УДК 622.692.4

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ГАЗОПРОВОДАХ С УЧЕТОМ НЕИЗОТЕРМИЧНОСТИ И СЖИМАЕМОСТИ ПОТОКА

А.А. Суслова

Предложена математическая модель переходных процессов в газопроводах, в явном виде определяющая распределение температур по длине газопровода. Кратко описан вывод системы дифференциальных уравнений, связывающих основные параметры газового потока. Структура полученных уравнений лучшим образом подходит для последующего применения численных схем.

Ключевые слова: газопровод, переходный процесс, математическая модель.

В литературе представлено большое количество математических моделей потоков газа в газопроводах [1–4], неизотермичность процессов при этом обычно учитывается в виде уравнений, включающих изменение внутренней энергии, энтальпии, энтропии и т. д., но не конкретно температуры газа. В представленной статье из фундаментальных уравнений механики жидкости и газа получена математическая модель переходных процессов в газопроводе, состоящая из четырех уравнений, одно из которых включает изменение температуры в явном виде.

Широко распространена модель, представленная в [1]. Основные дифференциальные уравнения, описывающие неустановившееся движение газа в трубе, выводятся из законов сохранения массы, импульса и энергии. Движение газа предполагается одномерным. При этом площадь сечения трубы ω – переменная величина. Из сопротивлений рассматриваются лишь сопротивления трения газа о стенку трубы.

1. Уравнение потока массы:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\mho\omega) = \pi D m_* . \qquad (1)$$

Здесь ρ – плотность газа; ω, D – площадь поперечного сечения и диаметр трубы соответственно; m_* – распределенный приток массы через боковую поверхность, приходящийся на единицу площади трубы в единицу времени. В случае транспортировки газа по трубопроводу, очевидно, что никакого притока массы не будет, и для моделирования примем участок трубы постоянного диаметра. Таким образом, уравнение потока массы принимает вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\mho)}{\partial x} = 0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mho\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial\mho}{\partial x} = 0. \qquad (3)$$

2. Уравнение потока импульса

Базовая формулировка этого уравнения также принята из [1] и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\mho\omega) + \frac{\partial}{\partial x}[(p+\rho\mho^2)\omega] =$$
$$= (p + m_*\mho_*)\frac{d\omega}{dx} - \rho\omega\left(g\frac{dy}{dx} + \frac{\lambda|\mho|\mho}{2D}\right). \qquad (4)$$

Здесь $\mho_*$ – скорость присоединяющихся (отделяющихся) частиц перед их присоединением (после отделения) от основного потока; g – ускорение свободного падения; y – ордината оси x, отсчитываемая от горизонтальной плоскости; λ – коэффициент гидравлического трения.

Принимая те же положения о притоке и диаметре трубы, что и в п. 1, имеем:

$$\frac{\partial(\rho\mho)}{\partial t} + \frac{\partial(p+\rho\mho^2)}{\partial x} = -\rho\left(g\frac{dy}{dx} + \frac{\lambda|\mho|\mho}{2D}\right). \qquad (5)$$

Приведем полученное уравнение к более подходящему для моделирования виду, используя базовые правила нахождения производных сложных функций и уравнение потока массы. Опустив вывод, вследствие ограниченности объема статьи, получаем:

$$\rho\frac{\partial\mho}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho\mho\frac{\partial\mho}{\partial x} = -\rho\left(g\frac{dy}{dx} + \frac{\lambda|\mho|\mho}{2D}\right). \qquad (6)$$

3. Уравнение энергии

Согласно [1] уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}\rho\mho\left(E + \frac{p}{\rho}\right) =$$
$$= \frac{4q}{D} - \rho\mho g\frac{dy}{dx} + \frac{4m_*}{D}\left(E + \frac{p}{\rho}\right). \qquad (7)$$

Здесь [1] E – полная энергия единицы массы, равная сумме внутренней u и кинетической энергии $\mho^2/2$:

$$E = u + \frac{\mho^2}{2}. \qquad (8)$$

Теплопередача от газа, текущего в трубе, к внешней среде с известной температурой $T_н$ задается в виде закона Ньютона:

$$q = \alpha_c(T_н - T). \qquad (9)$$

Как уже отмечалось выше, приток массы через боковую поверхность отсутствует, значит, уравнение (3.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(u + \frac{\mho^2}{2}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\rho\mho\left(u + \frac{\mho^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) =$$
$$= \frac{4q}{D} - \rho\mho g\frac{dy}{dx}. \qquad (10)$$

Для дальнейшего преобразования были использованы следующие зависимости:

– из курса термодинамики известно, что удельная энтальпия вычисляется по формуле $i = u + \frac{p}{\rho}$;

– уравнения потока массы $\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{\partial(\rho\upsilon)}{\partial x}$;

– уравнения потока импульса $\rho\frac{\partial\upsilon}{\partial t}+\rho\upsilon\frac{\partial\upsilon}{\partial x}=$
$=-\rho\left(g\frac{dy}{dx}+\frac{\lambda|\upsilon|\upsilon}{2D}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}$.

Используя перечисленные уравнения и правила нахождения производных, получаем:

$$\rho\left(\frac{\partial i}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial i}{\partial x}\right)=\frac{4q}{D}+\frac{\partial p}{\partial t}+\rho\frac{\lambda|\upsilon|\upsilon^2}{2D}+\upsilon\frac{\partial p}{\partial x}. \quad (11)$$

Теперь обратимся к основам термодинамики. Известно [1, 2], что приращение энтальпии можно определить по следующей формуле:

$$di=\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT+\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T dp. \quad (12)$$

Частная производная от энтальпии по температуре при p = const равна теплоемкости тела, т. е. $\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p=C_p$.

Также известно выражение для частной производной от энтальпии по давлению при постоянной температуре [2], которое имеет следующий вид:

$$\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T=V-T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p, \quad (13)$$

где V – удельный объем газа: $V=\frac{1}{\rho}$.

Относительное изменение объема тела при нагревании его на dT градусов при постоянном давлении есть коэффициент объемного теплового расширения: $\beta=\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$.

Подставляя вышеприведенные равенства в уравнение (11) и производя необходимые математические преобразования, получаем:

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial x}\right)=T\beta\left(\frac{\partial p}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial p}{\partial x}\right)+$$
$$+\frac{4q}{D}+\rho\frac{\lambda|\upsilon|\upsilon^2}{2D}. \quad (14)$$

Для нахождения частных производных давления в правой части уравнения (14) применим уравнение состояния газа. Для реальных газов оно имеет следующий вид:

$$p=Z\rho RT, \quad (15)$$

где R – газовая постоянная, Z – коэффициент сжимаемости.

Продифференцировав (15) по времени и координате и также используя уравнение неразрывности, приводим уравнение (14) к виду

$$\left(\rho C_p-p\beta\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial x}\right)+p\beta T\frac{\partial\upsilon}{\partial x}=$$
$$=\beta R\rho T^2\left(\frac{\partial Z}{\partial t}+\upsilon\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+\frac{4q}{D}+\rho\frac{\lambda|\upsilon|\upsilon^2}{2D}. \quad (16)$$

Таким образом, окончательно получаем систему дифференциальных уравнений, описывающих движение газа в газопроводе, состоящую из четырех уравнений (3), (6), (16) и (15).

4. Начальные условия

Перед началом переходного процесса, инициированного тем или иным фактором, поток считается установившимся. То есть для получения уравнений, описывающих начальные условия, достаточно из полученной системы дифференциальных уравнений откинуть производные по времени, входящих в нее величин. Далее, применяя выбранную численную схему, получаем обычные зависимости искомых величин от координаты x.

Вывод. Вышеприведенные уравнения описывают динамические процессы в газопроводах. Для полноты формулировки математической модели к данным уравнениям необходимо присоединить еще граничные условия, указывающие конкретные особенности протекания изучаемых процессов. В связи с многовариантностью граничные условия не приводятся, их формализация не представляет каких-либо затруднений.

Литература

1. Неизотермическое течение газа в трубах / под ред. О.Ф. Васильева. – Новосибирск: Наука, 1978. – 128 с.

2. Вукалович, М.П. Термодинамика / М.П. Вукалович, И.И. Новиков. – М.: Машиностроение, 1972. – 672 с.

3. Панферов, В.И. Численное моделирование переходных процессов в газопроводах / В.И. Панферов, А.А. Февралев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство». – 2008. – Вып. 7. – № 25(125). – С. 40–45.

4. Чарный, И.А. Основы газовой динамики / И.А. Чарный. – М.: Гостоптехиздат, 1961. – 196 с.

Суслова Анна Андреевна, аспирант кафедры «Теплогазоснабжение и вентиляция», Южно-Уральский государственный университет. E-mail: suslova_anya@mail.ru.

Bulletin of the South Ural State University
Series “Construction Engineering and Architecture”
2013, vol. 13, no. 1, pp. 93–95

DEFINITION OF MATHEMATICAL MODEL OF TRANSIENT PROCESSES IN GAS PIPELINES WITH AN ACCOUNT OF NON-ISOTHERMALITY AND FLOW COMPRESSIBILITY

A.A. Suslova

The article suggests a mathematical model of transient processes in gas pipelines, explicitly determining the distribution of temperatures along the length of a gas pipeline. The author gives a brief description of differential equations system derivation connecting main parameters of the gas flow. The structure of derived equations is best of all applied to the following application of numerical schemes.

Keywords: gas pipeline, transient process, mathematical model.

Suslova Anna Andreevna, postgraduate students of Heat and Gas Supply and Ventilation Department, South Ural State University. E-mail: suslova_anya@mail.ru.

Поступила в редакцию 18 февраля 2013 г.