

# Теория расчета строительных конструкций

УДК 624.012.4:624.93+624.04:004

## УЧЕТ НАГЕЛЬНОГО ЭФФЕКТА ПОПЕРЕЧНОЙ АРМАТУРЫ В СБОРНО-МОНОЛИТНЫХ БАЛКАХ С БЕСШПОНОЧНЫМ КОНТАКТОМ

С.А. Сонин

Приведена методика расчета сборно-монолитных балок с бесшпоночным контактом и передачей нагрузки на сборную часть с использованием МКЭ, позволяющая учесть влияние нагельного эффекта поперечной арматуры на напряженно-деформированное состояние контакта между бетонами и конструкции в целом.

Ключевые слова: метод конечных элементов (МКЭ), связующий элемент (СЭ), поперечная арматура, контакт, сборно-монолитная балка, нагельная сила, деформация сдвига.

Существуют различные способы учета поперечной арматуры (хомутов) в методе конечных элементов (МКЭ). В ряде работ поперечная арматура учитывается неявно, размазыванием ее по объему конечного элемента (КЭ). Такой способ не позволяет определить напряженно-деформированное состояние хомутов и оценить их работу в качестве нагелей. В способе «наложения» жесткостей, который принят в настоящей работе, поперечная арматура, разбитая на линейные конечные элементы, жестко объединяется в узлах с элементами бетона, что не позволяет оценить взаимные смещения между хомутами и бетоном, происходящие при работе реальных конструкций (рис. 1).

В данной работе принят метод учета поперечной арматуры, заключающийся в разбиении стержней поперечной арматуры на линейные КЭ и объединении узлов КЭ хомутов с соответствующими узлами КЭ бетона связующими элементами (СЭ) в виде двух безразмерных пружин (рис. 2), направленных вдоль стержня (хомута) и перпендикулярно ему.

Задача решается методом последовательных приближений следующим образом:

– из выражения

$$\mathbf{KV} = \mathbf{P} + \mathbf{\Phi}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{K}$  – матрица жесткости расчетной схемы конструкции;

$\mathbf{V}$  – матрица-столбец неизвестных перемещений узлов;

$\mathbf{P}$  – матрица-столбец внешних сил, приложенных к узлам расчетной схемы;

$\mathbf{\Phi}$  – вектор фиктивной нагрузки (матрица-столбец), учитывающий проявление пластических свойств бетона,

вычисляются перемещения  $\mathbf{V}$  узлов бетона;

– определяются перемещения узлов хомутов  $\mathbf{V}_x$  решением отдельных систем уравнений, составленных для каждого стержня

$$\mathbf{K}_{xb} \cdot \mathbf{V}_x + \mathbf{K}_{cs}^x \cdot \mathbf{V}' = \mathbf{0}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{K}_{xb}$  – матрица жесткости отдельного поперечного стержня (хомута);

$\mathbf{K}_{cs}^x$  – матрица жесткости СЭ между узлами хомута и соответствующими узлами бетона;

$\mathbf{V}'$  – перемещения узлов бетона, примыкающих к узлам хомутов ( $\mathbf{V}'$  выбираются из общего массива  $\mathbf{V}$ );

– вычисляются силы взаимодействия поперечной арматуры с бетоном

$$\mathbf{P}_{xb} = (\mathbf{V}' - \mathbf{V}_x) \cdot \mathbf{K}_{cs}^x, \quad (3)$$

– найденные силы  $\mathbf{P}_{xb}$  суммируются с правой частью уравнения (1) и цикл повторяется;

– процесс последовательных приближений заканчивается после достижения заданной точности по  $\mathbf{V}_x$ , после чего окончательно вычисляются напряжения в КЭ поперечной арматуры:

– нормальные напряжения

$$\sigma_{x,i} = \frac{V_{x,i+1} - V_{x,i}}{l_{x,i}} \cdot E_{sx}, \quad (4)$$

– условные касательные напряжения сцепления

$$\tau_{x,i} = \frac{P_{xb,i}}{S_{x,i}}. \quad (5)$$

Здесь  $i$  – номер КЭ хомута, для которого вычисляются напряжения;

$V_{x,i+1}, V_{x,i}$  – вертикальные перемещения узлов  $i$ -го КЭ хомута;

$l_{x,i}$  – длина  $i$ -го КЭ хомута;

$E_{sx}$  – модуль упругости арматуры хомута;

$S_{x,i}$  – площадь боковой поверхности хомута в пределах одного КЭ.

Свойства продольных связей между узлами хомутов и бетона описываются дифференциальным законом сцепления [1]. Использована методика определения их жесткостей, принятая в работе [2].

Жесткость продольной связи определяется по формуле

$$K_x = S_s \cdot A_1 \cdot e^{-C_1 g^2}, \quad (6)$$

где  $S_s$  – площадь боковой поверхности арматуры;

$$A_1 = e^{0,5} \cdot \frac{\tau_m}{g_m}; C_1 = \frac{1}{2g_m^2},$$

$g_m$  – взаимное смещение арматуры и бетона, соответствующее максимальному напряжению сцепления  $\tau_m$ .

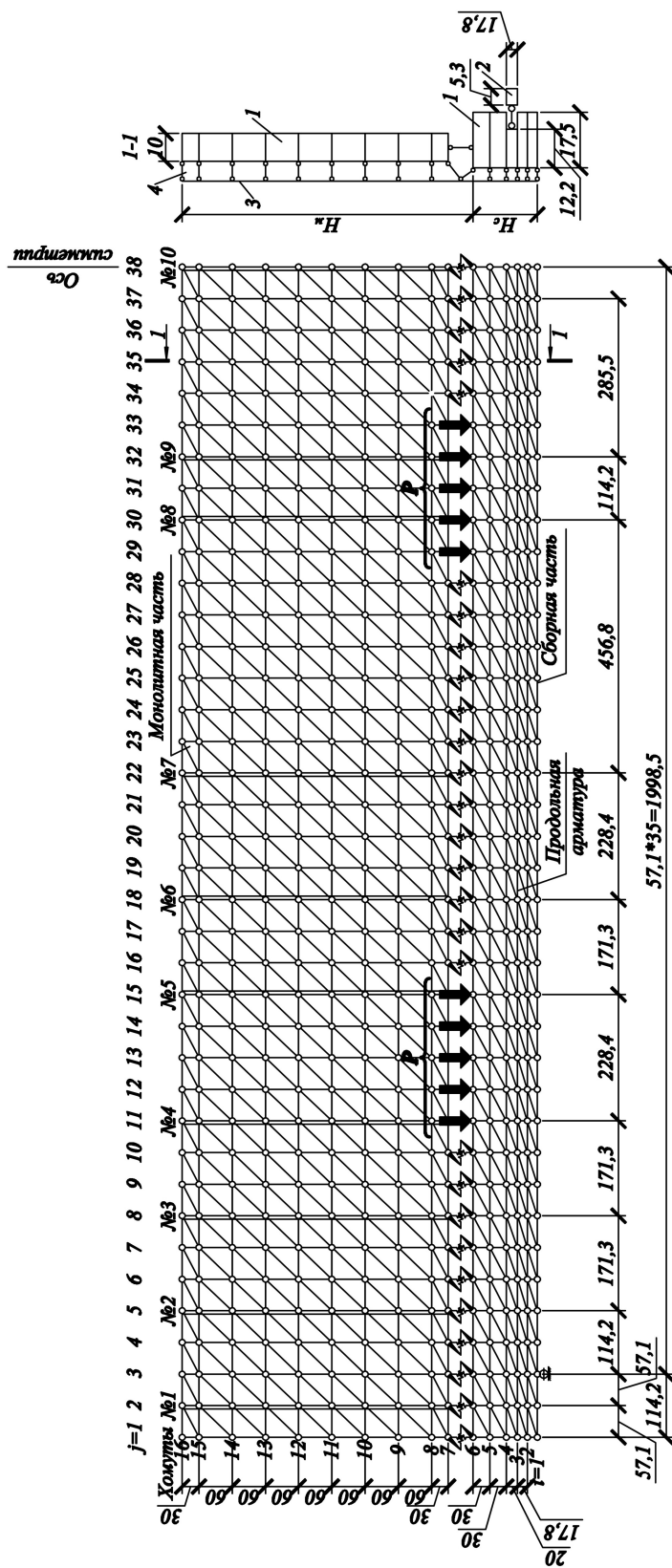


Рис. 1. Расчетная схема сборно-монолитной железобетонной балки:  
 1 – КЭ бетона; 2 – КЭ продольной арматуры; 3 – КЭ поперечной арматуры; 4 – связующие элементы

Жесткости поперечных (по отношению к оси хомута) связей СЭ определяются отдельно для стадий работы конструкции без трещин и с трещинами.

В стадии работы конструкции без трещин жесткости поперечных связей между узлами хомута и узлами бетона (кроме узлов, расположенных на берегах контакта между «старым» и «новым» бетоном) принимаются постоянными и достаточно большими, считая, что взаимными поперечными смещениями арматуры и бетона можно пренебречь. Хомуты находятся в жестком соединении с бетоном в поперечном по отношению к ним направлении.

Как показывают экспериментальные исследования, после образования трещин каждый хомут, пересекающий трещину, испытывает действие не только продольных, но и нагельных сил, стремящихся срезать хомут в поперечном направлении. Однако, вследствие смятия бетона под хомутом, последний не срезается, а изгибается, работая как стержень, зашпеленный в бетоне, к которому приложена поперечная сила. В данной работе этими силами являются усилия в поперечных связях.

Рассматривая хомут как стержень, зашпеленный с двух сторон с пролетом  $l_x$  (см. рис. 2), можно определить величину нагельной силы  $T_{xb}$  от

смещения зашпеленных концов, как реакцию, действующую в зашпелении

$$T_{xb} = \frac{12 \cdot E_{sx} \cdot I_x}{l_{3(x)}^3} \cdot \Delta'_x, \tag{7}$$

где  $I_x$  – момент инерции хомута;

$l_{3(x)}$  – длина условного пролета;

$\Delta'_x$  – взаимное горизонтальное перемещение точек зашпеления хомута.

При определении величины  $l_{3(x)}$  эпюра давления на бетон под хомутом принимается треугольной (рис. 3).

Тогда

$$N_c = R_{bn} \cdot \frac{l_{3(x)} \cdot d_x}{4}, \tag{8}$$

где  $d_x$  – диаметр хомута.

Приравнявая выражения (6) и (7), получаем формулу для определения величины  $l_{3(x)}$

$$l_{3(x)} = \sqrt[4]{48 \cdot \frac{E_{sx} \cdot I_x}{R_{bn} \cdot d_x} \cdot \Delta'_x}. \tag{9}$$

Жесткости связей определяются из выражений

$$\begin{cases} K_{xb,x}^{(H)} = \frac{T_{xb}}{W^{(H)} - W_{x,i}}; \\ K_{xb,x}^{(B)} = \frac{T_{xb}}{W^{(B)} - W_{x,i}}, \end{cases} \tag{10}$$

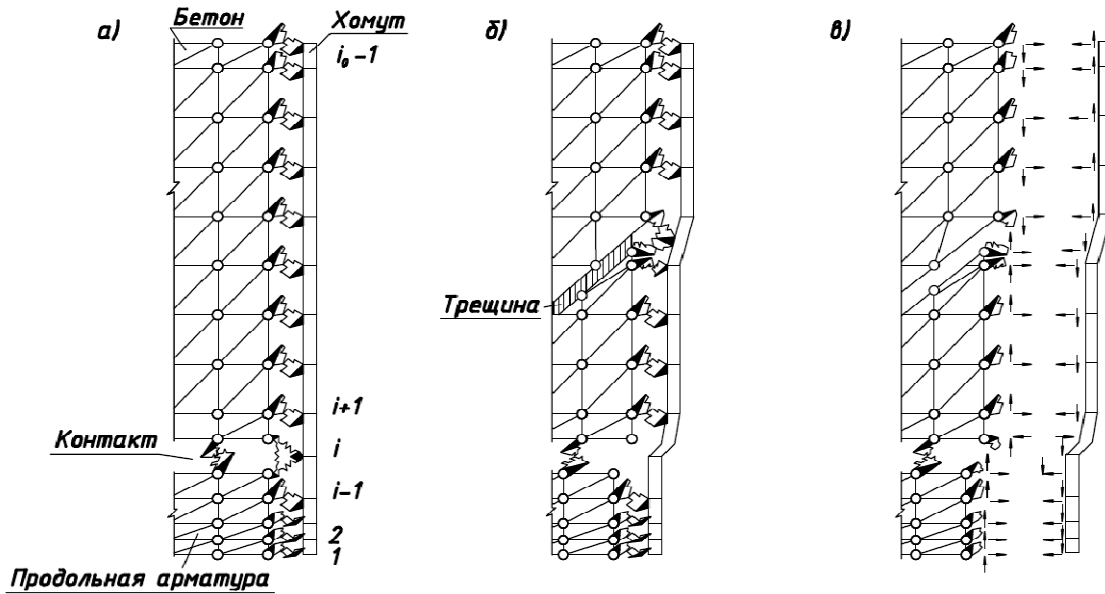


Рис. 2. Расчетная схема балки с хомутом: а – поперечный разрез балки без трещин; б – поперечный разрез балки с трещиной; в – расчленение на отдельные подсистемы

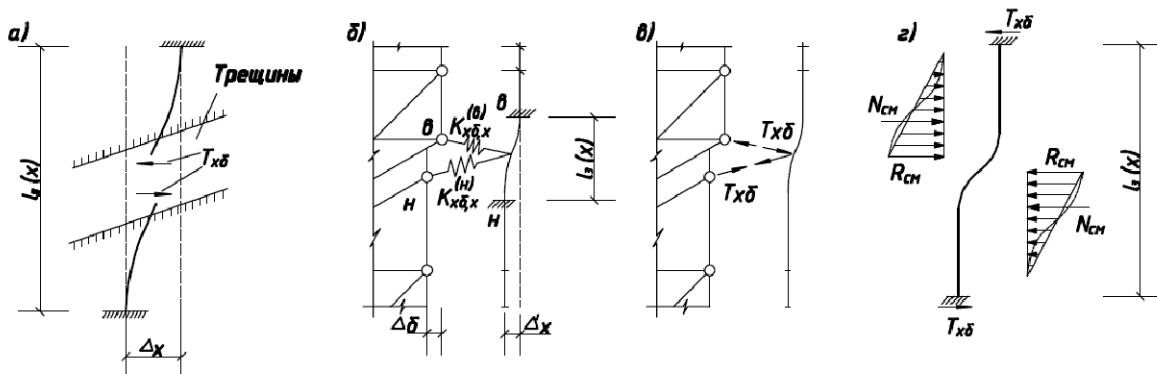


Рис. 3. К учету работы поперечной арматуры (хомутов)

## Теория расчета строительных конструкций

где  $K_{xb,x}^{(H)}$ ,  $K_{xb,x}^{(B)}$  – соответственно, жесткости поперечных связей нижнего и верхнего СЭ (рис. 2, б);

$W^{(B)}$ ,  $W^{(H)}$  – соответственно, горизонтальные перемещения верхнего и нижнего узлов бетона на берегах трещины;

$W_{x,i}$  – горизонтальное перемещение  $i$ -го узла хомута.

Вычисления начинаются со второго приближения первого шага нагружения и выполняются для каждого хомута отдельно.

Порядок вычисления следующий.

1. Формируются массивы продольных и поперечных жесткостей СЭ между узлами бетона и хомута ( $K_{xb,x}$ ,  $K_{xb,y}$ ). При этом, в связи с тем, что продольная арматура в реальной конструкции выполняет роль анкера для хомута, введено условие об отсутствии взаимных смещений бетона и хомута в местах их пересечений с продольной арматурой, что достигается заданием высокой жесткости СЭ в крайних узловых точках хомута. Жесткости СЭ в этих узлах приняты равными:

$$K_{xb,x} = 1 \cdot 10^{13} \text{ Н/см}, K_{xb,y} = 1 \cdot 10^{13} \text{ Н/см}.$$

Для остальных СЭ (кроме СЭ, объединяющих узлы хомута с узлами бетона, расположенными на контакте между бетонами), при отсутствии трещин жесткости поперечных связей  $K_{xb,x}$  принимаются постоянными и равными  $1 \cdot 10^8$  Н/см, а жесткости продольных связей вычисляются по формуле (6). При этом площадь боковой поверхности арматуры  $S_3$  заменяется на величину  $S_x$ , определяемую по формуле

$$S_x = m_x \cdot \frac{\pi d_x}{b_{\text{п}}} \left( \frac{\Delta y_i + \Delta y_{i+1}}{2} \right), \quad (11)$$

где  $\Delta y_i$ ,  $\Delta y_{i+1}$  – размеры нижнего и верхнего КЭ хомута, примыкающих к рассматриваемому узлу;  $m_x$  – количество хомутов в сечении по ширине балки;  $b_{\text{п}}$  – ширина сборной части.

Величина  $g$  в формуле (6) определяет взаимные вертикальные смещения узлов бетона  $U_{b,i}$  и хомута  $U_{x,i}$ , объединенных связью. При вычислении жесткостей поперечных связей СЭ, объединяющих узлы хомута с узлами бетона, расположенными на контакте между бетонами (формула 10), предварительно по формуле (7) определяются величины  $T_{xb}$ . При этом значение  $l_{3(x)}$  вычисляется по формуле (9). Аналогично вычисляются жесткости поперечных связей, объединяющие узлы бетона, расположенные на берегах трещины, с узлами хомута.

2. Формируется матрица жесткости системы линейных уравнений для хомута (матрица  $K_{xb}$  в выражении (2)). При этом, в виду симметрии, рассматривается лишь верхняя ее часть.

3. Формируется матрица-столбец свободных членов системы линейных уравнений для хомута. Свободными членами являются усилия в соответствующих связях, определяемые по формуле

$$R_i = K_{xb,i} \cdot v_{b,i}.$$

$$\text{Здесь } R_i = \begin{bmatrix} R_{x,i} \\ R_{y,i} \end{bmatrix}; K_{xb,i} = \begin{bmatrix} K_{xbx,i} \\ K_{xby,i} \end{bmatrix}; v_{b,i} = \begin{bmatrix} w_{b,i} \\ U_{b,i} \end{bmatrix},$$

где  $R_{x,i}$ ,  $K_{xbx,i}$  – усилие в поперечной связи для узла хомута и ее жесткость;

$R_{y,i}$ ,  $K_{xby,i}$  – усилие в продольной связи для узла хомута и ее жесткость;

$w_{b,i}$ ,  $U_{b,i}$  – горизонтальное и вертикальное перемещения узла бетона, объединенного с узлом хомута  $i$ .

В случае объединения узла хомута с двумя узлами бетона (рис. 4, б), при определении свободных членов вычисляется суммарное усилие в основной и дополнительной связях.

4. Выполняется решение системы линейных уравнений для хомута методом Гаусса, в результате чего определяются новые значения перемещений узлов хомута  $U_{x,i}$ ,  $w_{x,i}$ .

5. Используя вновь полученные перемещения узлов хомута, а также жесткости СЭ и перемещения соответствующих узлов бетона, по формуле (3) определяются силы взаимодействия  $R_{xb}$  между узлами хомута и бетона, которые используются на следующем этапе формирования системы линейных уравнений для узлов бетона.

6. По формулам (4) и (5) определяются нормальные напряжения в хомуте  $\sigma_{x,i}$  и условные касательные напряжения сцепления по его поверхности  $\tau_{x,i}$ .

Вышеприведенный порядок вычислений повторяется для каждого хомута.

В результате расчета сборно-монолитной балки установлено, что наличие хомутов в расчетной схеме существенно влияет на величину деформаций сдвига по контакту. На рис. 4 представлено распределение деформаций сдвига по контакту, полученное при нормативной нагрузке (линия 1) и то же распределение, полученное после выполнения последней итерации, когда достигнута сходимость по всем показателям (линия 2).

Видно, что включение хомутов в работу, которое проявляется в виде передачи нагельной силы  $T_{xb}$  на бетон, уменьшает величину деформаций сдвига. Наиболее существенно это проявляется там, где уже образовалась трещина по контакту. С ростом нагрузки величина силы  $T_{xb}$  растет (см. рис. 4, б).

Таким образом, установлено, что хомуты в местах пересечения ими контакта по длине балки работают неравномерно. До образования трещин по контакту величина растягивающих напряжений в них не превышала 30,0 МПа. После прохождения трещины по контакту напряжения в хомутах, пересекающих в этом месте контакт, резко возрастают, и практически вся внешняя сила воспринимается здесь хомутами. Нагельные силы, возникающие в хомутах, сдерживают проявление деформаций сдвига, причем особенно существенно после появления трещин по контакту.

### Выводы

Предлагаемая методика расчета сборно-монолитных балок с бесшпоночным контактом и передачей нагрузки на сборную часть с использованием МКЭ позволяет учесть влияние нагельного эффекта поперечной арматуры на напряженно-деформированное состояние контакта между бетонами и конструкции в целом.

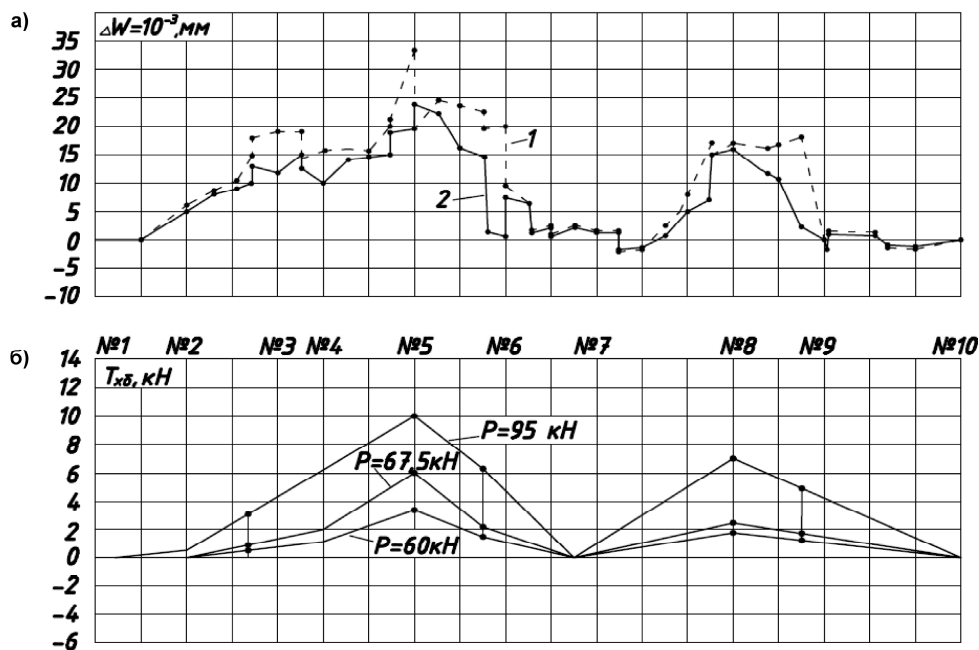


Рис. 4. Влияние хомутов на распределение абсолютных деформаций сдвига  $\Delta W$  контактного слоя:  
а – абсолютные деформации сдвигов бетона контакта; 1 – без учета хомутов; 2 – с учетом хомутов;  
б – величина нагельной силы  $T_{xb}$

#### Литература

1. Оатул, А.А. Теоретические и экспериментальные исследования сцепления с бетоном стержневой и канатной арматуры: дис. ... д-ра техн. наук / А.А. Оатул. – Челябинск, 1969. – 384 с.

2. Карякин, А.А. Расчет железобетонных балок методом конечных элементов с учетом пластичности бетона, образования трещин, дискретного расположения арматуры и ее сцепления с бетоном: дис. ... канд. техн. наук / А.А. Карякин. – Челябинск, 1978. – 289 с.

Сонин Сергей Анатольевич, кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций и инженерных сооружений, Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск. Тел.: 89507220010.

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Construction Engineering and Architecture"*  
2013, vol. 13, no. 1, pp. 17–21

## CONSIDERATION OF BINDERS DOWEL EFFECT IN COMPOSITE BEAMS WITH A KEYLESS CONTACT

S.A. Sonin

The article presents calculation method of composite beams with a keyless contact and transfer of load on the unit with use of finite elements method which allows taking into account influence of binders dowel effect on the strain-stress state of contact between concrete and a structure in whole.

Keywords: finite elements method, linking element, binder, contact, composite beam, dowel power, shear strain.

Sonin Sergey Anatolievich, candidate of engineering sciences, associate professor of Building Constructions and Engineering Structures Department, South Ural State University. Tel. +79507220010.

Поступила в редакцию 27 февраля 2013 г.