

Научно-методический раздел

УДК 514.181.24+692.445

АРХИТЕКТУРНАЯ ОБОЛОЧКА НА ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ

В.А. Короткий, Е.А. Усманова

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

Предложен способ геометрического моделирования оболочки, опирающейся на пространственный четырехзвенный контур, содержащий сегменты конических сечений. Для формирования поверхности используется однопараметрическое множество кривых второго порядка с переменным эксцентриситетом. Управление формой оболочки обеспечивается изменением формы вспомогательных соприкасающихся линейчатых поверхностей. Дан пример построения составной оболочки на пространственном опорном контуре, содержащем звено с изломом. Выполнено сравнение оболочек, полученных с помощью предложенного способа и бикубической сплайн-интерполяции. Показано, что в случае применения сплайн-интерполяции на конструируемой поверхности могут возникать нежелательные осцилляции.

Ключевые слова: гладкая оболочка, сегмент конического сечения, кинематический способ, образующая кривая, направляющая кривая, соприкасающаяся поверхность.

Исследования в области моделирования архитектурных поверхностей (оболочек), удовлетворяющих заданным условиям формообразования или эстетическим критериям, в последнее время заметно смещаются в направлении использования средств и методов вычислительной геометрии [1, 2].

Тем не менее, при формировании однозначно заданных поверхностей, не имеющих больших градиентов по отношению к некоторой базовой плоскости, графические или графоаналитические алгоритмы могут оказаться предпочтительнее вычислительных методов [3, 4].

Постановка задачи. Дан прямоугольный в плане пространственный замкнутый контур $ABCD$, фронтальные звенья AB и CD которого – дуги кривых второго порядка, а боковые звенья AD и BC – произвольные гладкие кривые (рис. 1). Требуется построить непрерывную гладкую (не имеющую изломов) оболочку, опирающуюся на данный контур.

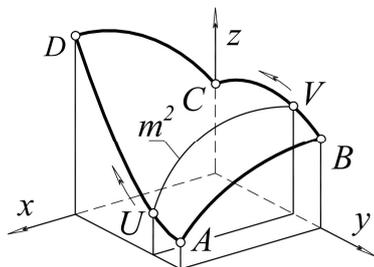


Рис. 1. Опорный контур

Для решения задачи предлагается использовать кинематический способ формирования поверхности, в соответствии с которым кривая m^2 , называемая образующей, скользит по направляющим AD и BC , плавно изменяя свою форму от дуги конического сечения AB до дуги CD .

Потребуем, чтобы образующая m^2 во всех своих положениях была кривой второго порядка. Кривая второго порядка на плоскости обладает пятью степенями свободы, поэтому для управления формой образующей m^2 следует указать пять условий, определяющих положение этих элементов (точек и касательных) в зависимости от некоторого параметра u . Конструируемая поверхность имеет прямоугольное в плане основание, ориентированное по осям x и y декартовой системы координат, что позволяет в качестве параметра u принять координату y . Данному значению параметра $u=y$ соответствуют две точки U, V на боковых направляющих звеньях AD и BC , через которые должна пройти образующая. Это условие уменьшает степень свободы образующей на две единицы. Задавая в точках U, V касательные к образующей, «отнимаем» у нее еще две степени свободы. Чтобы зафиксировать единственную оставшуюся степень свободы образующей m^2 , следует указать какую-либо дополнительную направляющую l , которая назначается в соответствии с архитектурными (техническими, эстетическими) требованиями, предъявляемыми к поверхности.

Пусть, например, оболочка, натягиваемая на контур $ABCD$, должна пройти через выпуклую направляющую $l=IJ$, плоскость которой параллельна плоскостям боковых звеньев контура (рис. 2, а). Укажем две вспомогательные линейчатые поверхности η, ψ с плоскостью параллелизма xz и с направляющими AD, k и BC, e . В частности, если k – прямая линия, а e – гладкая кривая, то $\eta(AD, k)$ – коноид, а $\psi(BC, e)$ – цилиндроид. Потребуем, чтобы конструируемая оболочка касалась коноида η в точках звена AD и цилиндроида ψ в точках звена BC . Это требование обеспечивает однозначность определения касательных к обра-

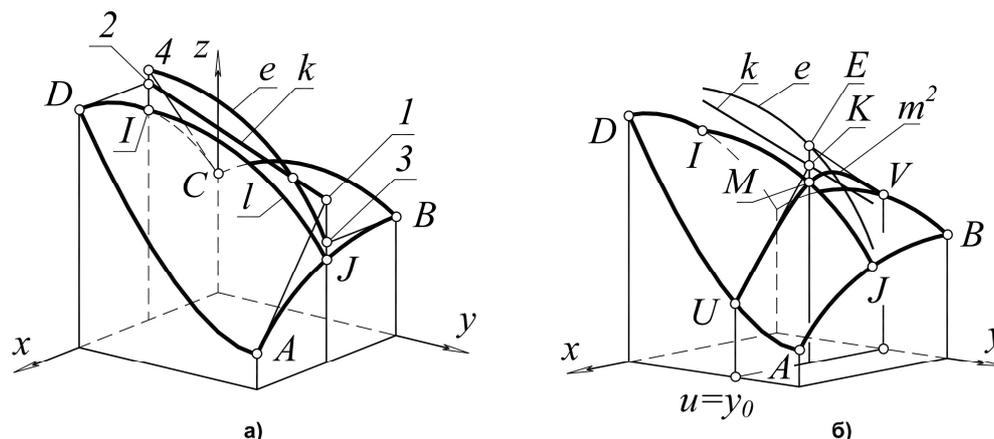


Рис. 2. Определитель поверхности: а – графическая часть; б – алгоритмическая часть

зующей m^2 в точках U, V , «пробегающих» по боковым звеньям контура.

Точки пересечения направляющей k с плоскостями фронтальных звеньев AB и CD должны быть инцидентны касательным, проведенным к этим звеньям в узлах A и D , а точки пересечения направляющей e с плоскостями фронтальных звеньев должны быть инцидентны касательным к звеньям AB, CD в узлах B и C (см. рис. 2, а). Выполнение указанного условия необходимо для обеспечения непрерывности и гладкости конструируемой оболочки. Изменяя форму и положение кривых k, e , можно управлять «полнотой» конструируемой оболочки.

Покажем, что этими условиями (тремя направляющими AD, BC, IJ и двумя соприкасающимися линейчатыми поверхностями η и ψ), полностью определена единственная поверхность. Согласно алгоритму формирования поверхности, произвольному значению параметра $u=y_0$ отвечают точки U, V на боковых звеньях контура, две касательные UK и VE в этих точках (здесь K и E – точки пересечения линий k, e с плоскостью y_0) и точка M пересечения направляющей IJ с плоскостью y_0 (рис. 2, б). В плоскости y_0 получаем пять элементов (три точки U, V, M и две прямые UK, VE), полностью определяющие единственную кривую второго порядка – образующую m^2 конструируемой оболочки (см. рис. 2, б). Коника m^2 , ее центр, главные диаметры и асимптоты (если они есть) автоматически определяются с помощью программы [5].

Изменяя параметр $u=y$, получаем однопараметрическое множество кривых второго порядка m^2 , которые формируют непрерывную поверхность, проходящую через заданный контур $ABCD$. Действительно, если $u=u_A$, где u_A – координата u узла A , то точки $U=A, V=B, M=J$ и касательные $A-I$ и $B-3$ определяют коническое сечение AJB – фронтальное звено заданного контура. Аналогично, если $u=0$, получаем другое фронтальное звено данного контура – кривую второго порядка DIC (см. рис. 2, а). Следовательно, образующая m^2 ,

скользя по боковым звеньям контура, непрерывно меняет свою форму от сегмента конического сечения AJB до сегмента DIC , оставаясь во всех промежуточных положениях кривой второго порядка.

Таким образом, конструируемая поверхность определяется не двухпараметрическим множеством табулированных точек (как это реализуется в случае применения бикубической интерполяции), а однопараметрическим множеством кривых второго порядка m^2 . Между точками плана оболочки (плоскости xy) и точками самой оболочки устанавливается взаимно однозначное соответствие, что доказывает ее непрерывность и однозначность. Гладкость оболочки, понимаемая как наличие единственной касательной плоскости в любой точке поверхности (дифференцируемость), есть следствие гладкости управляющих элементов графической части определителя поверхности (направляющих линий и соприкасающихся поверхностей).

Рассмотрим три варианта формирования поверхности – с выпуклой (рис. 3, а), прямолинейной (рис. 3, б) и вогнутой (рис. 3, в) дополнительной направляющей l , плоскость которой параллельна плоскостям боковых звеньев AD, BC исходного контура. В соответствии с вышеописанным алгоритмом, во всех вариантах получена непрерывная гладкая поверхность, образованная однопараметрическим множеством кривых второго порядка, изменяющих свою форму от дуги эллипса AB до дуги CD .

Заметим, что поверхность с вогнутой направляющей содержит две кривые второго порядка, выродившиеся в прямолинейные образующие a и c (см. рис. 3, в). Очевидно, наличие прямолинейных элементов в каркасе поверхности следует считать ее технологическим преимуществом.

Поставленная задача может быть решена с помощью стандартной процедуры двумерной интерполяции (loft, лфтинг, «по сечениям»), имеющейся в любой графически ориентированной САПР. Для этого достаточно указать звенья AB и CD как направляющие, а кривые AD, l, BC как сечения искомой поверхности, и обратиться к про-

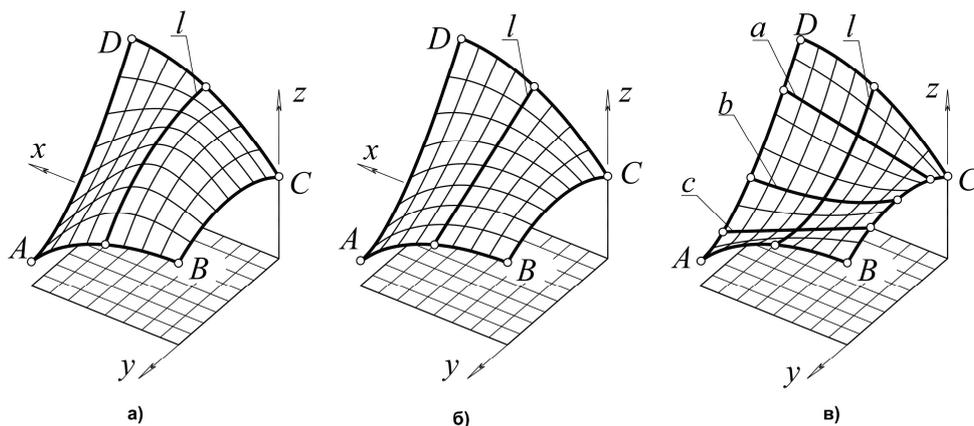


Рис. 3. Оболочка на замкнутом контуре: а – выпуклая направляющая; б – прямолинейная направляющая; в – вогнутая направляющая

цедуре loft. Выполним сравнение результатов геометрического моделирования оболочки, сформированной двумя способами: 1) с помощью вычислительной команды loft; 2) с помощью вышеописанного графического алгоритма. Для сравнения выберем оболочку с вогнутой направляющей (см. рис. 3, в), выполним ее моделирование указанными способами и сравним профили полученных поверхностей в фронтальных плоскостях $y=y_a$, $y=y_b$, $y=y_c$, проходящих через образующие a , b , c . Согласно предложенному графическому алгоритму, в сечениях $y=y_a$, $y=y_c$ содержатся прямолинейные образующие a , c (см. рис. 3, в). Но loft-процедура их «не замечает», а формирует поверхность, у которой в этих сечениях возникают заметные осцилляции a' и c' (рис. 4), что следует считать технологическим и эстетическим недостатком оболочки, сконструированной с применением лофтинга. В произвольном сечении $y=y_b$ также отмечаются нежелательные «волны» b' вместо сегмента b кривой второго порядка.

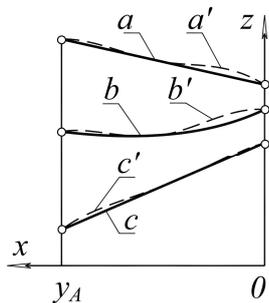


Рис. 4. Сравнение профилей

Пример 1. Оболочка на плоском основании. Пусть требуется построить оболочку, опирающуюся на плоский контур $MNKL$ и проходящую через сегменты эллипса e и гиперболы g , лежащие в профильных плоскостях. В плоскости симметрии zx указана коньковая (водораздельная) линия l конструируемой поверхности (рис. 5). Поверхность образована движением образующей

(кривой второго порядка), скользящей по направляющей l и плавно изменяющей свою форму от гиперболы g до эллипса e . Три точки образующей, лежащие на направляющих MN, KL, l (три степени свободы), определяются значением параметра $u=x$. Для фиксации двух оставшихся степеней свободы указываем симметрично расположенные коноиды $\eta(MN, M'T')$ и $\psi(KL, L'T')$ с плоскостью параллелизма yz , соприкасающиеся с конструируемой оболочкой вдоль сторон MN, KL основания. Прямолинейные образующие $M'T'$ и $L'T'$ соприкасающихся коноидов проходят через точку T' пересечения касательных к входному опорному контуру g и через точки M', L' на вертикальных касательных к выходному контуру e . При изменении положения точек M', L' меняется «полнота» конструируемой оболочки.

Пример 2. Эллиптический купол. Требуется натянуть оболочку на коньковую линию l и на опорные эллипсы e_1, e_2 (рис. 6). Поверхность образована вращением кривой второго порядка m^2 вокруг оси AB , где A, B – точки пересечения кривых e_1, e_2 . Поверхность купола симметрична относительно плоскости zx , поэтому в процессе вращения вершина образующей m^2 «скользит» по направляющей l ; при этом m^2 плавно меняет свою форму от e_1 до e_2 , во всех промежуточных положениях оставаясь кривой второго порядка. Направляющие поверхности η и ψ вырождаются в плоскости, касающиеся конструируемой оболочки в узлах A, B .

Пример 3. Составная поверхность. Если какое-либо звено четырехзвенного опорного контура содержит излом, то поверхность «сшивается» из четырехугольных порций. Пусть требуется натянуть оболочку на пространственный контур, составленный из дуг окружностей $AKD, BK'C$, ломаной линии ALB и отрезка CD (рис. 7). В качестве дополнительных геометрических условий указаны гладкие кривые: коньковая линия KSK' , горловая линия OSL , состоящая из дуги e эллипса и отрезка SL (с гладкостью первого порядка в стыковой точке S), и дополнительная направляющая d .

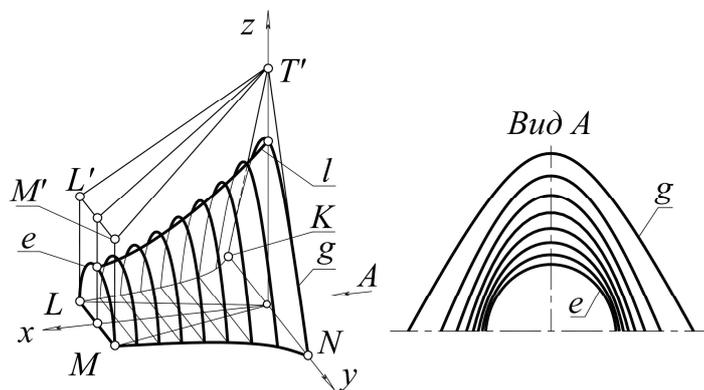


Рис. 5. Оболочка на плоском основании

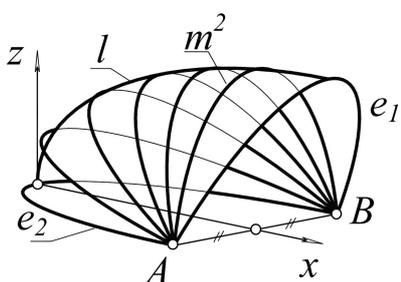


Рис. 6. Эллиптический купол

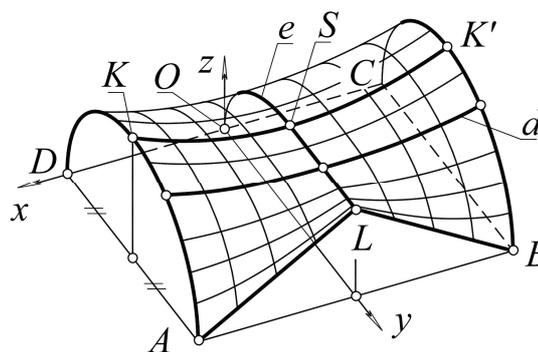


Рис. 7. Составная оболочка

Порция поверхности на контуре $AKSL$ формируется подвижной образующей (сегментом кривой второго порядка), меняющей свою форму (при изменении параметра $u=x$) от дуги AK окружности до отрезка SL . Образующая скользит по направляющим KS , d и AL , соприкасаясь с цилиндрической поверхностью $\eta(KSK', Y_\infty)$, где Y_∞ – несобственная точка координатной оси y . Другая соприкасающаяся поверхность ψ – косяя плоскость с плоскостью параллелизма uz и направляющими AL и m (прямая m , пересекающая горизонтальную прямую SL и вертикальную прямую AZ_∞ , на рис. 7 условно не показана). Три направляющие (KS , d и AL) совместно с двумя соприкасающимися поверхностями η и ψ полностью определяют порцию оболочки на контуре $AKSL$.

Аналогично формируем порцию поверхности на контуре $ODKS$ и «сшиваем» порции (с учетом симметрии относительно плоскости uz). Получаем составную поверхность с гладкостью первого порядка вдоль коньковой линии KSK' и с изломом вдоль направляющего отрезка SL . Произвольная образующая, лежащая в какой-либо профильной плоскости $x=\text{const}$ – составная кривая, состоящая из двух сегментов кривых второго порядка. В стыковой точке, лежащей на коньковой линии, оба сегмента имеют общую горизонтальную касательную, совпадающую с соответствующей образующей соприкасающейся цилиндрической поверхности η .

Заключение. Предложен графоаналитический способ геометрического моделирования по-

верхностей, в соответствии с которым поверхность формируется как однопараметрическое множество сегментов конических сечений с переменным эксцентриситетом. Способ может найти применение при проектировании большепролетных архитектурных оболочек неканонических форм.

Литература

1. Голованов, Н.Н. Геометрическое моделирование: научное издание / Н.Н. Голованов. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2012. – 472 с.
2. Шикин, Е.В. Кривые и поверхности на экране компьютера: учебное пособие / Е.В. Шикин, Л.И. Плисс. – М.: Диалог-МИФИ, 1996. – 240 с.
3. Кривошапко, С.Н. Аналитические поверхности в архитектуре зданий, конструкций и изделий: учебное пособие / С.Н. Кривошапко, И.А. Мамаева. – М.: Книжный дом «Либроком», 2012. – 328 с.
4. Михайленко, В.Е. Формообразование оболочек в архитектуре: монография / В.Е. Михайленко, В.С. Обухова, А.Л. Подгорный. – Киев: Изд-во «Будівельник», 1972. – 205 с.
5. Программа для ЭВМ «Построение кривой второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых» / В.А.Короткий, правообладатель ГОУ ВПО «ЮУрГУ», свидетельство о государственной регистрации № 2011611961 от 04.03.2011.

Короткий Виктор Анатольевич, кандидат технических наук, доцент кафедры графики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), korotkiyva@susu.ac.ru.

Усманова Екатерина Александровна, кандидат технических наук, доцент кафедры графики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), usmanovaea@susu.ac.ru.

Поступила в редакцию 13 ноября 2014 г.

ARCHITECTURAL SHELL ON THE CLOSED CIRCUIT

V.A. Korotkiy, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, korotkiiva@susu.ac.ru,

E.A. Usmanova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, usmanovaea@susu.ac.ru

The method of geometric shell modeling resting on four spatial contour with-holding segments of conic sections is given. For the surface forming one-parameter set of curves of the second order with variable eccentricity is used. Shell form management is provided by changing the shape of the auxiliary ruled surfaces. The example of construction of a composite shell for spatial reference circuit with-holding link with a break is given. The comparison of the membranes obtained by the proposed method and bicubic spline interpolation is performed. It is shown that when using spline interpolation on the design surface one can see unacceptable oscillations.

Keywords: smooth shell, segment of a conic section, kinematic method, forming curve, guide curve, contacting surface.

References

1. Golovanov N.N. *Geometricheskoe modelirovanie* [Geometrical Modeling]. Moscow, Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 2012. 472 p.
2. Shikin E.V., Pliss L.I. *Krivye i poverkhnosti na ekrane komp'yutera* [Curves and Surfaces for Computer Screen]. Moscow, Dialog-MIFI Publ., 1996. 240 p.
3. Krivoshapko S.N., Mamaev I.A. *Analiticheskie poverkhnosti v arkhitekture zdaniy, konstruksiy i izdeliy* [Analytic Surfaces in the Architecture of the Buildings, Structures and Products]. Moscow, Book House "Librokom" Publ., 2012. 328 p.
4. Mihaylenko V.E., Obuhova V.S., Podgorniy A.L. *Formoobrazovanie obolochek v arkhitekture* [The Formation of Shells in Architecture: Monograph]. Kiev, Budivel'nik Publ., 1972. 205 p.
5. Korotkiy V.A. *Programma dlya EVM "Postroyenie krivoy vtorogo poryadka, prokhodyashchey cherez dannye tochki i kasayushcheysya dannykh pryamykh"* [The Computer Program "Building a Conic Curve Passing through These Points and Related Data Direct"]. Certificate of state registration, no. 2011611961. Application 04.03.2011.

Received 13 November 2014

БИБЛИОГРАФИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ СТАТЬИ

Короткий, В.А. Архитектурная оболочка на замкнутом контуре / В.А. Короткий, Е.А. Усманова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2015. – Т. 15, № 2. – С. 47–51.

REFERENCE TO ARTICLE

Korotkiy V.A., Usmanova E.A. Architectural Shell on the Closed Circuit. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2015, vol. 15, no. 2, pp. 47–51. (in Russ.)