

Научно-методический раздел

УДК 681.327.11

3D-АЛГОРИТМЫ ТЕОРЕМЫ ПОЛЬКЕ – ШВАРЦА

А.Л. Хейфец

Разработаны компьютерные 3D-алгоритмы, позволяющие средствами современных графических редакторов воспроизвести задачу реконструкции основной теоремы аксонометрии. Рассмотрены основные известные варианты реконструкции. Дана их сравнительная оценка. Приведены примеры построений применительно к пакету AutoCAD.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, геометрическое моделирование, 3D-алгоритмы, аксонометрия, теорема Польке – Шварца, AutoCAD.

Введение

Компьютерное 3D-моделирование позволяет достаточно просто создавать и исследовать сложные пространственные модели. В качестве характерного примера рассмотрим теорему Польке – Шварца – основную теорему аксонометрии [1, 2], утверждающую, что «всякий невырождающийся полный четырехугольник можно рассматривать как параллельную проекцию тетраэдра наперед заданной формы».

Эта теорема излагается в курсе начертательной геометрии. Практическое значение имеет ее частный случай – теорема Польке, из которой следует, что оси аксонометрической проекции можно задать произвольно. То есть, наряду с наглядным изображением куба (рис. 1, а) теоретически возможны и его «странные» аксонометрические проекции (рис. 1, б, в).

Известен ряд вариантов доказательства рассматриваемой теоремы [1]. Оптимальным считается вариант Г.А. Шварца [1, 2]. Однако этот вариант и близкий к нему вариант Е.А. Глазунова [3] основаны на курсе аффинной геометрии, который инженерным специальностям вузов не преподается. Другие варианты доказательства: А.К. Власова [4] и М.В. Бурде [5], не требующие привлечения аффинной геометрии, – оказались забытыми. В связи с этим теорема Польке – Шварца в учебной литературе, за исключением [2], приводится без доказательства.

Прикладное и познавательное значение для учебного процесса имеет задача реконструкции, вытекающая из рассматриваемой теоремы. Например, нахождение размеров и пространственного положения куба, проекцией которого является одно из изображений, приведенных на рис. 1. Алгоритмы реконструкции повторяют алгоритмы доказательства теоремы и, как и те, имеют различную сложность и наглядность.

Цель работы: апробация алгоритмов реконструкции теоремы Польке – Шварца средствами современного компьютерного 3d-моделирования,

их оптимизация и сравнительная оценка применительно к учебному процессу.

Методика работы заключалась в реализации алгоритмов на базе пакета AutoCAD, как наиболее ориентированного среди пакетов САПР на решение задач теоретического плана в геометрическом моделировании.

1. Алгоритм Г.А. Шварца и А.К. Власова

Заданы произвольный тетраэдр (рис. 2, а) и произвольный плоский четырехугольник со своими диагоналями (рис. 2, б–д). Вершины тетраэдра и четырехугольника пронумерованы произвольным образом. Требуется расположить тетраэдр так, чтобы при параллельном проецировании он с точностью до подобия отобразился в четырехугольник при совпадении нумерации вершин. Последнее означает, что вершина 0 тетраэдра должна отобразиться в вершину 0_1 четырехугольника и т. д. При решении сохраняется форма тетраэдра, а его размеры можно равномерно масштабировать.

Рассмотрим пример реконструкции для варианта выпуклого четырехугольника (рис. 2, б). В других вариантах (рис. 2, в–д) построения аналогичны. Алгоритм реконструкции, вытекающий из доказательства, данного Г.А. Шварцем, и дополненный А.К. Власовым, следующий.

1. Примем одну из граней тетраэдра, например, грань $(1,2,3)$ за его основание и для наглядности построений установим тетраэдр основанием с плоскостью Π_1 , в которой расположен четырехугольник проекции (см. рис. 2, а, рис. 3, а). Грань, принимаемая за основание, не должна в проекции вырождаться в отрезок прямой, например, для вариантов (см. рис. 2, в, д) недопустимо в качестве основания тетраэдра выбрать грань $(0,1,3)$.

2. Определим направление проецирования как вектор $s = (0,0^*)$ (рис. 3, а, б) относительно тетраэдра из условия соответствия основания тетраэдра его проекции. Для этого дважды реализуем простое отношение трех точек. Если за основание тетраэдра

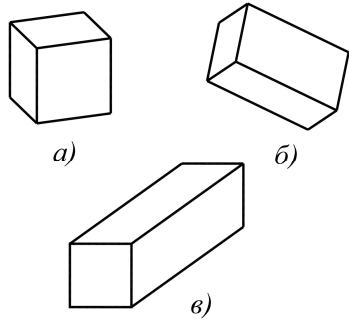


Рис. 1. Аксонометрические проекции куба

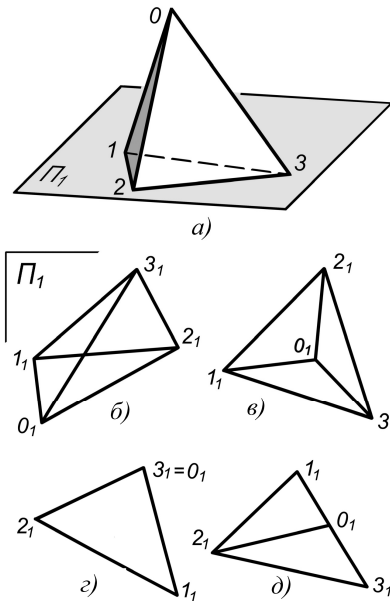


Рис. 2. Тетраэдр (а) и варианты его проекции (б–д)

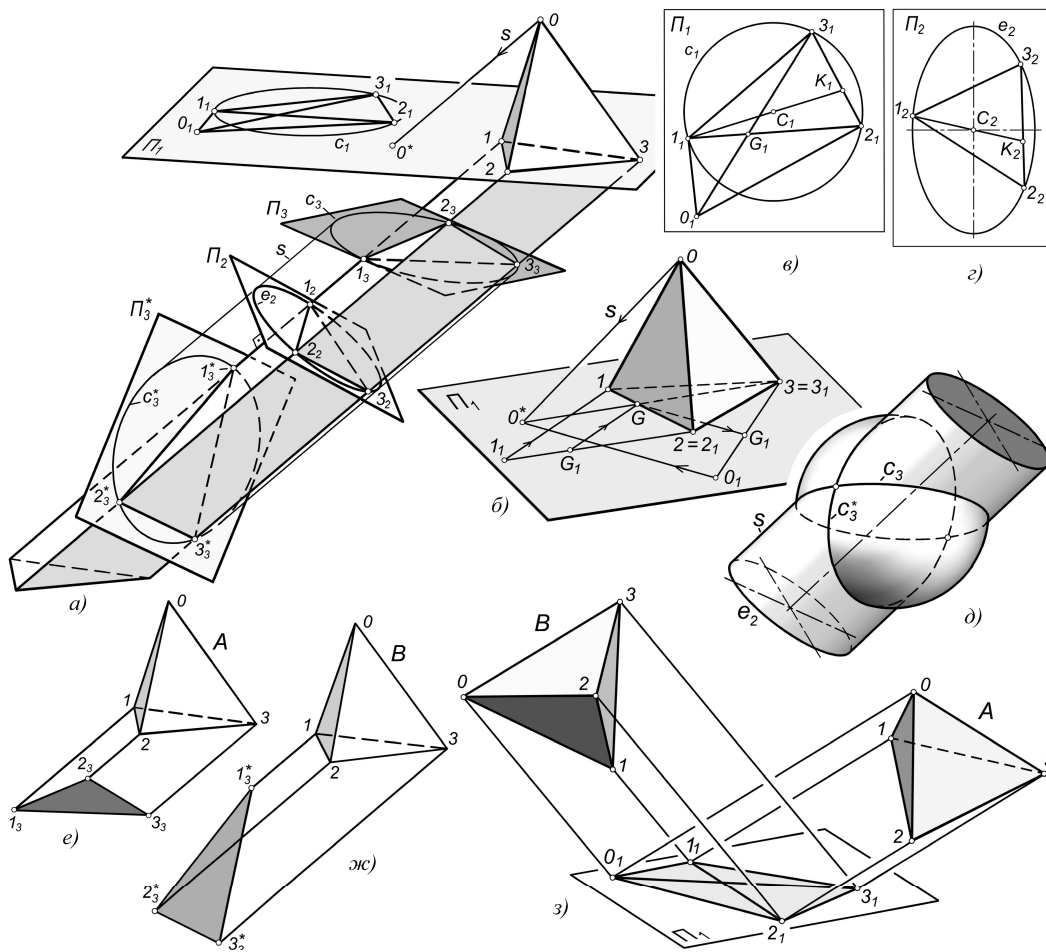


Рис. 3. Реконструкция тетраэдра: а – схема решения; б – определение направления ребер призмы; в – построения в плоскости Π_1 ; г – построения в плоскости нормального сечения призмы Π_2 ; д – определение плоскостей наклонных сечений призмы; е, ж – проецирующие модули; з – результат реконструкции

принята грань $(1,2,3)$ (рис. 3, б, в), то из отношения длин отрезков $|I_1, G_1| : |G_1, 2_1| = |I, G| : |G, 2|$ или в принятой форме записи $(I_1, G_1, 2_1) = (I, G, 2)$ находим точку G ребра $(1,2)$ тетраэдра. Для этого достаточно отрезок проекции $(I_1, 2_1)$ скопировать вместе с маркером точки G_1 , совместив точку проекции 2_1 и точку тетраэдра 2, затем провести параллельные отрезки (I_1, I) и (G_1, G) . Так же, из отношения $(3_1, G_1, 0_1) = (3, G, 0^*)$, находим точку 0^* .

3. Строим наклонную трехгранную призму (см. рис. 3, а), ребра которой параллельны найденному вектору s и будут проецирующими лучами основания тетраэдра.

4. Находим сечения призмы как треугольники $\Delta_3(I_3, 2_3, 3_3)$ и $\Delta_3^*(I_3^*, 2_3^*, 3_3^*)$, каждый из которых должен быть подобен $\Delta_1(I_1, 2_1, 3_1)$, входящему в заданный четырехугольник проекции (см. рис. 3, а, в). По алгоритму Г.А. Шварца треугольники Δ_3, Δ_3^* находятся, исходя из их ортогонально-перспективного соответствия с Δ_1 [2, 3]. Чтобы избежать аффинных построений, применим алгоритм А.К. Власова [4]:

а) в плоскости Π_1 (см. рис. 3, в) находим центр C_1 окружности $c_1(I_1, 2_1, 3_1)$. Задаем произвольную плоскость сечения призмы Π_2 (желательно нормальную к ребрам) и строим $\Delta_2(I_2, 2_2, 3_2)$ как сечение призмы этой плоскостью;

б) строим в Π_2 эллипс e_2 , соответствующий окружности c_1 . Для этого в плоскости Π_1 находим точку K_1 . В плоскости Π_2 из отношения $(3_1, K_1, 2_1) = (3_2, K_2, 2_2)$ находим точку K_2 . Затем из отношения $(I_1, C_1, K_1) = (I_2, C_2, K_2)$ находим точку C_2 . Эллипс e_2 строим средствами параметризации пакета AutoCAD как непрерывную кривую по точке центра C_2 и трем точкам $I_2, 2_2, 3_2$;

в) строим эллиптический цилиндр (рис. 3, д) с основанием e_2 и направлением оси, совпадающим с направлением ребер призмы;

г) строим сферу, касающуюся цилиндра в двух точках, и в пересечении с цилиндром находим его круговые сечения – окружности c_3, c_3^* ;

д) плоскости круговых сечений c_3, c_3^* принимаем за секущие плоскости Π_3, Π_3^* . Находим искомые $\Delta_3(I_3, 2_3, 3_3)$ и $\Delta_3^*(I_3^*, 2_3^*, 3_3^*)$ как сечения призмы этими плоскостями.

5. Формируем два модуля (рис. 3, е, ж). Каждый из них содержит тетраэдр, ребра призмы и один из треугольников Δ_3 или Δ_3^* . Модули перемещаем так, чтобы плоскости Δ_3 или Δ_3^* совместить с плоскостью проекции Π_1 , в которой расположен Δ_1 .

6. Поскольку треугольники Δ_1, Δ_3 и Δ_3^* подобны, то применяя масштабирование, перемещение и вращение модулей, совмещаем их треугольники Δ_3 или Δ_3^* с Δ_1 . Найденное положение тетраэдров является искомым (рис. 3, з).

В развитие алгоритма А.К. Власова добавим, что искомые наклонные сечения призмы Π_3, Π_3^* можно найти без явного построения круговых се-

чений. Для этого следует задать плоскость Π_2 перпендикулярно ребрам призмы и повернуть ее на угол $\alpha = \pm \arccos(d_2/d_1)$, где d_2 и d_1 длины соответственно малой и большой полуосей эллипса e_2 .

Частные случаи реконструкции. Помимо рассмотренного выше общего случая реконструкции алгоритм «отрабатывает» и частные случаи вырожденного четырехугольника проекции (см. рис. 2, з, д). На рис. 4 приведен пример, в котором произвольный тетраэдр (см. рис. 2, а) отображается в прямоугольный равнобедренный треугольник, причем две вершины тетраэдра отображаются в вершину прямого угла.

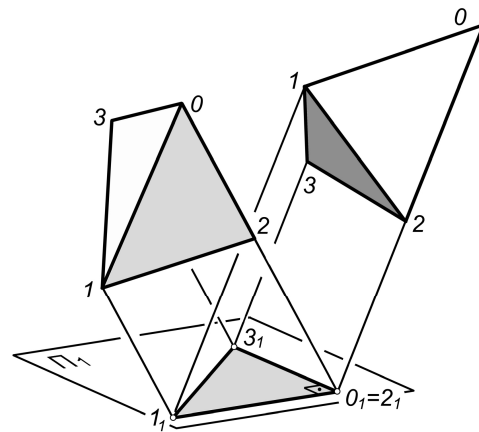


Рис. 4. Реконструкция тетраэдра в частном случае проецирования

Теорема Польке. Если тетраэдр имеет прямой трехгранный угол при вершине и равные по длине боковые ребра, то последние образуют декартову систему координат. В этом случае рассмотренный алгоритм воспроизводит теорему Польке как частный случай теоремы Польке – Шварца.

Количество возможных решений. Тетраэдры, образованные параллельным перемещением вдоль направлений проецирования рассматриваются как единое решение. С учетом этого в работах [2, 3] говорится о четырех решениях теоремы Польке – Шварца. В дополнение к полученным двум (см. рис. 3, з) в качестве решений рассматриваются еще два тетраэдра, симметричные относительно Π_1 . Однако, зеркально-отраженные тетраэдры не равны исходным. Поэтому, по нашему мнению, в общем случае теорема Польке – Шварца имеет два решения.

Вывод о количестве решений теоремы Польке – Шварца можно дополнить. Если допустить, что каждая из четырех вершин тетраэдра может отобразиться в любую из четырех вершин четырехугольника, то есть, не принимать во внимание нумерацию вершин, получим количество решений равным количеству перестановок в нумерации вершин тетраэдра или четырехугольника, то есть $4! = 24$. Причем, каждое решение имеет, как и прежде, два варианта, то есть возможны 48 положений тетраэдра.

Научно-методический раздел

Для теоремы Польке, как частного случая теоремы, симметрия относительно Π_1 приводит к замене правой тройки осей на левую (см. рис. 6, д, е). С этим допущением количество решений принято считать равным четырем.

О 3d-параметризации. Математический аппарат этого сравнительно нового программного средства современных графических редакторов позволяет «сразу» найти сечения призмы, подобные заданному треугольнику. Это существенно упрощает решение, поскольку позволяет избежать п. 4 рассмотренного выше алгоритма. Поскольку 3d параметризация в пакете AutoCAD на сегодня отсутствует, призму необходимо перегрузить в пакет, имеющий режим 3d эскиза, в который входит 3d параметризация (Inventor, SolidWorks и др.). Построив на ребрах призмы произвольный треугольник, задать ему размерные зависимости как значения двух углов искомого треугольника Δ_1 .

2. Алгоритм Е.А. Глазунова

Алгоритм [3] реконструкции позволяет найти положение тройки осей декартовой системы по их предварительно заданной проекции, то есть отражает только теорему Польке. Для понимания алгоритма реконструкции первоначально рассмотрим его доказательную часть [3, с. 36].

Пусть заданы три взаимно перпендикулярных отрезка равной длины, выходящих из точки O . Примем их за оси декартовой системы координат $OXYZ$ (рис. 5, а). Построим сферу с центром в точке O и радиусом, равным длине каждого из отрезков. Введем две плоскости проекции. Плоскость

Π_1 по отношению к осям $OXYZ$ занимает общее положение. Плоскость $\Pi_2 \perp OZ$.

Проецируем оси $OXYZ$ и сферу на обе плоскости единым вектором (O, O_2) . Проекциями осей $OXYZ$ на Π_1 является тройка векторов $O_1X_1Y_1Z_1$ (рис. 5, б). Проекциями тех же осей на Π_2 – тройка векторов $O_2X_2Y_2Z_2$. Сфера проецируется на плоскости в эллипсы e_1, e_2 , являющиеся сечениями единого проецирующего цилиндра.

Отметим важные особенности проецирования на плоскость $\Pi_2 \perp OZ$ (рис. 5, в, г):

- поскольку оси OX и OY параллельны Π_2 , то они проецируются на нее в натуральную величину в виде двух равных взаимно перпендикулярных отрезков O_2X_2 и O_2Y_2 ;
- малая ось эллипса e_2 равна радиусу сферы и, следовательно, длине каждого из отрезков $OXYZ$;
- точка Z_2 совпадает с фокальной точкой эллипса e_2 .

Последнее свойство проявляется при перемещении сферы вдоль оси проецирующего цилиндра в положение касания с плоскостью Π_2 эллипса e_2 (рис. 5, д). Для цилиндра и плоскости Π_2 образуется сфера Данделена s_d . Известно, что ее касание с секущей плоскостью происходит в точке фокуса сечения, которой является точка Z_2 .

При параллельном проецировании объекта на две плоскости между проекциями устанавливается простое отношение трех точек. То есть это отношение имеется между проекциями тройки осей $OXYZ$ на плоскости Π_1 и Π_2 . Совместное рассмотрение проекций с учетом особых свойств проекции на Π_2 позволяет решить задачу реконструкции.

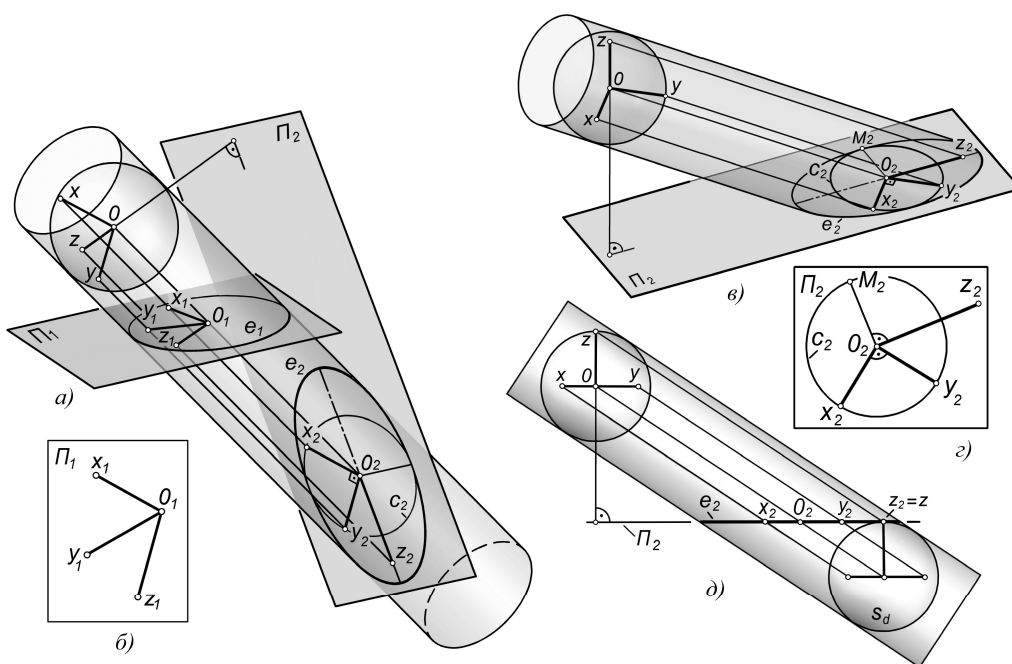


Рис. 5. Модель Глазунова: а – проецирование тройки векторов и сферы на две плоскости; б – проекции векторов на Π_1 ; в, г – особенности проецирования на Π_2 ; д – сфера Данделена

Алгоритм реконструкции. Пусть в плоскости Π_1 даны три произвольных отрезка $O_1X_1Y_1Z_1$, имеющие общую точку O_1 (рис. 5, б, рис. 6, а). Допускается, чтобы два из заданных трех отрезков принадлежали одной прямой или совпадали. Поставим задачу отыскать (реконструировать) в пространстве положение тройки осей декартовой системы координат $OXYZ$, которая проецируется в эти отрезки. Алгоритм построен следующий.

1. В плоскости Π_1 , рядом с проекцией заданных отрезков $O_1X_1Y_1Z_1$ (рис. 6, а), из произвольной точки O_2 строим два взаимно перпендикулярных отрезка O_2X_2 и O_2Y_2 равной произвольной длины (рис. 6, в). Принимаем их за проекции осей, перенесенных с плоскости Π_2 в плоскость Π_1 с некоторым произвольным масштабированием.

2. На основе соответствия проекций $O_1X_1Y_1Z_1$ и $O_2X_2Y_2Z_2$ найдем точку Z_2 (см. рис. 6, в). Для этого на отрезке O_1Y_1 (см. рис. 6, а) находим точку G_1 . На отрезке O_2Y_2 найдем точку G_2 из условия $|O_1G_1| : |G_1Y_1| = |O_2G_2| : |G_2Y_2|$ (см. рис. 6, б) или $(O_1, G_1, Y_1) = (O_2, G_2, Y_2)$. Проводим отрезок X_2G_2 . Затем, из соотношения $(X_1, G_1, Z_1) = (X_2, G_2, Z_2)$ найдем точку Z_2 .

3. Строим эллипс e_2 по его центру O_2 , точке фокуса Z_2 и точке малой оси M_2 (см. рис. 6, в). Для этого, на основе известных свойств эллипса, строим вспомогательную окружность c' с центром в точке O_2 радиусом, равным длине отрезка M_2Z_2 и находим точку 3_2 большой оси эллипса e_2 . Строим эллипс e_2 как непрерывную кривую по его центру O_2 и конечным точкам главных осей M_2 и 3_2 .

4. Строим эллипс e_1 . Для этого (см. рис. 6, в), пролив отрезки O_2X_2 и O_2Y_2 , находим точки $1_2, 2_2$ эллипса e_2 . Пропорциональным делением находим соответствующие им точки $1_1, 2_1, 3_1$ эллипса e_1 на продолжении осей $O_1X_1Y_1Z_1$ (см. рис. 6, а). Например, точку 1_1 находим из отношения $(O_2, X_2, 1_2) = (O_1, X_1, 1_1)$. Далее, средствами параметризации пакета AutoCAD строим эллипс e_1 по его центру O_1 и точкам $1_1, 2_1, 3_1$. Построив эллипс e_1 , находим объектной привязкой точки его главных осей A, B, C, D и строим окружности c_1 .

5. Определяем вектор проецирования s (рис. 6, г). Для этого поворачиваем окружность c_1 на 90° вокруг большой оси AB эллипса e_1 – окружность c_1^* . Из точки A строим к этой окружности отрезок касательной $AT=s$. Точку касания T определяем

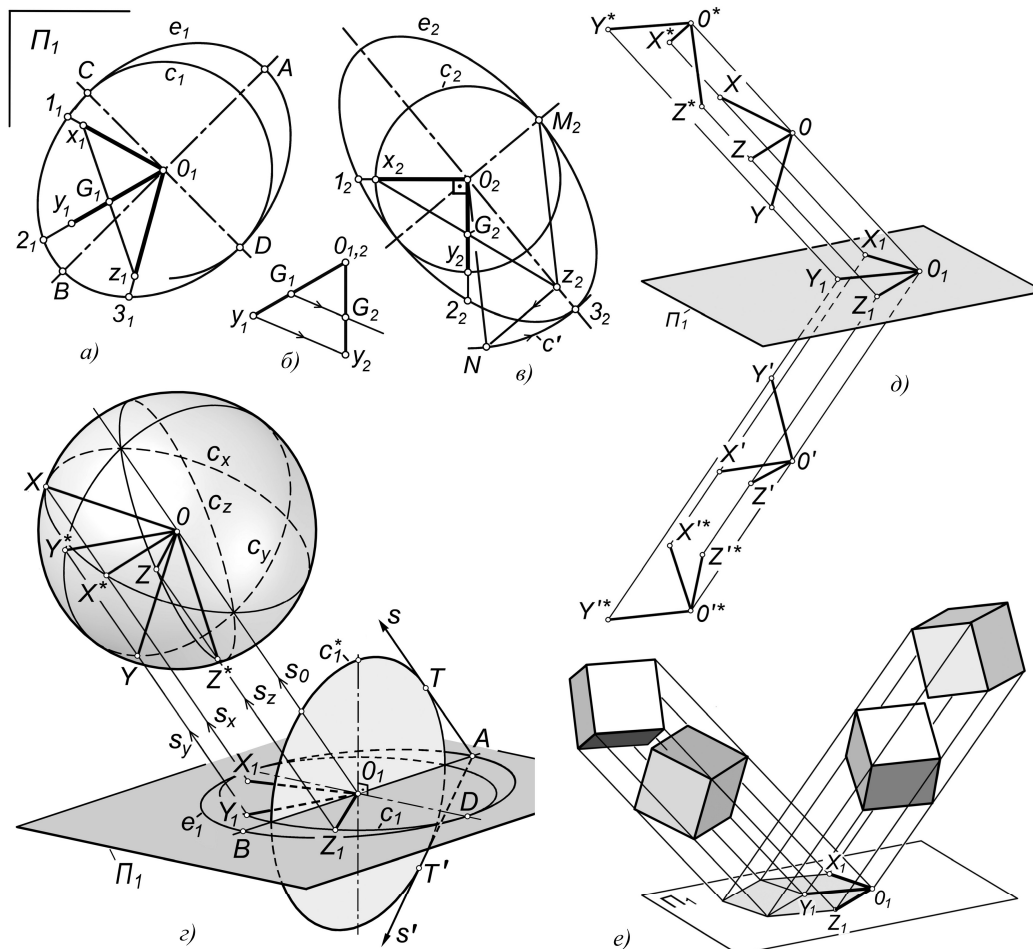


Рис. 6. Реконструкция по алгоритму Глазунова: а – построение эллипса e_1 ; б – простое соответствие трех точек; в – построение эллипса e_2 ; г – направление проецирования и нахождение тройки осей; д, е – четыре решения

Научно-методический раздел

объектной привязкой. Отрезок s перемещаем в центр эллипса e_1 , точку O_1 , получаем отрезок s_0 .

6. Строим сферу с центром в точке O_1 радиусом, равным длине малой оси O_1D эллипса e_1 . Сферу смещаем на произвольное расстояние вдоль отрезка s_0 .

7. Из точек X_i, Y_i, Z_i строим отрезки s_x, s_y, s_z , параллельные s . Находим точки их пересечения со сферой. Например, строим сечение сферы плоскостью, задаваемой параллельными лучами s_0 и s_x . В сечении получаем окружность c_x , которая пересекается с отрезком s_x в точках X и X^* . Найденные шесть точек соединяем отрезками с центром сферы.

8. Из шести отрезков формируем (выделяя цветом) две тройки декартовых осей. Чтобы выделить тройку осей, достаточно установить систему координат осью Z вдоль одной из осей и найти две оси, перпендикулярные выбранной. В итоге получаем два решения: правая тройка векторов $OXYZ$ и левая тройка векторов $O^*X^*Y^*Z^*$. Для повышения наглядности результата следует разделить тройки,

сместив их вдоль направления проецирования (рис. 6, д).

9. Еще два решения получим, приняв за направление проецирования отрезок s' . Эти решения также можно получить симметричным отображением первых двух троек относительно плоскости Π_1 .

Дополнительное повышение наглядности достигается построением четырех кубов по тройкам найденных осей (рис. 6, е).

3. Алгоритм М.В. Бурде

На плоскости Π заданы отрезки $oxyz$. Необходимо найти пространственную тройку декартовых осей $OXYZ$, для которой $oxyz$ являются аксонометрической проекцией (рис. 7, а, б).

Алгоритм [5] основан на взаимосвязи между пространственным вращением искомой тройки $OXYZ$ и происходящим при этом изменением ее проекций $oxyz$. Алгоритм позволяет по изменению проекций, соответствующему четырехкратному, определенным образом организованному враще-

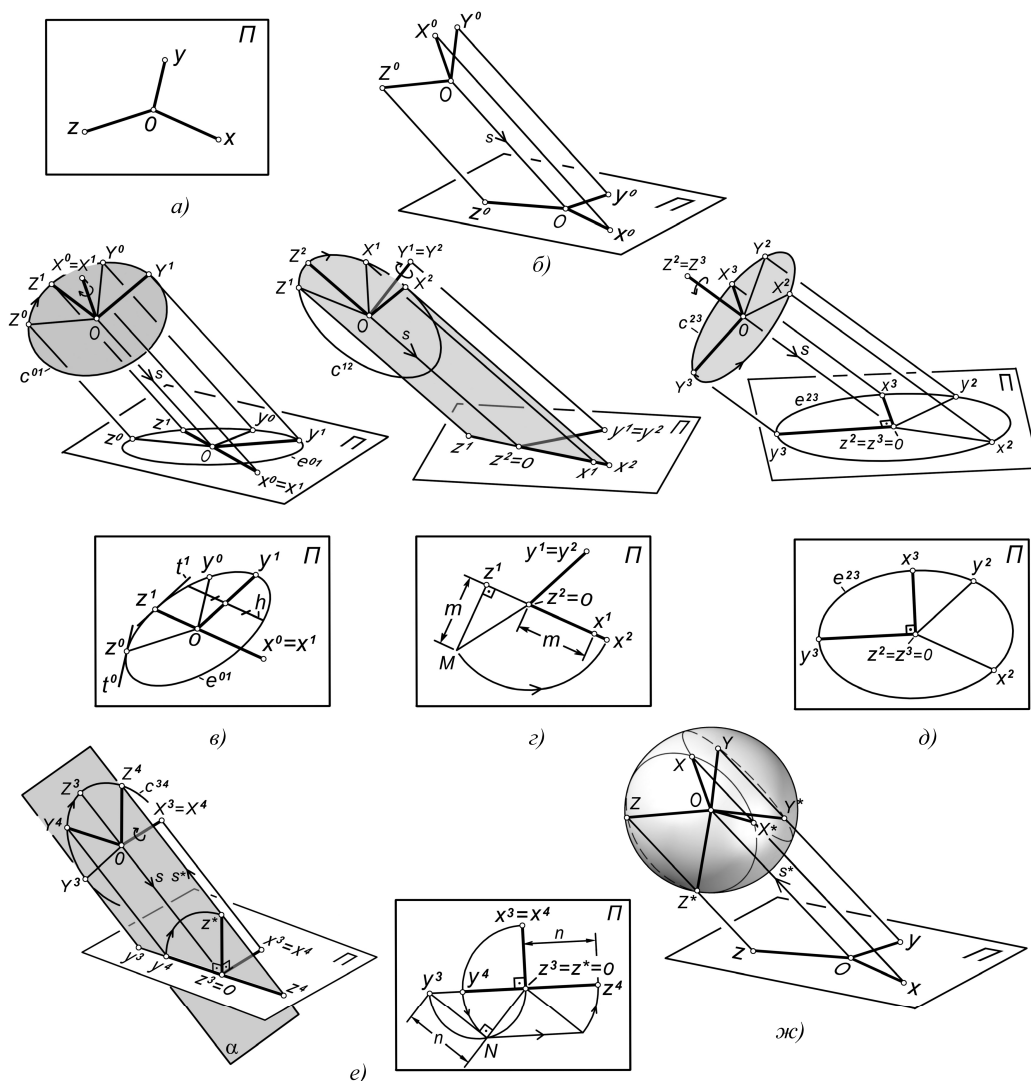


Рис. 7. Алгоритм Бурде: а – заданная проекция осей; б – фаза 0; в – переход к фазе 1; г – переход к фазе 2; д – переход к фазе 3; е – переход к фазе 4; ж – результат реконструкции

нию тройки осей $OXYZ$, найти вектор проецирования s и длину этих осей. Положения осей в результате вращений названы «фазами». Начальное положение – фаза 0, конечное – фаза 4. Ниже, в разделах «Фазы» приведена взаимосвязь между вращением пространственной тройки осей и изменением ее проекций, необходимая для понимания алгоритма реконструкции. Для реализации алгоритма достаточно выполнить действия, приведенные в разделах «Построения».

Фаза 0. Искомая тройка осей занимает некоторое (неизвестное на данный момент) начальное положение $OX^0Y^0Z^0 = OXYZ$. Начальное положение заданных аксонометрических осей обозначим как $ox^0y^0z^0 = oxuz$.

Фаза 1 достигается вращением тройки $OX^0Y^0Z^0$ вокруг ее оси OX^0 . Точки Y^0 и Z^0 перемещаются по некоторой окружности c^{01} , а их проекции y^0 и z^0 – по эллипсу e^{01} (рис. 7, в), для которого отрезки oy^0 и oz^0 являются сопряженными полу диаметрами, позволяющими построить этот эллипс. Поскольку ось OX^0 неподвижна, то $OX^1 = OX^0$, $ox^1 = ox^0$.

Поворот тройки $OX^0Y^0Z^0$ выполняют так, чтобы оси проекций oz^1 и ox^1 совпали по направлению. Это возможно, если найти пересечение окружности c^{01} с плоскостью (s, x^1) . Точка Z^0 переходит в Z^1 , точка Y^0 – в положение Y^1 . Вектор s и плоскость OX^1Z^1 совмещаются. Отрезки oy^1 , oz^1 являются новыми сопряженными полу диаметрами эллипса e^{01} , поэтому oy^1 параллелен касательной t_1 (параллельность следует из свойств сопряженных диаметров эллипса).

Построения 0-1. В точке z^0 проводим отрезок $t_0 \parallel oy^0$ (это касательная к эллипсу e^{01}). Применив параметризацию, строим эллипс e^{01} по его центру o , точкам y^0 , z^0 и касательной t_0 . Находим точку $z^1 = ox^0 \cap e^{01}$. Для построения $oy^1 \parallel t_1$ проводим некоторую хорду $h \parallel oz^1$ и проводим oy^1 через среднюю точку h . В результате первой фазы вращения оси $oxuz$ приняли положение $ox^1y^1z^1$.

Фаза 2. Выполняется поворот пространственной тройки из положения $OX^1Y^1Z^1$, полученного в фазе 1, вокруг оси Y^1 (рис. 7, г). Угол вращения задается таким, чтобы ось OZ^2 совместились с вектором s . Следовательно $z^2 = o$. Поскольку ось OY^1 неподвижна, то $Y^2 = Y^1$, $y^2 = y^1$. Точки X^1 , Z^1 перемещаются по окружности c^{12} , их проекции x^1 , z^1 перемещаются по дуге некоторого эллипса e^{12} , являясь конечными точками его сопряженных диаметров, и переходят в положение x^2 , z^2 . Учитывая, что вектор проецирования s принадлежит плоскости окружности c^{12} , соответствующий ей эллипс e^{12} вырожден в отрезок прямой, которому принадлежат конечные точки сопряженных диаметров этого эллипса: x^1 , z^1 и x^2 , z^2 . Согласно теореме Аполлония: $|ox^1|^2 + |oz^1|^2 = |ox^2|^2 + |oz^2|^2$.

Построения 1-2. Строим точку x^2 на продолжении отрезка ox^1 . Применяем теорему Аполлония.

Учитываем, что $|oz^2| = 0$. Длину $|ox^2|$ находим геометрическим построением как гипотенузу $\Delta(o, z^1, K)$, в котором $|z^1K| = |ox^1| = m$. В результате второй фазы вращения оси $oxuz$ приняли положение $ox^2y^2z^2$, при этом ось oz^2 вырождена в точку o .

Фаза 3. Вращением тройки вокруг оси OZ^2 переводим ось OX^2 в горизонтальное положение OX^3 (рис. 7, д). Точки X^2 , Y^2 перемещаются по окружности c^{23} , которая на плоскость Π отображается в эллипс e^{23} . Для этого эллипса ox^2 и oy^2 являются сопряженными полу диаметрами. Поскольку OX^3 параллельна Π , то угол OX^3Y^3 отображается в прямую, и новые сопряженные полу диаметры ox^3 и oy^3 становятся главными полу осями эллипса e^{23} . Ось OZ^3 по-прежнему проецируется в точку o – центр эллипса e^{23} . Длина ox^3 стала равной истинной длине осей d пространственной тройки осей.

Построения 2-3. С применением параметризации строим эллипс e^{23} по сопряженным полу диаметрам ox^2 , oy^2 . Строим отрезки ox^3 и oy^3 как главные полуоси эллипса e^{23} . В результате третьей фазы вращения оси $oxuz$ приняли положение $ox^3y^3z^3$, при этом ось oz^3 по-прежнему вырождена в точку o .

Фаза 4. Вращением пространственной тройки вокруг оси OX^3 установим ось OY^3 параллельно плоскости Π (рис. 7, е). При этом $X^4 = X^3$, $x^4 = x^3$. Точки Z^3 и Y^3 вращаются по окружности c^{34} , которая на плоскость Π проецируется в эллипс e^{34} , вырожденный в отрезок прямой y^3z^4 . В итоге $OZ^4 \perp \Pi$, длина oy^4 становится равной d . Точка z^4 находится по теореме Аполлония для вырожденного эллипса e^{34} : $|oy^3|^2 + |oz^3|^2 = |oy^4|^2 + |oz^4|^2$, учитывая, что $oz^3 = 0$.

Построения 3-4. Находим точки y^4 , N . Строим $\Delta(o, y^3, N)$. Отложив длину катета $y^3N = n$ на продолжении оси oy^3 , получаем точку z^4 . Строим отрезок $oz^4 \perp \Pi$ длиной d . Строим отрезок z^4z^* , который является искомым направлением проецирования тройки осей $OXYZ$.

Подтверждение правильности решения находим из параллелограмма Ooz^*Z^4 , расположенного в плоскости α . Сторона Z^4z^* и найденный отрезок z^4z^* принадлежат одной прямой и отрезок Z^4z^* параллелен искомому вектору s .

Пространственное положение осей находится с помощью двух вспомогательных призм [5]. Более наглядно, по нашему мнению, его найти с помощью сферы (рис. 7, ж), центр которой расположен на проецирующем отрезке s . Радиус сферы равен $d = ox^4 = oy^4$. Конечные точки осей находятся на пересечении сферы и проецирующих лучей, восстановленных из конечных точек аксонометрических осей. В итоге находим две пространственные тройки осей, одна из них $OXYZ$ правая, вторая $OX^*Y^*Z^*$ – левая. Еще два решения находим по симметрии относительно плоскости Π (см. рис. 6, д).

Компоненты сопоставляемых алгоритмов

№	Задача	Алгоритмы		
		Шварц и Власов	Глазунов	Бурде
1	Простое отношение трех точек	+	+	
2	Построение эллипса по точке центра и трем точкам	+	+	
3	Построение сечения треугольной призмы, подобного заданному треугольнику	+	–	–
4	Нахождение фокальных точек эллипса	–	+	–
5	Построение эллипса по сопряженным диаметрам			+
6	Построение касательной к эллипсу в его произвольной точке	–	–	+
7	Теорема Аполлония о сопряженных диаметрах эллипса	–	–	+

4. Сравнительная оценка алгоритмов реконструкции

Реализация рассмотренных алгоритмов требует владения общими приемами точных 3d построений: формирование тел с заданными параметрами (сфера, наклонная призма, эллиптический цилиндр), построение точки пересечения прямой с плоскостью, пересечения прямой со сферой, нахождение круговых сечений эллиптического цилиндра, применение объектных привязок и др.

Кроме того, алгоритмы требуют решения специальных задач (см. таблицу). Задачи 1, 7 связаны с выполнением простых геометрических построений (см. рис. 3, б, рис. 6, б, рис. 7, з, е). Задачи 2, 5 – основаны на задании геометрических зависимостей (параметризация), имеющих в современных графических пакетах САПР. Это построение эллипса по пяти точкам или касательным в их различных сочетаниях, построение эллипса по точке центра и трем точкам. Задача 3 – требует построения круговых сечений эллиптического цилиндра и решается на основе теоремы о двойном соприкосновении квадрик, либо применения 3d-параметризации. Задачи 4, 5 требуют знания свойств эллипса, в частности, что касательная в конечной точке одного из сопряженных диаметров параллельна второму диаметру. Задача 6 – построение касательной к эллипсу по вспомогательной хорде, параллельной диаметру эллипса. Существуют задачи о нахождении точки фокуса эллипса по сфере Данделена (см. рис. 5, д), о построении касательной в заданной точке эллипса (см. рис. 7, в), теорема о проецировании прямого угла (см. рис. 7, д).

Аффинные преобразования присутствуют лишь в алгоритмах Шварца и Глазунова в минимальной скрытой форме в виде задачи на деление отрезка в заданном отношении, что делает эти алгоритмы доступными и понятными без знаний курса аффинной геометрии.

Заключение

Рассмотренные алгоритмы охватывают весь базовый курс начертательной геометрии. Средства

компьютерных графических редакторов, в сочетании с развиваемыми методами 3d-моделирования делают эти исторические и классические алгоритмы современными, эффективными и доступными для студента обучающимися примерами.

Помимо «ручного» варианта рассмотренные алгоритмы реконструкции реализованы в виде компьютерных программ, написанных на языке AutoLisp. Программы применяются в лекционном курсе и позволяют продемонстрировать и косвенно доказать теорему Польке – Шварца как одну из его красивых и важных теорем.

Во всех алгоритмах погрешность реконструкции является характерной для точных построений пакета AutoCAD и не превышает 10^{-5} .

Выводы

Сопоставляя рассмотренные алгоритмы по критериям: наглядность восприятия, техническая сложность реализации и универсальность, – приходим к следующим выводам.

1. Оптимальным для учебного процесса является алгоритм Шварца, дополненный решением Власова. Этот суммарный алгоритм в наибольшей мере демонстрирует возможности и эффективность компьютерного 3d-моделирования, которые делают решение задачи реконструкции весьма простым и доступным для решения силами студента.

2. Алгоритм Глазунова также основан преимущественно на 3d-построениях, но он сложнее в восприятии, чем предыдущий, и рассматривает лишь частный случай – реконструкцию тройки осей.

3. Алгоритм Бурде наиболее сложен в восприятии. Он также рассматривает лишь реконструкцию тройки осей, ориентирован в основном на планиметрические построения и поэтому наименее нагляден.

Литература

1. Бескин, Н.М. Основное предложение аксиометрии / Н.М. Бескин // Вопросы современной начертательной геометрии; под ред. Н.Ф. Четверухина. – М.; Л.: Гостехиздат, 1947. – С. 55–125.
2. Начертательная геометрия / Н.Ф. Чет-

верухин, В.С. Левицкий, З.И. Прянишникова и др.; под ред. Н.Ф. Четверухина. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1963. – 420 с.

3. Глазунов, Е.А. Аксонометрия / Е.А. Глазунов, Н.Ф. Четверухин. – М.: Гостехиздат, 1953. – 291 с.

4. Власов, А.К. Новое доказательство теоремы Pohlke / А.К. Власов // Математический

сборник. – Т. XXXII, в. 3. – Гос. издат., 1925. – С. 453–456.

5. Бурде, М.В. Восстановление масштабного трехосника по его параллельной проекции методом преобразования фаз / М.В. Бурде // Труды московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. – М.: Советская наука, 1958. – С. 111–114.

Хейфец Александр Львович, кандидат технических наук, профессор кафедры «Графика», Южно-Уральский государственный университет. E-mail: heifets@yandex.ru.

**Bulletin of the South Ural State University
Series “Construction Engineering and Architecture”
2013, vol. 13, no. 1, pp. 71–79**

3D-ALGORITHMS OF POLKE – SCHWARTZ THEOREM

A.L. Kheyfets

There are developed computer 3D-algorithms, which allow reproducing the task of reconstruction of the basic axonometry theorem by means of modern graphic editors. The article considers principle variants of reconstruction. It gives their comparative assessment and examples of elaborations in relation to AutoCAD package.

Keywords: computer simulation, geometric simulation, 3D-algorithms, axonometry, Polke-Schwartz theorem, AutoCAD.

Kheyfets Alexander Lvovich, candidate of engineering sciences, professor of Graphics Department, South Ural State University. E-mail: heifets@yandex.ru.

Поступила в редакцию 12 марта 2013 г.