

# Теория расчета строительных конструкций

УДК 624.072.2

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ УПРУГОГО ОСНОВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В СТЕНКЕ СТАЛЬНЫХ СОСТАВНЫХ БАЛОК

**В.Ф. Сабуров**

Локальные напряжения в стенке балок возникают при действии подвижных нагрузок от опорных кранов. Уровень этих напряжений определяет усталостную прочность и долговечность конструкции. Для балок, эксплуатируемых в тяжелых условиях режима работы кранов (7К, 8К), требуется в соответствии с требованиями норм проектирования дополнительная проверка верхней зоны стенки сварных балок на выносливость.

*Ключевые слова:* подкрановые балки, локальные напряжения, двухслойное упругое основание, податливость дискретных поясных соединений, подрельсовые подкладки.

Подкрановые пути одноэтажных производственных зданий представляют собой сложную систему конструктивных элементов, воспринимающих подвижные нагрузки от мостовых кранов. Основным несущим элементом этой системы являются подкрановые балки, эксплуатационная надежность которых в первую очередь зависит от уровня локальных напряжений в верхней зоне стенки, определяющих ее усталостную прочность и долговечность.

Конструктивная форма подкрановых балок – составные двутавры, которые до середины 50-х годов прошлого века изготавливались под краны тяжелых режимов работы с использованием клепанных поясных соединений (рис. 1, а, б). Для таких балок характерна многоэлементность верхней зоны стенки. Известно [1], что при эксплуатации заклепочные поясные соединения проходят через три стадии работы под нагрузкой, обусловленной их податливостью. Отмеченные конструктивные и технологические факторы клепанных балок обеспечивают высокую усталостную долговечность.

В сварных балках, как видно из рис. 1, в, отсутствует многоэлементность верхней зоны. Поэтому единственным регулятором местного на-

пряженного состояния стенки сварной балки и поясного шва является крановый рельс. Неслучайно отечественная металлургическая промышленность приступила к прокатке специальных крановых рельсов типа КР (ГОСТ 4121–48) в 50-е годы прошлого века при массовом переходе от клепанных балок к сварным [2]. В клепанных балках для перемещения колес мостовых кранов достаточно было использовать брусковые крановые рельсы.

Однако для обеспечения усталостной прочности верхней зоны стенки сварных балок применения специальных крановых рельсов оказалось недостаточным и потребовалось введение между рельсом и поясом балки прокладки из материала с низким модулем упругости [3]. Это позволило значительно снизить местные напряжения сжатия  $\sigma_{loc,y}$  и изгиба  $\sigma_{fy}$  в стенке балки за счет распределения сосредоточенного давления колеса крана на большую длину стенки (рис. 2, а) и поворота рельса на прокладке (рис. 2, б). Подрельсовые низко-модульные подкладки позволяют также ликвидировать неблагоприятное влияние на усталостную прочность стенки неровностей на контактных поверхностях подошвы рельса и верхнего пояса [4].

Согласно [5], деформативность клепаного по-

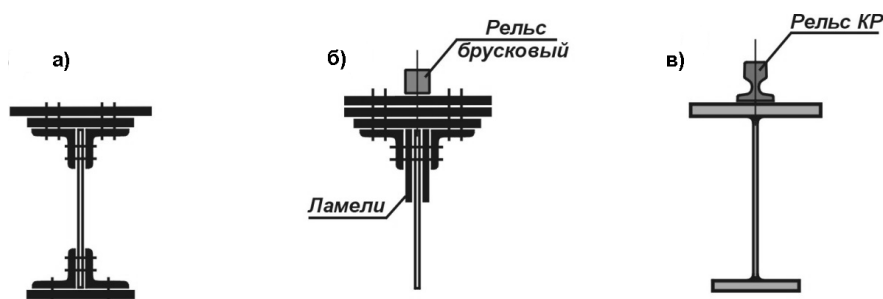


Рис. 1. Типы сечений подкрановых балок: а – сечение клепанной балки; б – верхняя зона стенки балки с ламелями; в – сечение сварной подкрановой балки

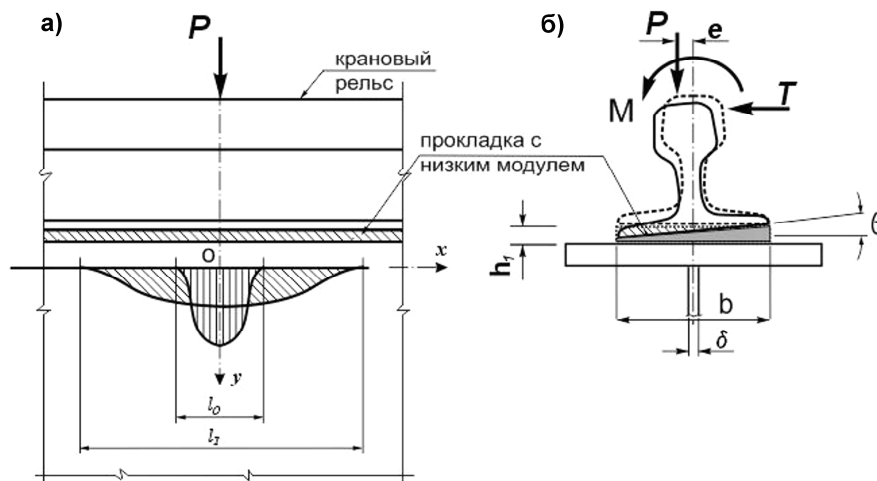


Рис. 2. Распределение напряжений  $\sigma_{loc,y}$  в стенке балки (а) и деформация рельса на прокладке при действии локального момента (б)

ясного соединения стенки определяется коэффициентом податливости  $k = G_3 (\pi d / 2a)$ , где  $d$  и  $a$  – соответственно диаметр и шаг заклепок в верхней зоне стенки;  $G_3 = (0,8 \dots 2,0) \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup> – модуль сдвига заклепочного соединения [1]. Для изготовления балок наиболее часто использовали заклепки диаметром  $d = 22$  мм и шагом  $a = 100$  мм.

При данных входных параметрах коэффициент податливости  $k$  изменяется в диапазоне  $(0,7 \dots 0,28) \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup> в зависимости от стадии работы заклепочного соединения. Для вывода расчетной формулы  $l_{ef}$  в [5] коэффициент податливости принят равным  $k = 0,3 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, что соответствует работе соединений в балках, эксплуатируемых длительное время. Следовательно, поясное соединение на дискретных связях (в данном случае заклепках) также представляет собой некоторую область стенки с низким модулем упругости по сравнению с материалом стенки.

Эффективность различных конструктивных решений поясных соединений в подкрановых балках сводится к изучению напряженно-деформированного состояния упругого основания, на которое опирается крановый рельс, нагруженный локальными воздействиями колес крана. В случае использования низкомодульной прокладки в сварных балках или наличия податливой зоны в балках с дискретными поясными соединениями стенку балки можно представить в виде двухслойного упругого основания (рис. 3), в котором слой  $h_1$  моделирует прокладку или податливое поясное соединение, а слой  $h_2$  – упругую полуплоскость (стенку балки). Каждый слой имеет свои упругие константы – модуль упругости и коэффициент Пуассона  $E_1, \nu_1$  и  $E_2, \nu_2$  соответственно (рис. 3).

Задача о распределении напряжений  $\sigma_{loc,y}$  в стенке балки при однослойном упругом основании рассмотрена в [6] и показала хорошую сходимость с экспериментальными данными.

Рассматриваемая задача представляет собой плоскую задачу теории упругости в перемещениях, связь между напряжениями и деформациями в которой выражается зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y); \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ;

$$\gamma_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Основываясь на физическом смысле задачи, считаем, что в упругих основаниях  $h_1$  и  $h_2$  горизонтальные перемещения  $u$  отсутствуют, т. е.  $u(x, y) = 0$ .

Тогда система уравнений (1) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y); \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Перемещения произвольной точки упругой полуплоскости будут происходить только в направлении оси  $y$  и примут вид:

$$v(x, y) = V_1(y) \psi_1(y) + V_2(y) \psi_2(y), \quad (3)$$

где  $\psi_1(y)$  и  $\psi_2(y)$  – функции распределения перемещений по высоте упругих слоев;  $V_1(y)$  и  $V_2(y)$  – вертикальные перемещения поверхности упругого слоя  $h_1$  и  $h_2$  соответственно (рис. 3, а).

Выбор функций распределения перемещений по высоте упругого слоя зависит от мощности это-

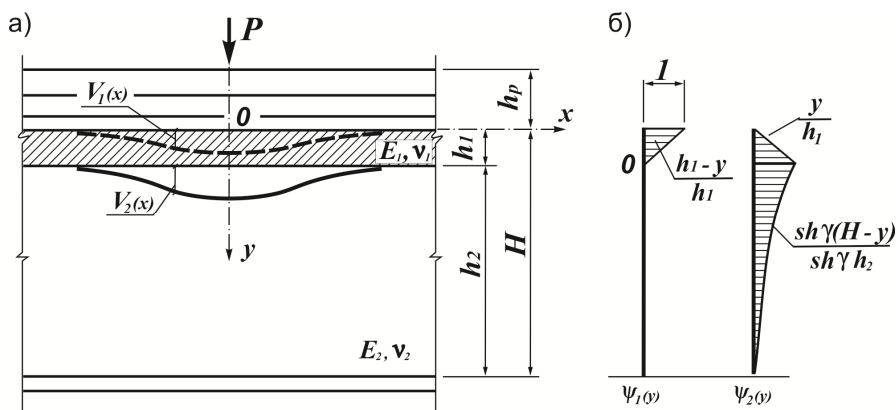


Рис. 3. Расчетная схема стенки балки как двухслойного упругого основания

го слоя, а также от характера распределения напряжений по высоте. Так, для слоя  $h_1$ , работающего на сжатие и имеющего небольшую высоту по сравнению с  $h_2$ , можно принять, что перемещения изменяются по закону:

$$\psi_1(y) = (h_1 - y)/h_1. \quad (4)$$

Функция  $\psi_2(y)$  для второго слоя может быть принята в виде [6]:

$$\psi_2(y) = \frac{\text{sh}\gamma(H-y)}{\text{sh}\gamma h_2}, \quad (5)$$

что соответствует физическому содержанию задачи и подтверждается экспериментами. Коэффициент  $\gamma$  в формуле (5) характеризует затухание перемещений по высоте слоя  $h_2$  и равен  $\gamma = 0,25-0,30$  [7].

Таким образом, функции распределения перемещений по высоте слоев будут иметь следующие значения (рис. 3, б)

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq y \leq h_1; \quad \psi_1 = \frac{h_1 - y}{h_1}; \quad \psi_2 = \frac{y}{h_1}; \\ h_1 \leq y \leq H; \quad \psi_1 = 0; \quad \psi_2 = \frac{\text{sh}\gamma(H-y)}{\text{sh}\gamma h_2}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Используя выражения (4) и (6) и на основании решения, полученного в [7], будем иметь систему двух дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2t_1 V_1'' - k_1 V_1 + t_1 V_2'' + k_1 V_2 + q = 0; \\ 2t_1 V_1'' + k_1 V_1 + 2(t_1 + t_2) V_2'' - (k_1 + k_2) V_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где  $k_1 = \frac{E_1' \delta}{h_1(1-\nu_1^2)}$ ;  $t_1 = \frac{E_1' h_1 \delta}{12(1+\nu_1)}$ ;  $(8)$

$$k_2 = \frac{E_2 \delta}{h_2(1-\nu_2^2)} \psi_k; \quad t_2 = \frac{E_2 h_2 \delta}{12(1+\nu_2)} \psi_t; \quad (9)$$

$$\psi_k = \frac{\gamma H}{2} \frac{\text{sh}\gamma H \text{ch}\gamma H - \gamma H}{\text{sh}^2 \gamma H};$$

$$\psi_t = \frac{3}{2} \frac{1}{\gamma H} \frac{\text{sh}\gamma H \text{ch}\gamma H - \gamma H}{\text{sh}^2 \gamma H}, \quad (10)$$

где  $E_1' = E_1/b$  – относительный модуль податливости первого слоя,  $b$  – ширина подошвы рельса;  $\delta$  – толщина упругой полуплоскости.

Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  характеризуют соответственно работу верхнего и нижнего слоев на сжатие, коэффициенты  $t_1$  и  $t_2$  – на сдвиг.

Для решения системы дифференциальных уравнений (7) введем новую функцию  $F(x)$  и выразим через эту функцию и ее производные искомые перемещения  $V_1(x)$  и  $V_2(x)$  так, чтобы второе уравнение системы (7) удовлетворялось тождественно при любом выборе функции  $F(x)$ . Исходя из этого получим

$$\left. \begin{aligned} V_1(x) = (k_1 + k_2)F(x) - 2(t_1 + t_2)F''(x); \\ V_2(x) = k_1 F(x) + t_1 F''(x). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставив формулы (11) в (7), убеждаемся, что второе уравнение обращается в тождество, а первое примет вид

$$t_1(3t_1 + 4t_2)F^{IV} - 2(3t_1 k_1 + t_1 k_2 + t_2 k_1)F'' + k_1 k_2 F = q(x), \quad (12)$$

где  $q(x)$  – нагрузка на упругое основание.

Дифференциальным уравнением (12) полностью описывается напряженное и деформированное состояние двухслойного упругого основания. Выбирая характеристики  $k_1, k_2, t_1, t_2$  можно получить ряд различных расчетных схем упругого основания и рассматривать эффективность подрельсовых устройств, выполненных из разных материалов и имеющих различные конструктивные исполнения.

Для отыскания неизвестной функции перемещения  $F(x)$ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению (12) и конкретным граничным условиям, примем несколько предпосылок:

1. Осадка верхнего слоя  $V_1(x)$  равна прогибу кранового рельса, лежащего на этом основании.
2. Ввиду малой толщины слоя  $h_1$  верхний слой работает только на сжатие и представляет

## Теория расчета строительных конструкций

собой винклеровское упругое основание. Для такого слоя можно принять

$$t_1 = 0; k_1 = k_0, \quad (13)$$

где  $k_0$  – коэффициент постели упругого основания  $h_1$ .

3. Деформации первого и второго слоев происходят в упругой области работы материала этих оснований.

С учетом (13) уравнения системы (11) примут вид

$$\left. \begin{aligned} V_1(x) &= (k_0 + k_2)F(x) - 2t_2 F''(x); \\ V_2(x) &= k_0 F(x), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

а дифференциальное уравнение (12) переписывается при этом в виде

$$-2k_0 t_2 F'' + k_2 k_0 F = q(x). \quad (15)$$

Дифференциальное уравнение (15) позволяет рассмотреть работу двухслойного упругого основания с верхним винклеровским слоем.

Для балки, лежащей на винклеровском упругом основании, дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$EIV_1^{IV}(x) = p(x) - q(x), \quad (16)$$

где  $V_1$  – упругий прогиб балки;  $p(x)$  – нагрузка на балку;  $q(x)$  – нагрузка на основание (реактивное давление).

Вследствие того, что прогиб балки по условию нашей задачи совпадает с осадкой поверхности упругого слоя основания  $V_1$ , первое из уравнений системы (14) может быть внесено в выражении (16). Для определения основной функции  $F(x)$  получим при этом систему двух дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} EI[-2t_2 F^{VI} + (k_0 + k_2)F^{IV}] &= p(x) - q(x); \\ -2k_0 t_2 F'' + k_2 k_0 F &= q(x). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Исключим из полученной системы уравнений

неизвестную функцию  $q(x)$ , для чего сложим почленно первое и второе уравнение и получим выражение

$$\begin{aligned} -2EI \frac{t_2}{k_0} F^{VI} + EI \frac{k_0 + k_2}{k_0} F^{IV} - \\ -2t_2 F'' + k_2 F = \frac{p(x)}{k_0}, \end{aligned} \quad (18)$$

которое является основным уравнением задачи и представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение шестого порядка с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим бесконечно длинную балку на упругом основании, подчиняющуюся гипотезе Винклера, и нагруженную сосредоточенной силой  $P$ . Исходя из предпосылки 1, прогиб балки и вертикальные перемещения поверхности упругого слоя  $h_1$  одинаковы и равны [8]:

$$y(x) = V_1(x) = \frac{P\beta}{2k} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \quad (19)$$

где  $\beta = \sqrt[4]{k_0 \cdot b / 4EI}$  – упругая характеристика основания;  $k_0$  – коэффициент постели упругого основания;  $b$  – ширина подошвы рельса;  $EI$  – жесткость рельса на изгиб. Эпюра прогиба бесконечно длинной балки, нагруженной сосредоточенной силой, представлена на рис. 4, а.

Для балок с низко модульной прокладкой коэффициент постели упругого основания может быть представлен в виде  $k_0 = E_1 / h_1$ . Таким образом, верхний слой с упругими характеристиками  $E_1$  и  $h_1$  преобразован в упругий слой, свойства которого характеризует коэффициент  $k_0$ .

Для выявления закономерностей распределения местных напряжений в стенке рассмотрим задачу о распределении давления под подошвой рельса или в уровне поясных заклепок (болтов) стенки. Для винклеровского основания давление

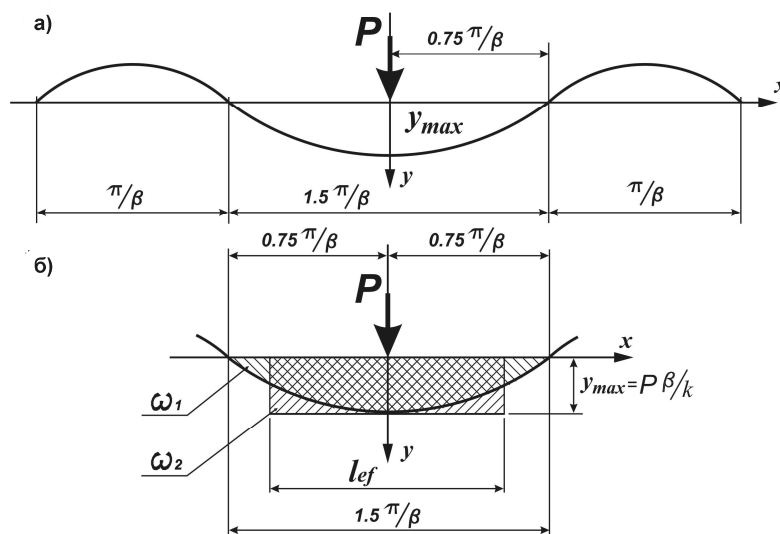


Рис. 4. Эпюры прогибов рельса как балки на сплошном упругом основании

пропорционально осадке поверхности основания, равного прогибу балки [7]:

$$q(x) = ky(x). \quad (20)$$

С учетом (19) выражение (20) примет вид:

$$q(x) = 0,5P\beta \left[ e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \right]. \quad (21)$$

Из рис. 4, а видно, что график функции (21) представляет собой волнообразную кривую с постепенно уменьшающейся амплитудой, определяемой периодом функций  $\cos \beta x$  и  $\sin \beta x$ . Рассмотрим только ту часть кривой, которая ограничена нулевыми точками на расстоянии  $1,5\pi/\beta$  (рис. 4, б).

Из выражения (19) следует, что при  $x = 0$  (начало координат) прогиб балки и перемещение основания достигает своей наибольшей величины  $V_1(0) = P\beta/k$ .

Упругий прогиб рельса и перемещения основания будут равны нулю, когда  $\cos \beta x$  и  $\sin \beta x$  в уравнении (19) будут равны по величине, но противоположны по знаку. Это достигается тогда, когда  $\beta x = 0,75\pi$  и далее с добавлением числа  $\pi$ . Таким образом, упругий прогиб балки равен нулю при расстоянии  $x_1 = 0,75\frac{\pi}{\beta}$ ;  $x_2 = 1,75\frac{\pi}{\beta}$  и т. д.

Для простоты расчетов перейдем от криволинейной эпюры давления на упругую полуплоскость к равномерно распределенной на длине  $l_{ef}$  нагрузке  $q = 0,5P\beta$  (рис. 4, б). Условную длину распределения найдем из равенства площадей криволинейной  $\omega_1$  и прямолинейной  $\omega_2$  эпюр давления (рис. 4, б).

Площадь криволинейной эпюры равна:

$$\omega_1 = \omega_1 = \frac{P\beta}{2k} \int_{\frac{0,75\pi}{\beta}}^{\frac{0,75\pi}{\beta} + \frac{\pi}{\beta}} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) dx.$$

После интегрирования получим:

$$\omega_1 = 1,0675 P/k.$$

Площадь прямолинейной эпюры  $\omega_2$  равна:

$$\omega_2 = P\beta l_{ef} / 2k.$$

Из равенства  $\omega_1 = \omega_2$  имеем:

$$l_{ef} = 3\sqrt[4]{E I_p / k}. \quad (22)$$

Формула (22) позволяет оценить эффективность различных подрельсовых оснований для снижения уровня локальных напряжений в стенке подкрановых балок, которые вычисляются по формуле:

$$\sigma_{loc,y} = P/l_{ef} \cdot \delta.$$

В качестве примера рассмотрим крановый путь, состоящий из сварной балки с толщиной стенки  $\delta = 8$  мм и рельса КР 70 ( $I_p = 1082$  см<sup>4</sup>;  $b = 12$  см), уложенный на низко модульную резино-металлическую прокладку толщиной 8 мм. Модуль упругости прокладки  $E = 0,5$  кН/см<sup>2</sup> при

твердости резины по Шору  $H_A = 75$  ед. Коэффициент постели основания  $k_0 = 0,5/0,8 = 0,625$  кН/см<sup>3</sup>. Коэффициент податливости и условная длина распределения соответственно будут равны:

$$k = 0,625 \cdot 12 = 7,5 \text{ кН/см}^2;$$

$$l_{ef} = 3\sqrt[4]{2,05 \cdot 10^4 \cdot 1082 / 7,5} = 124 \text{ см}.$$

Условная длина распределения  $l_{ef}$  в стенке сварной балки, эксплуатируемой без низко модульных прокладок, равна [5]:

$$l_{ef} = 3,26\sqrt[3]{1082/0,8} = 36,0 \text{ см}.$$

Выполненные расчеты показывают, что использование низко модульной прокладки позволяет увеличить длину распределения локального давления в 3,4 раза, т. е. её эффективность, как конструктивного элемента для снижения локальных напряжений, составляет 340 %.

Использование формулы (22) для клепаных балок коэффициентом податливости  $k = 0,3 \cdot 10^4$  кН/см<sup>2</sup> дает значение  $l_{ef} = 3\sqrt[4]{2,05 \cdot 1082 / 0,3} = 28$  см, что меньше  $l_{ef}$  для сварной балки без прокладки. Это свидетельствует о том, что в клепаных балках длина распределения в значительной степени определяется мощностью склепанного пакета верхнего пояса, а не только моментом инерции кранового рельса, и подтверждает ранее высказанное предположение, что в клепаных балках крановый рельс не определяет НДС стенки.

Локальное напряженное состояние стенки балки может быть вычислено по формулам (2) с использованием методики, опубликованной в [7], или по методике упругой полуплоскости, изложенной в [9].

### Литература

1. Шапиро, Г.А. Работа заклепочных соединений стальных конструкций / Г.А. Шапиро. – М.: Стройвоенмориздат, 1949. – 180 с.
2. Сабуров, В.Ф. Эволюция профиля крановых рельсов для подкрановых путей производственных зданий / В.Ф. Сабуров, Н.Е. Крупнова // Институциональные проблемы саморазвития территориальных систем инновационной России. Международная конференция с элементами научной школы для молодёжи: сб. науч. тр. – Челябинск: Издат. центр ЮУрГУ, 2010. – С. 77–87.
3. Кикин, А.И. Исследование совместной работы кранового рельса, низко модульной прокладки и пружинного крепления / А.И. Кикин, В.Ф. Сабуров // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1975. – № 5. – С. 14–18.
4. Кудишин, Ю.И. Распределение сосредоточенной нагрузки в стенке подкрановой балки при неровностях на контактных поверхностях рельса и верхнего пояса балки / Ю.И. Кудишин // Материалы по металлическим конструкциям. – 1967. – Вып. 12. – М.: ЦНИИПСК. – С. 123–129.

## Теория расчета строительных конструкций

5. Броуде, Б.М. *Распределение сосредоточенного давления в металлических балках* / Б.М. Броуде. – М.: Стройиздат, 1950. – 84 с.

6. Власов, В.З. *Балки, плиты и оболочки на упругом основании* / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Стройиздат, 1960. – 490 с.

7. Сабуров, В.Ф. *Особенности совместной работы крановых рельсов и подкрановых балок в*

*подкрановых путях производственных зданий* / В.Ф. Сабуров // *Известия вузов. Строительство*. – 1995. – № 12. – С. 8–13.

8. Тимошенко, С.П. *Сопротивление материалов* / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1965. – Т. 2. – 480 с.

9. Тимошенко, С.П. *Теория упругости* / С.П. Тимошенко, Дж. Гуд'ер. – М.: Наука, 1979. – 560 с.

**Сабуров Валерий Федорович**, доктор технических наук, профессор кафедры «Строительные конструкции и инженерные сооружения», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), saburov\_skiis@mail.ru

*Поступила в редакцию 17 ноября 2014 г.*

**Bulletin of the South Ural State University  
Series "Construction Engineering and Architecture"  
2014, vol. 14, no. 4, pp. 15–20**

## THE USE OF ELASTIC FOUNDATION MODEL TO ANALYZE LOCAL TENSION DISTRIBUTION IN THE WALL OF STEEL BUILT-UP BEAMS

*V.F. Saburov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, saburov\_skiis@mail.ru*

**Local tension in the walls of steel built-up beams is under movable load of the supported cranes. The level of the tension determines fatigue strength and durability of the construction. For the beams used hard working conditions of crane operation (7K, 8K) additional fatigue strength check of the upper zone of the wall of welded beams is required in accordance with design regulations.**

*Keywords: crane beams, local tension, double-layer elastic foundation, flexibility of discrete zone junction, under-rail chairs.*

### References

1. Shapiro G.A. *Rabota zaklepochnykh soedineniy stal'nykh konstruktsiy* [Work riveted joints of steel structures]. Moscow, 1949. 180 p.
2. Saburov V.F., Krupnova N.E. [The evolution of the profile of crane rails for crane tracks industrial buildings]. *Institutsional'nye problemy samorazvitiya territorial'nykh sistem innovatsionnoy Rossii. Mezhdunarodnaya konferentsiya s elementami nauchnoy shkoly dlya molodezhi. Sb. nauchnykh trudov* [Institutional problems of development of regional systems of innovation in Russia. International conference with the elements of a scientific school for young people. Sat. scientific papers]. Chelyabinsk, South Ural St. Univ Publ., 2010, pp. 77–87 (in Russ.).
3. Kikin A.I., Saburov V.F. [Research collaboration crane rail, low-modulus pads and spring mount]. *Izvestiya vuzov, Stroitel'stvo i arkhitektura* [News of Universities. Construction and architecture]. Moscow, 1975, no. 5, pp. 14–18 (in Russ.).
4. Kudishin Yu.I. [The distribution of a concentrated load in the wall of the crane beams when the irregularities on the contact surfaces of the rail and the upper zone of the beam]. *Materialy po metallicheskim konstruktsiyam* [Materials for metal structures]. Moscow, 1967, Iss. 12, TsNIIPSK Publ., pp. 123–129 (in Russ.).
5. Broude B.M. *Raspredelenie sosredotochennogo davleniya v metallicheskikh balkakh* [The distribution of concentrated pressure in metal beams]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1950. 84 p.
6. Vlasov V.Z., Leont'ev N.N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii*. [Beams, slabs and envelopes one-elastic basement]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1960. 490 p.
7. Saburov V.F. [Features of joint work of crane rails and under crane girders in under crane paths of industrial buildings]. *Tidings of Educational Institutions of Higher Professional Education. Ser. Construction*, 1995, no. 12, pp. 8–13 (in Russ.).
8. Timoshenko S.P. *Soprotivlenie materialov* [Resistance of materials]. Moscow, Nauka publ., 1965, vol. 2. 480 p.
9. Timoshenko S.P. Dzh. Gud'er. *Teoriya uprugosti* [The theory of elasticity]. Moscow, 1979. 560 p.

*Received 17 November 2014*