривая e ,

скользя по g_0 , изменяет свою форму от полуэллипса e_0 до прямой TW или UV (рис. 2).

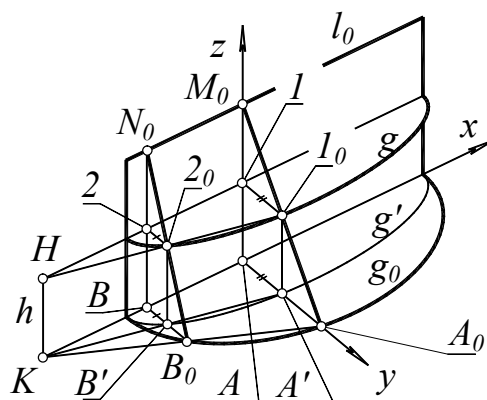


Рис. 1. Прямой клин

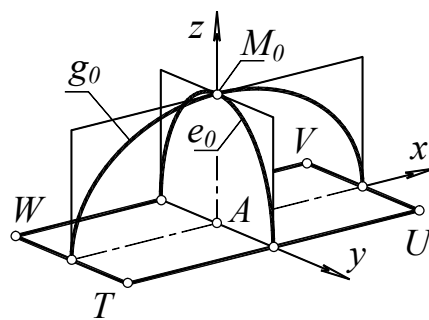


Рис. 2. Коньковые линии купола

Поверхность содержит два семейства образующих. Первое семейство состоит из множества полуэллипсов $e||zy$, опирающихся на стороны TU и UV фундамента. Чтобы найти образующие второго семейства, рассмотрим сечение поверхности произвольной плоскостью, параллельной zx . Покажем, что такая плоскость пересекает сетку кривых e в точках $1, 2, \dots$, лежащих на эллипсе k

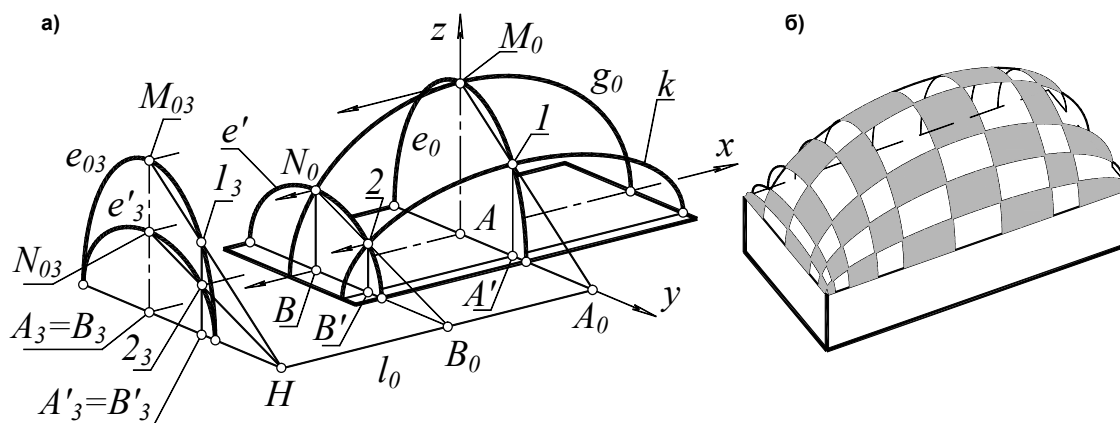


Рис. 3. Купол на прямоугольном фундаменте:
а – схема построения, б – аксонометрия

(рис. 3, а). Действительно, проекции $e_{03}, e'_{33}, \dots$ кривых e_0, e' на плоскость, параллельную zu , образуют пучок конических сечений с двумя парами совпавших базисных точек. В этом пучке произвольная коника e'_{33} находится в ортогонально-перспективном родстве с проекцией e_{03} конькового эллипса e_0 , поэтому соответственные прямые $M_{03}-l_{33}, N_{03}-2_{33}, \dots$ пересекаются в одной и той же точке H на оси родства, проходящей через двойные базисные точки пучка. Кривые e_0, e' и их проекции e_{03}, e'_{33} конгруэнтны, следовательно, точки A_0, B_0, H лежат на одной прямой l_0 , а прямые $M_0A_0, N_0B_0, \dots$ представляют собой образующие прямого клина с направляющими g_0 и l_0 . Но ранее было показано, что в сечении поверхности клина плоскостью, параллельной плоскости направляющего эллипса g_0 , образуется эллипс. Следовательно, кривая k , несущая ряд точек $1, 2, \dots$, является эллипсом. Множество полуэллипсов, параллельных плоскости xz , составляет второе семейство линий каркаса поверхности. Поверхность образована двумя семействами дуг эллипсов, поэтому она может быть названа *эллиптическим куполом*. Купол плавно сопрягается с вертикальными фундаментными стенами (рис. 3, б).

Покажем, что эллиптический купол на прямоугольном фундаменте описывается алгебраическим уравнением четвертого порядка. Принимая $TU = VW = 2a_0$, $UV = TW = 2b_0$ и обозначив высоту купола $AM_0 = c_0$ (см. рис. 2), запишем уравнение сечения k в виде: $x^2/a_0^2 + z^2/c^2 = 1$, где параметр $c^2 = b_0^2(1 - y^2/b_0^2)$ изменяется от c_0^2 (при $y = 0$) до нуля (при $y = \pm b_0$). Подставляя последнее выражение в уравнение образующей k , получаем уравнение поверхности эллиптического купола:

$$\frac{x^2}{a_0^2} + \frac{y^2}{b_0^2} + \frac{z^2}{c_0^2} - \frac{x^2}{a_0^2} \frac{y^2}{b_0^2} = 1.$$

Сечение поверхности плоскостью $z = 0$ распадается на две пары параллельных прямых: $x = \pm a$, $y = \pm b$, что соответствует форме прямоугольного основания. В сечениях вертикальными плоскостями $x = a$, $y = b$ ($a \leq a_0$, $b \leq b_0$) получаем два семейства эллипсов с переменным эксцентриситетом. Перемещая начало координат в угловую точку W (см. рис. 2) и пренебрегая в бесконечно малой окрестности этой точки слагаемыми третьего и четвертого порядков малости, получаем вместо уравнения купола уравнение эллиптического конуса $z^2/c_0^2 = 4xy/a_0b_0$ с осью $x=y$, $z=0$ и вершиной в точке W . Таким образом, в малой окрестности угловой точки поверхность купола близка к конической поверхности второго порядка.

Произвольное проективное преобразование нарушает параллельность прямых и плоскостей, но сохраняет порядок алгебраических кривых [2]. Выполним проективное преобразование, при котором несобственная (бесконечно удаленная) точка пересечения вертикальных ребер фундамента преобразуется в собственную точку S , а основание остается прямоугольным. Такое преобразование сохраняет плавное сопряжение купола с фундаментными стенами, которые из вертикальных становятся наклонными, поэтому купол будет вписан в пирамиду (рис. 4).

Плоскости каркасных линий образуют два пучка плоскостей. Плоскости первого пучка проходят через вершину S пирамиды и несобственную точку G^∞ пересечения противоположных сторон TU и VW фундамента. Плоскости второго пучка проходят через S и $E^\infty = UV \cap TW$. Выполняя произвольное проективное преобразование, получаем куполообразную поверхность, вписанную в неправильную четырехугольную пирамиду (рис. 5). Плоскости семейства каркасных линий e_i проходят через вершину S и точку $E = TW \cap UV$, образуя пучок плоскостей ϵ с осью ES . Плоскости семейства линий каркаса g_i проходят через точки S и $G = TU \cap VW$, образуя пучок γ с осью GS .

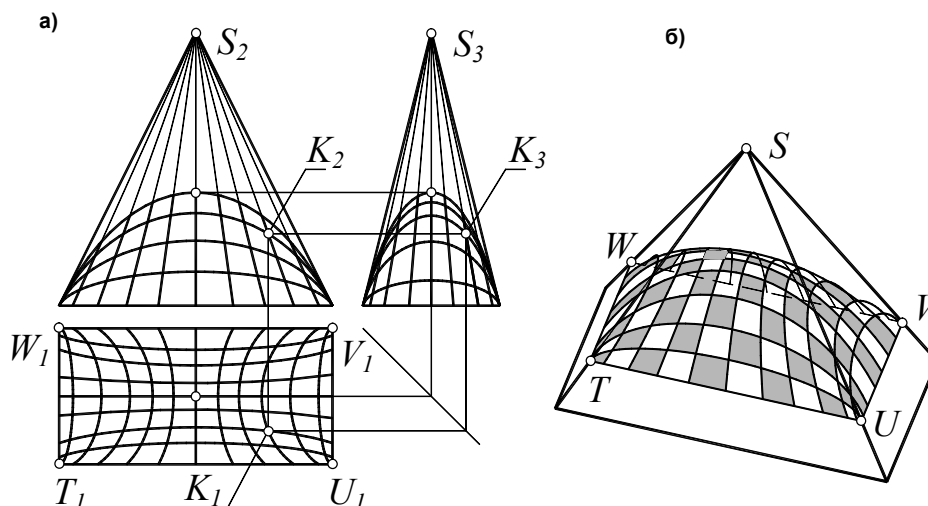


Рис. 4. Купол, вписанный в пирамиду:
а – ортогональный чертёж; б – аксонометрия

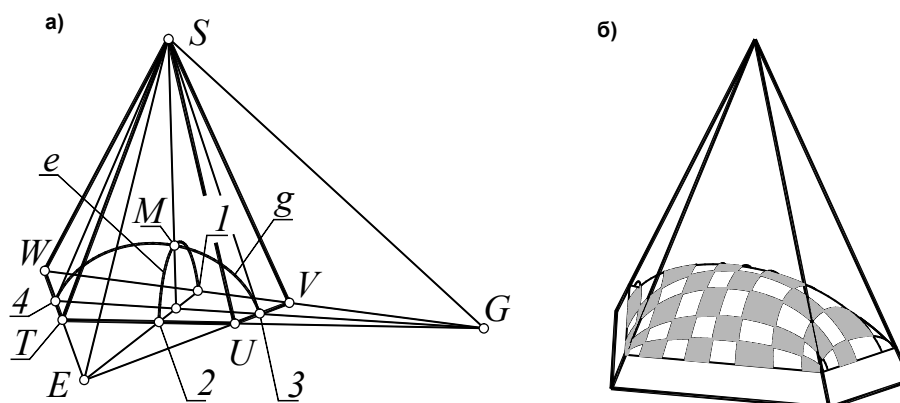


Рис. 5. Купол на четырехугольном фундаменте:
а – схема построения; б – аксонометрия

Рассмотрим алгоритм построения купола, вписанного в пирамиду $TUVWS$ и проходящего через данную точку M .

Плоскости пучков ϵ и γ , инцидентные M , пересекают пирамиду по треугольникам $12S$ и $34S$. Проводим линии каркаса (кривые второго порядка) e и g , проходящие через M , опирающиеся на стороны фундамента в парах точек $12, 34$ и касающиеся сторон треугольников $12S$ и $34S$ (рис. 5, а). В произвольной плоскости Σ пучка ϵ находим линию каркаса e_i , проходящую через точку $M_i = g \cap \Sigma$ и касающуюся сторон треугольника, полученного в сечении пирамиды плоскостью Σ . Множество плоскостей пучка ϵ индуцирует однопараметрическое семейство кривых второго порядка e_i , которые в свою очередь формируют каркас эллиптического купола, вписанного в данную пирамиду. Аналогично формируется второе семейство g_j образующих конструируемой поверхности (рис. 5, б).

Произвольная образующая вычерчивается с помощью программы [3] как кривая второго по-

рядка, проходящая через три точки и касающаяся двух прямых. Например, кривая e проходит через точки $M, 1, 2$ и касается сторон $S1$ и $S2$ треугольника $S12$ (см. рис. 5, а).

Заключение. Предложен способ построения гладкой (всюду дифференцируемой) поверхности на прямоугольном или произвольном плоском четырехугольном фундаменте. При использовании предложенного способа обеспечивается плавное сопряжение боковых фундаментных стен с поверхностью купола. Для формирования каркаса поверхности используются только дуги кривых второго порядка. Способ может найти применение в строительстве и архитектуре при проектировании куполообразных оболочек, опирающихся на плоский четырехугольный контур.

Литература

1. Михайленко, В.Е. Формообразование оболочек в архитектуре: монография / В.Е. Михайленко, В.С. Обухова, А.Л. Подгорный. – Киев: Будівельник, 1972. – 205 с.

Научно-методический раздел

2. Иванов, Г.С. Теоретические основы начертательной геометрии: учебное пособие / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1998. – 158 с.

3. Программа для ЭВМ «Построение кривой

второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых» / В.А. Короткий, правообладатель ГОУ ВПО «ЮУрГУ», свидетельство о государственной регистрации № 2011611961 от 04.03.2011.

Короткий Виктор Анатольевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Графика», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), korotkiyva@susu.ac.ru.

Усманова Екатерина Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Графика», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), usmanovaea@susu.ac.ru.

Поступила в редакцию 31 августа 2014 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Construction Engineering and Architecture”
2014, vol. 14, no. 3, pp. 45–48

THE USE OF SECOND-ORDER CURVES TO CONSTRUCT SMOOTH FRAME-MESH SURFACES

V.A. Korotky, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, korotkiyva@susu.ac.ru,

E.A. Usmanova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, usmanovaea@susu.ac.ru

The paper deals with the graphic-analytical algorithm for constructing a smooth shell resting on a flat rectangular contour, the frame of which is formed by the arcs of second-order curves.

Keywords: smooth shell, elliptical dome, blending, second-order curve.

References

1. Mikhaylenko V.E., Obukhova V.S., Podgornyy A.L. *Formoobrazovanie obolochek v arkhitekture* [Forming Membranes in Architecture]. Kyiv, Builder Publ., 1972. 205 p.
2. Ivanov G.S. *Teoreticheskie osnovy nachertatel'noy geometrii* [Theoretical Foundations of Descriptive Geometry]. Moscow, Engineering Publ., 1998. 158 p.
3. Korotkiy V.A. *Programma dlya EVM “Postroenie krivoy vtorogo poryadka, prokhodyashchey cherez dannye tochki i kasayushcheysya dannyykh pryamykh”* [The Computer Program “Building a Conic Curve Passing through These Points and Related Data Direct”]. Certificate of state registration, no. 2011611961, Application 04.03.2011.

Received 31 August 2014