

# Инженерное оборудование зданий и сооружений

УДК 681.52.01

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЧАСТОТНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОУСТОЙЧИВОСТИ ОГРАЖДЕНИЙ

*В.И. Панферов, С.В. Панферов*

Рассматривается задача о так называемом слое резких колебаний, показателе тепловой инерции и коэффициенте теплоусвоения материала. С помощью методов теории передаточных функций уточняются формулы для слоя резких колебаний. Показано, что использованный подход к решению задачи является более простым и, вследствие этого, более понятным и «прозрачным». Ранее в литературе указанные соотношения были получены путем непосредственного решения и анализа уравнения теплопроводности с соответствующими крайними условиями. Из-за известных недостатков такого способа решения, как отмечается в литературе, отдельные исследователи предложили различные несогласованные друг с другом формулы. Используемый в данной работе метод частотных передаточных функций рекомендуется для развития теории теплоустойчивости ограждений и помещений в целом, которая актуальна и в настоящее время.

*Ключевые слова:* слой резких колебаний, амплитуда, показатель тепловой инерции, коэффициент теплоусвоения материала, частотная передаточная функция.

**Введение.** Известно [1–3], что одним из важнейших инструментов для конструирования высококачественных систем обеспечения микроклимата зданий является теория теплоустойчивости ограждений в частности и помещений в целом. В данной теории вводится ряд понятий, например, понятие слоя резких колебаний, понятие коэффициента теплоусвоения материала и показателя тепловой инерции. Приводятся формулы для определения толщины слоя резких колебаний, для его связи с показателем тепловой инерции и коэффициентом теплоусвоения материала. Указанные соотношения впервые были получены, вероятнее всего, путем непосредственного решения и анализа уравнения теплопроводности с соответствующими крайними условиями. Во всяком случае, такое представление формируется при изучении известных работ О.Е. Власова [4], общепризнанного основателя теории теплоустойчивости, и работ других авторов 30–50-х годов прошлого столетия [5–8]. Вместе с тем, как нам представляется, решение и анализ задач теплоустойчивости ограждений будет более простым и понятным, если для этого использовать методы теории автоматического управления, конкретно, понятие передаточной функции вообще и частотной передаточной функции в частности [9, 10]. Такой подход позволяет уточнить приводимые в литературе данные по теории теплоустойчивости ограждений [1–3]. При этом, конечно, следует заметить, что определенная критика использо-

ванных методов и подходов для решения задач теплоустойчивости и полученных с их помощью результатов, в частности, их противоречивость уже содержится в работе [5] и других работах, например, в [8]. В работе [5, с. 6], в частности, указано, что «...отдельные исследователи предложили различные несогласованные друг с другом формулы». На наш взгляд, такое положение дел в определенной мере имеет место и в настоящее время. Поэтому теория теплоустойчивости как в прошлые годы, так и в настоящее время требует дальнейшего развития и уточнения.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим следующую задачу об отыскании температурного поля полубесконечного тела:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}, 0 < x < \infty, \tau > 0; \quad (1)$$

$$t(x, 0) = 0, 0 \leq x < \infty; \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = q(\tau), \tau \geq 0; \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} t(x, \tau) = 0, \tau \geq 0, \quad (4)$$

где  $t(x, \tau)$  – температура в точке с пространственной координатой  $x$  в момент времени  $\tau$ ,  $a$ ,  $\lambda$  – соответственно коэффициенты температуропроводности и теплопроводности материала тела,  $q(\tau)$  – плотность теплового потока.

В изображениях Лапласа уравнение теплопроводности (1) с учетом начального условия (2) переписывается в виде

$$pT(x, p) = a \frac{\partial^2 T(x, p)}{\partial x^2}, \quad (5)$$

где  $T(x, p)$  – Лапласово изображение  $t(x, \tau)$ ,  $p$  – комплексная переменная.

Решая уравнение (5) с учетом условия (4), получим что

$$T(x, p) = C \exp(-x \sqrt{\frac{p}{a}}), \quad (6)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования.

**Определение передаточной функции по каналу «плотность теплового потока на границе – температура в точке с координатой  $x$ ».** Обозначим Лапласово изображение плотности теплового потока  $q(\tau)$  как  $Q(p)$ , тогда Лапласово изображение уравнения (3) будет следующим:

$$\begin{aligned} Q(p) &= -\lambda \frac{\partial T(0, p)}{\partial x} = -\lambda C (-\sqrt{\frac{p}{a}}) \exp(-x \sqrt{\frac{p}{a}})_{x=0} = \\ &= C \sqrt{\frac{p \lambda^2}{a}} = C \sqrt{p \lambda c \rho}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $c, \rho$  – соответственно удельная теплоемкость и плотность материала.

Если считать  $q(\tau)$  входной величиной системы, а  $t(x, \tau)$  – ее выходной величиной, тогда передаточная функция системы в изображениях Лапласа будет равна

$$W(x, p) = \frac{T(x, p)}{Q(p)} = \frac{\exp(-x \sqrt{\frac{p}{a}})}{\sqrt{p \lambda c \rho}}, \quad (8)$$

а частотная передаточная функция будет иметь вид

$$W(x, j\omega) = \frac{\exp(-x \sqrt{\frac{j\omega}{a}})}{\sqrt{j\omega \lambda c \rho}}, \quad (9)$$

где  $\omega$  – частота,  $j$  – мнимая единица.

Величину  $\sqrt{\omega \lambda c \rho}$  обозначим как  $S$ , в теории теплоустойчивости ее называют коэффициентом теплоусвоения материала, тогда частотная передаточная функция переписывается так:

$$W(x, j\omega) = \frac{\exp(-x \sqrt{\frac{j\omega}{a}})}{S \sqrt{j}}. \quad (10)$$

Как известно из теории автоматического управления [4, 5], модуль частотной передаточной функции равен отношению амплитуды установившихся выходных колебаний к амплитуде входных колебаний

$$|W(x, j\omega)| = \frac{\exp(-x \sqrt{\frac{\omega}{a}})}{S}, \quad (11)$$

поэтому отношение амплитуды установившихся колебаний температуры поверхности  $t(0, \tau)$  к амплитуде колебаний плотности теплового потока будет равно

$$|W(0, j\omega)| = \frac{1}{S}. \quad (12)$$

**Вычисление характеристик слоя резких колебаний.** В теории теплоустойчивости по определению слой резких колебаний это слой от точки  $x = 0$  до точки  $x = L$ , в которой амплитуда колебаний температуры примерно вдвое меньше, чем на поверхности, т. е. при  $x = 0$  [см., например, 3 с. 107]. В связи с этим найдем величину  $x = L$  следующим образом:

$$\frac{|W(L, j\omega)|}{|W(0, j\omega)|} = \frac{1}{2}$$

или

$$\exp(-L \sqrt{\frac{\omega}{a}}) = \frac{1}{2};$$

отсюда

$$L = \frac{\ln 2}{\sqrt{\frac{\omega}{a}}} = \frac{\lambda \ln 2}{S}. \quad (13)$$

Термическое сопротивление теплопроводности  $R$  этого слоя будет равно

$$R = \frac{L}{\lambda} = \frac{\ln 2}{S},$$

поэтому применяемый в теории теплоустойчивости показатель тепловой инерции  $D = RS$  будет равен  $\ln 2$ , а не 1, как это принято в [1–3].

Если, как это указано в [1, с. 220], «...слоем резких колебаний ... считать слой, для которого  $D = 1$ », то получается, что его толщина будет равна  $L = \frac{\lambda}{S}$  [1, с. 220], а не  $L = \frac{\lambda \ln 2}{S}$ , как это записано в формуле (13).

Если же слоем резких колебаний считать слой, в пределах которого амплитуда температурных колебаний уменьшается в  $e = 2,718...$  раз, то тогда толщина этого слоя будет равна  $\sqrt{\frac{a}{\omega}} = \frac{\lambda}{S}$ , его термическое сопротивление теплопроводности будет  $1/S$ , а показатель тепловой инерции  $D$  действительно будет равен 1.

Если  $x = \frac{\lambda}{S}$ , то  $\frac{|W(x, j\omega)|}{|W(0, j\omega)|} = \exp(-1)$ , т. е. на расстоянии  $x = \frac{\lambda}{S}$  амплитуда колебаний температуры уменьшится не вдвое, а в  $e = 2,718...$  раз.

Отметим также, что толщина слоя, в пределах которого амплитуда температурных колебаний уменьшается в 10 раз, будет равна  $\frac{\ln 10 \cdot \lambda}{S}$ , а его

термическое сопротивление теплопроводности будет  $\ln 10/S$ .

Отмеченные неточности, вероятнее всего, обусловлены недостатками традиционного метода решения задач теплоустойчивости, его «непрозрачностью» и громоздкостью, как в свое время высказался проф. С.И. Муромов, тем, что задачи решались «... чрезвычайно сложными, громоздкими и запутанными способами» [5, с. 33]. При этом отметим, что сам проф. С.И. Муромов для решения задач теплоустойчивости применял, как нам представляется, более простой метод, который известен в настоящее время, например, в электротехнике как символический метод расчета установившихся режимов цепей синусоидального тока. Этот метод позволяет при решении освободиться от производных по времени, производные же по пространственной координате при этом в задаче теплоустойчивости остаются в решаемых соотношениях.

**Выводы.** Показано, что решение задачи теплоустойчивости ограждений широко используемым в теории автоматического управления методом частотных передаточных функций является более простым и, вследствие этого, более понятным и «прозрачным». В процессе решения уточнены соотношения для слоя резких колебаний, показателя тепловой инерции и коэффициента теплоусвоения материала.

Метод частотных передаточных функций рекомендуется для развития теории теплоустойчивости ограждений и помещений в целом, которая актуальна и в настоящее время.

**Панферов Владимир Иванович**, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой «Теплогазоснабжение и вентиляция», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), tgsiv@mail.ru.

**Панферов Сергей Владимирович**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Теплогазоснабжение и вентиляция», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), tgsiv@mail.ru.

Поступила в редакцию 21 ноября 2014 г.

**Bulletin of the South Ural State University  
Series "Construction Engineering and Architecture"  
2015, vol. 15, no. 1, pp. 48–51**

## APPLICATION OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTION METHOD TO SOLVE A PROBLEM ON THERMAL STABILITY OF FENCING

*V.I. Panferov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, tgsiv@mail.ru*

*S.V. Panferov, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, tgsiv@mail.ru*

The problem of the so-called layer of abrupt fluctuations, the index of thermal inertia and heat absorption coefficient of the material is considered in the article. Using the theory of transfer functions formulae for the layer of abrupt fluctuations are specified. It is shown that the approach to the problem is more simple and, therefore, more understandable and "transparent". In the previous references indicated ratios are obtained by direct analysis of the solution and the heat equation with appropriate boundary conditions. Because of the known disadvantages of this method, as noted

in the references, some researchers have suggested various formulae which are inconsistent with each other. Used in this article method of frequency transfer functions is recommended for the development of the theory of thermal stability of fencing and buildings in general, which is relevant at present.

*Keywords: layer of abrupt fluctuations, amplitude, the rate of thermal inertia, the coefficient of heat absorption of the material, the frequency response function.*

### References

1. Bogoslovskiy V.N. *Stroitel'naya teplofizika* [Building thermal physics]. St. Petersburg, AVOK Northwest Publ., 2006. 400 p.
2. Il'inskiy V.M. *Stroitel'naya teplofizika* [Building thermal physics]. Moscow, Graduate School Publ., 1974. 318 p.
3. Fokin K.F. *Stroitel'naya teplotekhnika ograzhdayushchikh chastey zdaniy* [Construction thermotechnics external parts of buildings]. Moscow, AVOK PRESS Publ., 2006. 256 p.
4. Vlasov O.E. *Osnovy stroitel'noy teplotekhniki* [Basics of building thermal physics]. Moscow, Military Engineering Academy of the Red Army Publ., 1938. 96 p.
5. Muromov S.I. *Raschetnye temperatury naruzhnogo vozdukha i teploustoychivost' ograzhdeniy* [Estimate-d outdoor temperature and the heat resistance of external walls]. Leningrad, Stroizdat Publ., 1939. 73 p.
6. Machinskiy V.D. *Teplotekhnicheskie osnovy stroitel'stva* [Thermotechnical fundamentals of construction]. Moscow, Stroizdat Publ., 1949. 327 p.
7. Semenov L.A. *Teploustoychivost' i pechnoe otoplenie zhilykh i obshchestvennykh zdaniy* [Thermal stability and furnace heating of residential and public buildings]. Moscow, Minstroymash Publ., 1950. 303 p.
8. Lykov A.V. *Teoreticheskie osnovy stroitel'noy teplofiziki* [Theoretical bases of construction Thermophysics]. Minsk, Academy of Sciences of Belarus Publ., 1961. 520 p.
9. Voronov A.A. *Osnovy teorii avtomaticheskogo upravleniya: Osobyie lineynye nelineynye sistemy* [The theory of automatic control: Special linear nonlinear systems]. Moscow, Energoizdat Publ., 1981. 304 p.
10. Voronov A.A. *Ustoychivost', upravlyaemost', nablyudaemost'* [Stability, controllability, observability]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 336 p.

*Received 21 November 2014*