

# МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛОСКИХ ФЕРМ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ВРЕМЕННОГО АНАЛИЗА

**Е.М. Уфимцев**

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск*

В статье освещается опыт расчётов плоских статически неопределимых ферм и ферменных конструкций при действии одиночных полусинусоидальных импульсных воздействий в процессе нелинейных колебаний, выполненных на кафедре строительной механики Южно-Уральского государственного университета. В описанных примерах рассматривается работа однопролётной мостовой фермы, двухпролётной подкрановой фермы, а также трехстержневой ферменной конструкции. Колебания конструкций связаны с физически и конструктивно нелинейным поведением отдельных несущих элементов. Показаны особенности поведения параметров динамической реакции ферм в процессе колебаний. В качестве метода расчёта используется аналитический подход – метод временного анализа, основанный на исследовании характеристического матричного квадратного уравнения.

*Ключевые слова: метод, временной анализ, математическая модель, дискретная система, диссипативная система, плоская ферма, физическая нелинейность, конструктивная нелинейность, колебания, динамическая реакция, Matlab.*

**Введение.** Полноценное исследование напряжённо-деформированного состояния строительных конструкций требует построения решения при учёте их физически [1–3], геометрически [4–6] и конструктивно [7–9] нелинейных свойств, что в настоящее время является актуальной задачей [6].

В настоящей статье освещается опыт расчётов плоских статически неопределимых ферм и ферменных конструкций при действии одиночных полусинусоидальных импульсных воздействий в процессе нелинейных колебаний, выполненных на кафедре строительной механики Южно-Уральского государственного университета. В качестве метода расчёта используется аналитический подход – метод временного анализа (МВА) динамической реакции дискретных диссипативных систем (ДДС), разработанный профессором кафедры строительной механики ЮУрГУ А.Н. Потаповым. В основу данного метода положено исследование свойств характеристического матричного квадратного уравнения [10]. Колебания конструкций связаны с их физически и конструктивно нелинейным поведением отдельных несущих стержней. Показаны особенности поведения параметров динамической реакции ферм при сложном нелинейном поведении в процессе колебаний.

## 1. Математическая модель нелинейных колебаний дискретных систем

При реализации математической модели нелинейных колебаний фермы как дискретной системы с  $n$  степенями свободы приняты следующие допущения [11]:

1) процесс построения динамической реакции разбивается на ряд квазилинейных временных интервалов  $t \in [t_i, t_{i+1}]$ , на каждом из которых па-

раметры расчётной динамической модели (РДМ) неизменны;

2) граничными (критическими) точками интервалов (при  $t_i$ ) принимаются: для упругопластической задачи – время начала текучести или начала разгрузки; для конструктивно нелинейной задачи – время выключения элемента из работы или его включения в работу;

3) переход системы в новое  $i$ -е состояние происходит мгновенно.

Реальные диаграммы деформирования материалов при расчётах часто заменяются билинейной диаграммой с линейным упрочнением. Это позволяет смоделировать поведение только отдельного несущего элемента конструкции [12]. Однако при этом учитываются следующие основные свойства упругопластического материала: упрочнение, эффект Баушингера и т. д. [13].

Рассмотрим процесс физически нелинейного деформирования одного из несущих элементов ДДС. Для удобства динамическую восстанавливающую силу (ДВС) будем моделировать билинейным законом в зависимости от перемещений в осях « $R(t) \sim y(t)$ », а также с учётом разгрузки, происходящей при начальной жёсткости системы.

На рис. 1 показаны два полуцикла диаграммы жёсткости для  $k$ -й компоненты вектора ДВС  $R(t)$  (линия  $OABCDE$ ), которая определяет работу системы в направлении  $k$ -й степени свободы.

В общем случае величина ДВС  $R_k(t)$  включает в себя составляющие: квазилинейную  $R_{e,k}(t)$ , предельную  $R_{u,k}(t_i)$  и остаточную  $R_{p,k}(t_i)$ . Они строятся для от  $i$ -го состояния системы, определяемого нелинейной работой несущего элемента.

Компоненты вектора ДВС на каждом полуцикле будут вычисляться с учётом накопленных оста-

точных перемещений  $y_{p,k}$ . Тогда закон изменения  $k$ -й компоненты ДВС в  $m$ -м полуцикле диаграммы (верхний индекс в скобках) будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} &\text{на линии } OA \text{ и } CD : \\ &R_k^{(m)}(t) = R_{e,k}^{(m)}(t) - R_{p,k}^{(m-1)}(t_i) = \\ &= \text{tg } \alpha_k \cdot y_k(t) - R_{p,k}^{(m-1)}(t_i) \\ &\text{на линии } AB \text{ и } DE : \\ &R_k^{(m)}(t) = \text{tg } \beta_k \cdot y_k(t) + R_{u,k}^{(m)}(t_i) \\ &\text{на линии } BC \text{ и } EF : \\ &R_k^{(m)}(t) = \text{tg } \alpha_k \cdot y_k(t) - R_{p,k}^{(m)}(t_i) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $\text{tg } \alpha_k$ ,  $\text{tg } \beta_k$  – жёсткости ДДС в направлении  $k$ -й степени свободы при упругом и упругопластическом деформировании ( $\alpha_k > \beta_k$ );  $\Delta r_k = \text{tg } \alpha_k - \text{tg } \beta_k$  – изменение жёсткости ДДС при переходе элемента в упругопластическую стадию работы (точки  $A$  и  $D$

на рис. 1);  $t_i$  – время начала нелинейной работы (точки  $A$  и  $D$ ) или начала разгрузки (точки  $B$  и  $E$ ) в  $j$ -м конструктивном элементе;  $y_{u,k}(t_i)$  – предельное упругое перемещение в системе, определяемое в момент начала нелинейной работы;  $y_{p,k}(t_i)$  – пластическое (остаточное) перемещение, накопленное в системе к моменту начала разгрузки.

Внезапное выключение несущего элемента фермы из работы приведёт к её конструктивно нелинейному характеру поведения вследствие изменения жесткостных характеристик. На диаграмме деформирования это представляется в виде ломаной линии  $0AA'B'$  (рис. 1). В точке  $A$  этой линии имеется разрыв, который возникает в момент выключения элемента.

В случае отсутствия в системе упругопластических деформаций  $y_{p,k}$  линия отрезка  $A'B'$  пройдёт через начало координат, в противном случае – нет.

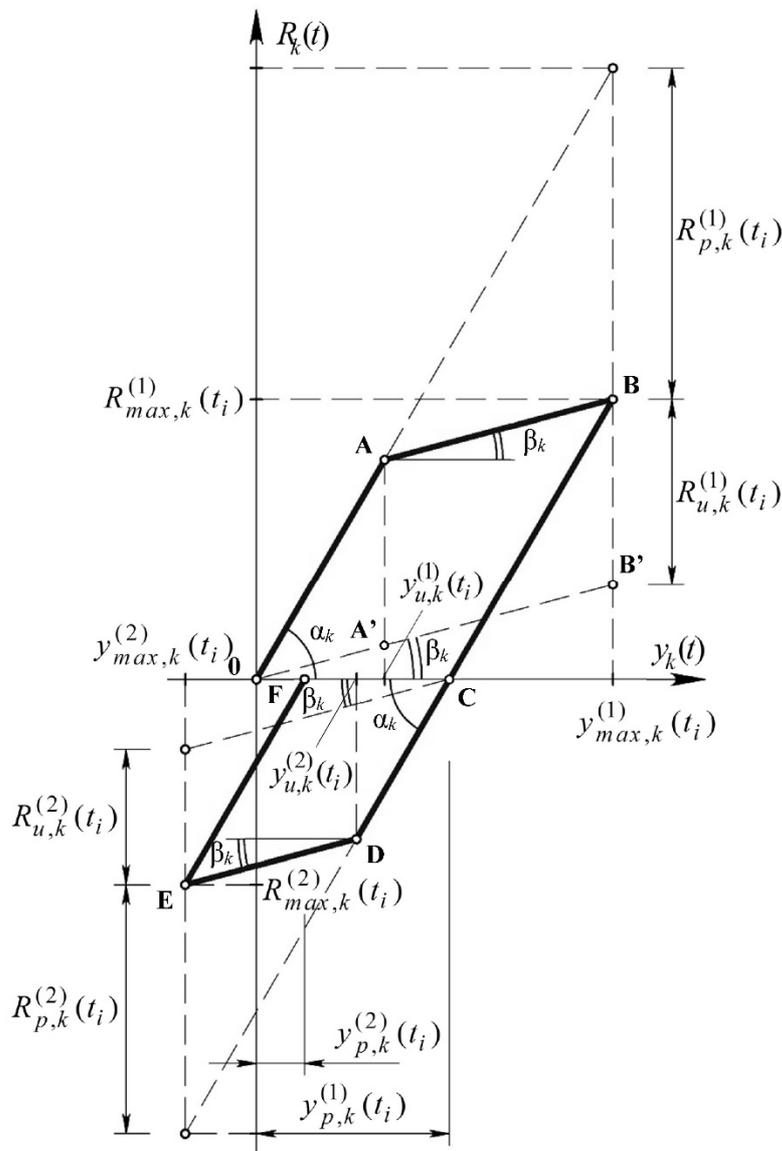


Рис. 1. Диаграммы деформирования системы в направлении  $k$ -й степени свободы при учёте физически (0ABC) и конструктивно (0AA'B') нелинейной работы

С учётом (1) запись математической модели для фермы в  $i$ -м состоянии на интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  для произвольного полуцикла диаграммы будет иметь вид:

$$R_k^{(m,s)}(t) = R_{e,k}^{(m,s)}(t) + a R_{u,k}^{(m,s)}(t) - b R_{p,k}^{(m,s)}(t) - c R_{p,k}^{(m-1,s)}(t), \quad (2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} R_{e,k}^{(m,s)}(t) &= r_k^{(s)} y_k(t), \quad R_{u,k}^{(m,s)}(t) = \Delta r_k y_{u,k}^{(m)}(t), \\ R_{p,k}^{(m,s)}(t) &= r_k^{(s)} y_{p,k}^{(m)}(t), \quad R_{p,k}^{(m-1,s)}(t) = r_k^{(s)} y_{p,k}^{(m-1)}(t), \\ a &= 1 - \text{abs}(s-2), \quad b = \text{fix}(s/3), \quad c = 1 - b. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь  $R_k^{(m,s)}(t)$  – ДВС, действующая в направлении  $k$ -й степени свободы ДДС;  $m, s$  – соответственно, номера полуцикла и участка диаграммы:  $s = 1$  – для участков упругого нагружения  $OA, CD$  на рис. 1;  $s = 2$  – для участков упругопластического упрочнения  $AB, DE$ ;  $s = 3$  – для участков разгрузки  $BC, EF$ ;  $R_{e,k}^{(m,s)}(t), R_{u,k}^{(m,s)}(t), R_{p,k}^{(m,s)}(t)$  – составляющие ДВС (рис. 1): соответственно, квазилинейная, предельная и остаточная;  $r_k^{(s)}$  – жёсткость ДДС по направлению  $k$ -й степени свободы, соответствующая определённому участку диаграммы (на рис. 1 при  $s = 1, 3$ : величина  $r_k^{(s)} = \text{tg } \alpha_k$ ; при  $s = 2$ :  $r_k^{(s)} = \text{tg } \beta_k$ );  $\text{abs}(a), \text{fix}(a)$  – операции, возвращающие для некоторого числа, соответственно, его абсолютное значение и значение, округлённое до ближайшего к нулю целого числа.

Компоненты  $R_{u,k}^{(m,s)}(t)$  и  $R_{p,k}^{(m,s)}(t)$  в (3) формируются в зависимости от  $i$ -го состояния системы при упругопластической работе несущего элемента; для  $m = 1$  слагаемые  $y_{p,k}^{(0)}(t_i) = 0, R_{p,k}^{(0,s)}(t_i) = 0$ . Коэффициенты  $a, b, c$  принимают значения 0 или 1 в зависимости от номера участка  $s$ .

Таким образом, математическая модель (2) определяет величину  $k$ -й компоненты вектора ДВС на каждом квазилинейном интервале  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  при упругопластической и/или конструктивно нелинейной работе системы. При упругих колебаниях конструкции  $R_{u,k}^{(m,s)}(t_i) = R_{p,k}^{(m,s)}(t_i) = 0$ .

## 2. Векторная запись математической модели нелинейных колебаний ДДС

Пусть  $K$  – матрица жёсткости исходной ДДС, в которой все конструктивные элементы работают упруго, а  $K_i$  – матрица жёсткости, формируемая в момент времени  $t_i$ . Далее представим векторную запись соотношений (2), (3).

Квазилинейная составляющая вектора ДВС  $R(t)$  равна  $R_e(t) = K_i Y(t)$ , где  $Y(t) = [y_k(t)]$  – вектор перемещений дискретной модели. С началом нелинейного деформирования в  $j$ -м элементе конструкции вектор предельной составляющей будет

равен  $R_u(t_i) = \Delta K_i Y_u(t_i)$ , где  $\Delta K_i = K - K_i$ . Вектор предельных перемещений  $Y_u(t_i)$  определяется в момент перехода системы в новое  $i$ -е состояние:  $Y_u(t_i) = Y(t_i)$ .

В случае разгрузки в  $j$ -м элементе ДДС возвращается к жёсткости, предшествовавшей  $i$ -му состоянию:  $K_i = K_{i-1}$ . Если до этого в системе отсутствовали пластические деформации, то  $K_{i-1} = K$ , и при этом вектор остаточных восстанавливающих сил определяется выражением:  $R_p(t_i) = K_{i-1} Y_p(t_i)$ , где  $Y_p(t_i)$  – вектор остаточных перемещений, формируемый при  $t_i$ .

Таким образом, выражение для ДВС (2) в векторной форме имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} R(t) &= K_i Y(t) + R_{up}(t_i), \\ R_{up}(t_i) &= R_u(t_i) - R_p(t_i). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

При упругих колебаниях конструктивно нелинейной системы, когда происходит внезапное выключение несущего элемента, величина вектора (5), отвечающего за физически нелинейные свойства ДВС, обращается в нуль.

## 3. Уравнение движения нелинейной ДДС и его решение

Колебания ДДС с  $n$  степенями свободы в  $i$ -м состоянии с учётом нелинейной работы её несущих элементов на интервале движения  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  можно описать уравнением совместно с начальными условиями:

$$\left. \begin{aligned} M_i \ddot{Y}(t) + C_i \dot{Y}(t) + K_i Y(t) &= P(t) + Q_i - R_{up}(t_i), \\ Y(t_i) = Y_0, \dot{Y}(t_i) &= \dot{Y}_0, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где  $M_i, C_i, K_i$  – соответственно, матрицы масс, демпфирования и жёсткости РДМ;  $P(t), Q_i$  – векторы, соответственно, внешней динамической и статической (от собственного веса) нагрузок.

Интегрирование однородного ОДУ, соответствующего (6), связано с построением фундаментальной матрицы  $\Phi(t) = e^{S_i t}$ , где  $S_i \in M_n(C)$  – матрица, являющаяся решением МКУ [10]:

$$M_i S_i^2 + C_i S_i + K_i = 0. \quad (8)$$

Данное уравнение представляет собой уравнение движения собственных форм колебаний ДДС. Спектр матрицы  $S_i$  содержит внутренние динамические характеристики РДМ: частоты и формы собственных колебаний, коэффициенты демпфирования.

При таком моделировании физически и конструктивно нелинейного процесса динамическую задачу можно свести к расчётному алгоритму, в котором неупругий анализ будет рассматриваться как последовательность расчётов упругих систем [10]. В этом случае выражения для кинематических параметров реакции квазилинейной РДМ на интервале времени  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  при произвольном внешнем воздействии в соответствии с [11, 14] будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re}\{Z(t)\}, \dot{Y}(t) = 2\text{Re}\{S_i Z(t)\}, \\ \ddot{Y}(t) &= 2\text{Re}\{S_i^2 Z(t)\} + M_i^{-1} [Q_i + P(t) - R_{up}(t)], \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} Z(\tilde{t}) &= Z_0(\tilde{t}) + Z^{QR}(\tilde{t}) + Z^P(\tilde{t}), \\ Z_0(\tilde{t}) &= \Phi(\tilde{t}) U_i^{-1} M_i [-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0], \\ Z^{QR}(\tilde{t}) &= [\Phi(\tilde{t}) - E] (U_i S_i)^{-1} [Q_i - R_{up}(t_i)], \\ Z^P(\tilde{t}) &= U_i^{-1} \int_{t_i}^{\tilde{t}} \Phi(\tilde{t} - \tau)^T P(\tau) dt. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Здесь  $\tilde{t} = t - t_i$ ;  $\Phi(\tilde{t}) = e^{S_i \tilde{t}}$ ;  $U_i = M_i S_i + S_i^T M_i + C_i$ .

Выражения (9), (10) позволяет с единых позиций строить динамическую реакцию ДДС в  $i$ -м состоянии независимо от вида колебаний (вынужденных или свободных) и от вида нелинейности (физической или конструктивной). При свободных колебаниях конструкции в (10) слагаемое  $Z^P(\tilde{t}) = 0$ .

Векторы силовых параметров реакции ДДС (восстанавливающие, диссипативные, инерционные силы) формируются на основе векторов кинематических параметров (9):

$$\left. \begin{aligned} R(t) &= K_i Y(t) + R_{up}(t_i), F(t) = C_i \dot{Y}(t), \\ I(t) &= -M_i \ddot{Y}(t). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Параметры НДС стержней фермы – продольные силы, напряжения, деформации и т. д. – определяются через узловые перемещения (см. (9)).

#### 4. Изменение параметров реакции при переходе дискретной системы в $i$ -е состояние

При переходе фермы в новое состояние при  $t_i$  вычисляются векторные невязки параметров реакции (9), (11):

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y(t_i) &= Y(t_i^+) - Y(t_i^-), \\ \Delta \dot{Y}(t_i) &= \dot{Y}(t_i^+) - \dot{Y}(t_i^-) \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $t_i^-$ ,  $t_i^+$  – время критической точки, соответственно, до и после изменения состояния системы. Аналитические выражения разрывов параметров реакции имеют вид [11]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y(t_i) &= 0, \Delta \dot{Y}(t_i) = 0, \Delta \ddot{Y}(t_i) = -M^{-1} [\Delta R(t_i) + \Delta F(t_i)], \\ \Delta R(t_i) &= \Delta K_i Y(t_i) + \Delta R_{up,i}, \Delta F(t_i) = \Delta C_i \dot{Y}(t_i), \\ \Delta I(t_i) &= \Delta R(t_i) + \Delta F(t_i), \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где  $\Delta K_i = K_{i-1} - K_i$ ,  $\Delta C_i = C_{i-1} - C_i$ ,  $\Delta R_{up,i} = R_{up}(t_{i-1}) - R_{up}(t_i)$  – соответственно, разности матриц жёсткости и демпфирования, а также вектора нелинейных составляющих ДВС.

Выражения (12) показывают, что при переходе системы в  $i$ -е состояние перемещения и скорости являются непрерывными функциями времени – это обеспечивается постановкой начальных условий (7). Остальные параметры в (9) и (11) претерпевают разрывы, связанные с изменением же-

сткостных ( $\Delta K_i$ ) и демпфирующих ( $\Delta C_i$ ) свойств конструкции. Разности  $\Delta K_i$  и  $\Delta C_i$  характеризуют степень поврежденности фермы при внезапной структурной перестройке.

В случае решения упругопластической конструктивно линейной задачи в формулах (12) невязка  $\Delta R(t_i) = 0$ , что обусловлено непрерывным характером ломаной линии  $OABC$  на диаграмме, изображённой на рис. 1.

При решении упругой конструктивно нелинейной задачи параметр  $\Delta R_{up}(t_i)$  в (12) обращается в нуль. Следует обратить внимание на то, что разность вектора ДВС  $\Delta R(t_i) \neq 0$ , так как ломаная  $OAA'B'$  на рис. 1 является разрывной линией.

#### 5. Определение точек начала нелинейного деформирования в полуциклах диаграммы жёсткости

Процесс циклического упругопластического деформирования при знакопеременном нагружении для материалов с выраженными пластическими свойствами по имеющимся экспериментальным данным характеризуется изменением величины предела текучести  $\sigma_{yl}$  при смене знака нагружения. Такое поведение материала в литературе известно как эффект Баушингера [13]. Значение  $\sigma_{yl}$  при переходе на следующий полуцикл будет зависеть от свойств материала, а также от параметров нагружения.

Рассмотрим диаграмму жёсткости с кинематическим упрочнением [15]. Для первого полуцикла диаграммы известны предел текучести  $\sigma_{yl}^{(1)}$  и соответствующая деформация  $\varepsilon_{yl}^{(1)}$  (точка  $A$  на рис. 2). Здесь верхний индекс в скобках, как и в выражении (2), обозначает номер соответствующего полуцикла диаграммы.

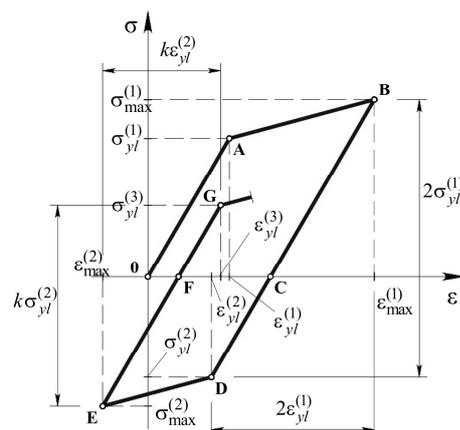


Рис. 2. К определению точек начала нелинейного деформирования в полуциклах диаграммы жёсткости несущего элемента

При переходе на 2-й полуцикл диаграммы после этапов упругопластической работы и упругой разгрузки (участки  $AB$  и  $BC$ ) значение предела текуче-

# Теория расчета строительных конструкций

сти  $\sigma_{yl}^{(2)}$  (точка  $D$ ) в соответствии с эффектом Байшингера будет отличаться от первоначального –  $\sigma_{yl}^{(1)}$ .

Новое значение можно вычислить, используя принцип Мазинга [13], согласно которому для ветви разгрузки новое значение будет отстоять на величину  $2\sigma_{yl}^{(1)}$  от напряжения, достигнутого к началу разгрузки  $\sigma_{max}^{(1)}$  (точка  $B$ ). Значение деформаций  $\varepsilon_{yl}^{(2)}$  будет также отличаться от  $\varepsilon_{max}^{(1)}$  на  $2\varepsilon_{yl}^{(1)}$ .

При переходе на 3-й и последующие полуциклы различие между напряжениями ( $\sigma_{max}^{(m-1)}$  и  $\sigma_{yl}^{(m)}$ ) и деформациями ( $\varepsilon_{max}^{(m-1)}$  и  $\varepsilon_{yl}^{(m)}$ ) будет постепенно уменьшаться на некоторую величину, которая устанавливается экспериментальным путём и зависит от типа материала и параметров нагружения. Таким образом, выражения для вычисления координат точек начала нелинейной работы при циклическом деформировании в соответствии с вышеизложенным в общем виде будут выглядеть так:

$$\sigma_{yl}^{(m)} = \sigma_{max}^{(m-1)} - \xi \sigma_{yl}^{(m-1)}, \quad \varepsilon_{yl}^{(m)} = \varepsilon_{max}^{(m-1)} - \xi \varepsilon_{yl}^{(m-1)}, \quad (13)$$

где  $\sigma_{max}^{(m-1)}, \varepsilon_{max}^{(m-1)}$  – соответственно, наибольшие напряжения и деформации в элементе конструкции к моменту разгрузки (точки  $B$  и  $E$ );  $\xi \leq 2$  – коэффициент, учитывающий изменение свойств материала при циклической упругопластической работе.

## 6. Численная реализация задачи

Применение описанной математической модели нелинейных колебаний ферм иллюстрируется на примерах временного анализа плоских статически неопределимых ферм и ферменных конструкций при действии полусинусоидальных импульсов.

Решение всех задач выполнено с помощью средств языка *MATLAB* [16].

**Пример № 1.** Рассматривается временной анализ реакции однопролётной плоской стальной фермы при упругих конструктивно нелинейных колебаниях. Выключение несущих элементов происходит вследствие потери устойчивости при возникновении сжимающих напряжений. Рассматри-

вается отказ конструкции при двухступенчатом выключении несущих элементов.

РДМ фермы изображена на рис. 3. Конструкция с учётом наложенных на неё связей имеет  $n = 24$  динамических степени свободы (по две в каждом узле).

Матрица жёсткости  $K$  фермы формируется в процедуре, составленной на языке *MATLAB*. Матрица масс равна  $M = m \cdot E$ , здесь  $m = 7$  тс – узловая масса,  $E$  – единичная матрица. Матрица демпфирования  $C$  строится по модели непропорционального демпфирования [10].

Внешняя нагрузка – статическая от собственного веса и динамическая в виде импульса. Вектор статической нагрузки имеет вид:  $Q = [0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1]^T \cdot G$ , где  $G = mg = 70$  кН. Параметры динамического воздействия: закон действия полусинусоидального импульса –  $P(t) = P_0 \sin(\theta t)$ , амплитуда  $P_{0,10} = 120$  кН, продолжительность нагрузки  $t_a = 0,2$  с,  $\theta = \pi / t_a$ .

Более подробные исходные данные приведены в работе [17].

Вектор перемещений  $Y(t)$  имеет вид:

$$Y(t) = [x_1(t), y_1(t), x_2(t), y_2(t), \dots, x_{24}(t), y_{24}(t)]^T.$$

Векторы остальных кинематических (9) и силовых (11) параметров имеют аналогичную структуру.

Реакция фермы и НДС ее элементов определяется на интервале  $t \in [0; 0,1688]$  с при шаге интегрирования  $\Delta t = 0,0005$  с.

В процессе анализа в РДМ происходит двухступенчатое последовательное выключение несущих элементов – стержней 4-5 и 4-12 (показаны пунктиром на рис. 3): в моменты времени  $t_1 = 0,1542$  с и  $t_2 = 0,1688$  с, соответственно. Отказ элементов происходит в результате потери устойчивости при достижении критических сжимающих напряжений  $\sigma_{cr, 4-5} = 308,9$  МПа и  $\sigma_{cr, 4-12} = 244,4$  МПа. После этого ферма становится геометрически изменяемой системой, и происходит потеря её несущей способности.

На рис. 4, *a-e* представлены осциллограммы кинематических (*a, в, д*) и силовых (*б, г, е*) параметров реакции фермы. Основной тон и период колебаний неповреждённой РДМ, соответственно, равны  $\omega_1 = 18,23$  с<sup>-1</sup> и  $T_1 = 0,335$  с.

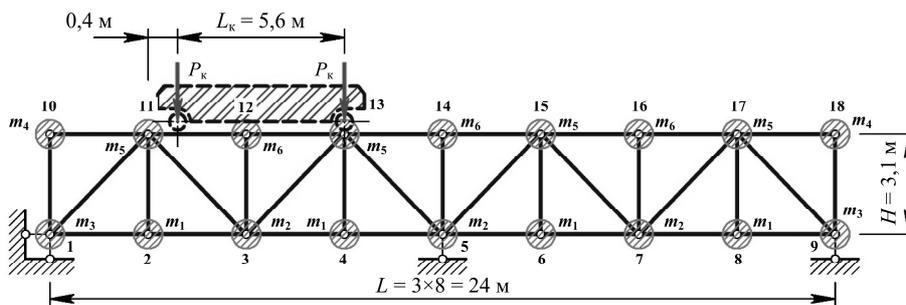


Рис. 3. Расчётная динамическая модель однопролётной фермы

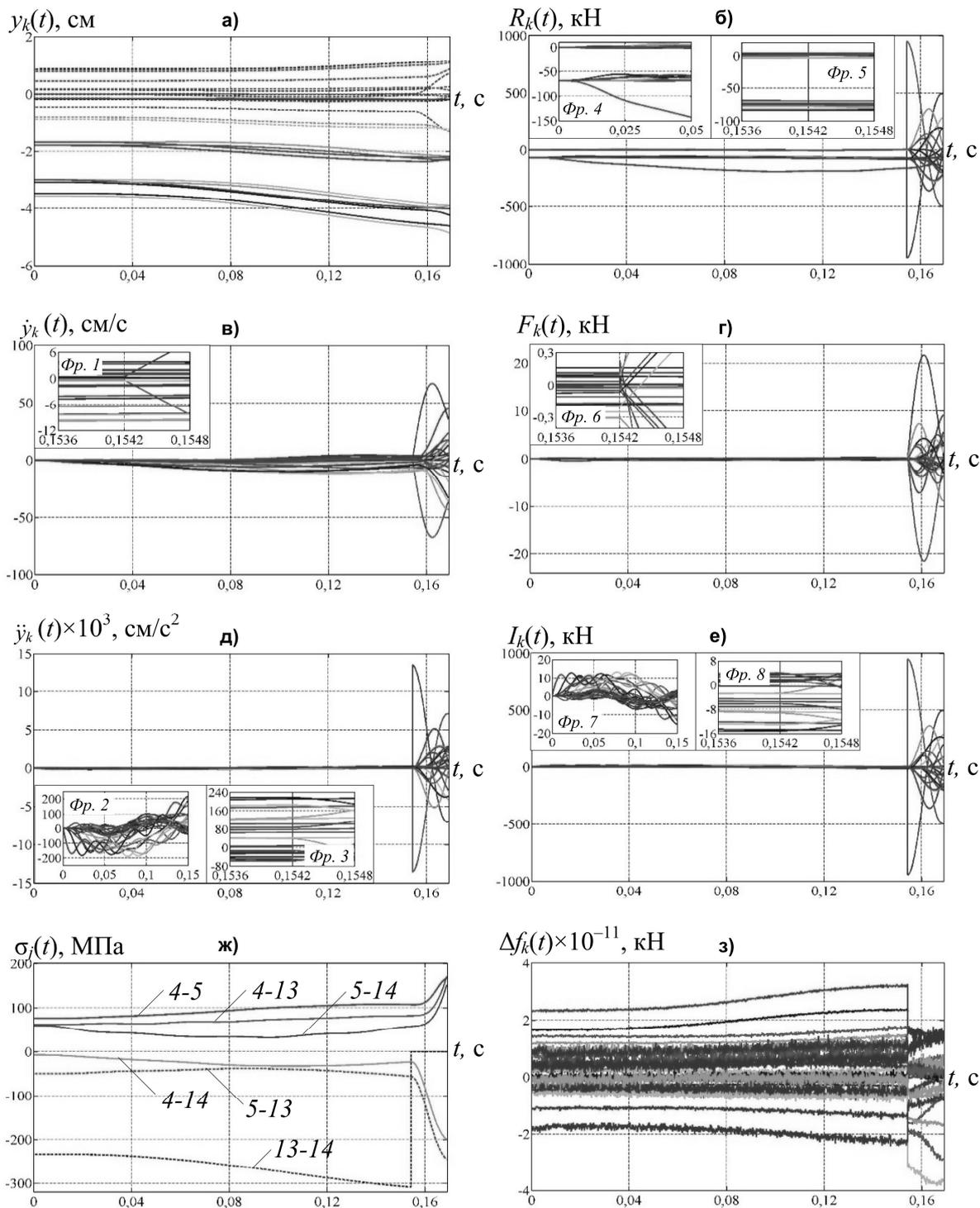


Рис. 4. Осциллограммы параметров динамической реакции модели фермы:

а, б – перемещения и восстанавливающие силы; в, г – скорости и диссипативные силы; д, е – ускорения и инерционные силы; ж – напряжения в стержнях; з – невязки уравнения движения ДДС (6)

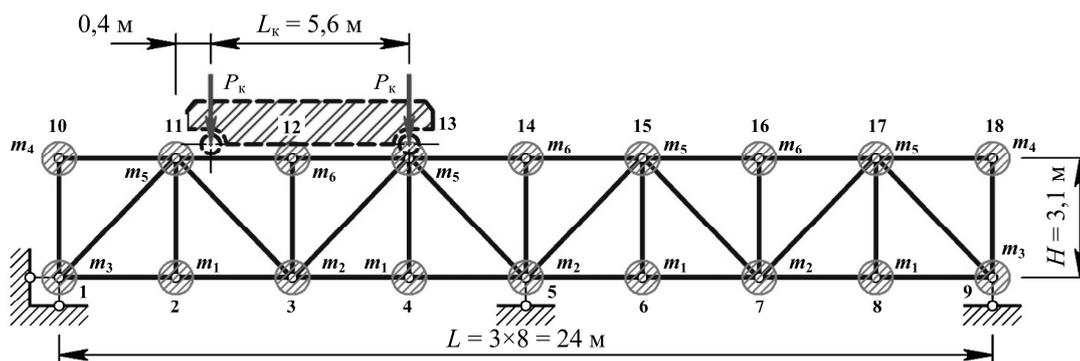


Рис. 5. РДМ подкрановой фермы

Величины статических перемещений до момента времени  $t_1$  и после него можно определить по зависимостям  $Y_{st} = K^{-1} \cdot Q$  и  $Y_{st}(t_1) = K_1^{-1} \cdot Q$ . Здесь  $K$  и  $K_1$  – матрицы жёсткости, соответственно, неповреждённой и повреждённой фермы.

После выключения элемента 4-5 верхнего пояса (при  $t_1$ ) происходит значительное снижение жёсткости конструкции и, как следствие, основного тона колебаний:  $\omega_1(t_1) = 11,32 \text{ с}^{-1}$ . При этом можно наблюдать качественное изменение характера колебаний фермы, что можно проследить по поведению кривых на осциллограммах перемещений: оно приобретает более выраженный колебательный характер.

Осциллограммы скоростей узлов, связанных с выключаемыми элементами, при  $t_1$  имеют переломы (рис. 4, в). Осциллограммы ускорений (рис. 4, д) в тот же момент времени терпят разрывы.

На осциллограммах силовых параметров (рис. 4, б, з, е) и ускорений (рис. 4, д) можно наблюдать разрывы, которые связаны с внезапным изменением жесткостных и демпфирующих свойств системы, о чём было сказано в 1-й части статьи.

На рис. 4, ж показаны осциллограммы напряжений в стержнях наиболее нагруженной 4-й панели фермы. Пунктиром показаны линии для выключаемых из работы элементов. Здесь можно заметить, что после выключения 1-го элемента, происходит более чем двукратное увеличение значений напряжений в элементах рассматриваемой панели.

Для проверки решения построена невязка векторов левых и правых сил уравнения (6):

$$\Delta f(t) = M_i \ddot{Y}(t) + C_i \dot{Y}(t) + K_i Y(t) - P(t) - Q_i. \quad (a)$$

Здесь нелинейная составляющая ДВС  $R_{up}(t_i)$  (см. (4), (5)) равна нулю, так как решаемая задача является упругой.

Наибольшее значение невязки не превышает  $|\Delta f_k(t)| \leq 3,95 \times 10^{-11} \text{ кН}$  (рис. 4, з), что свидетель-

ствует о точности решения задачи используемым методом.

**Пример № 2.** Рассматриваются колебания подкрановой фермы, которые вызваны аварийным воздействием от удара крана по ферме вследствие обрыва стропа на тележке с грузом. На рис. 5 приведена РДМ фермы ( $n = 32$ ) с наиболее невыгодным положением крана на ней. До обрыва стропа кран двигался с малой скоростью, таким образом его воздействие на ферму можно считать статическим.

Материал стержней – сталь 09Г2 ( $E = 206\,000 \text{ МПа}$ ). Верхний пояс выполнен из двутавра 50Ш4, нижний пояс, стойки и раскосы из парных уголков, соответственно –  $2 \angle 200 \times 125 \times 12$ ,  $2 \angle 125 \times 12$ , и  $2 \angle 160 \times 16$ .

Более подробные исходные данные приведены в работах [18, 19].

При  $t = 0$  на ферму действует собственный вес и веса крана с грузом. Затем по ней происходит аварийный удар крана, моделируемый в виде вертикальных полусинусоидальных импульсов  $P(t) = P_0 \sin(\theta t)$ . При грузоподъёмности крана 32 т со средним режимом работы амплитуда нагрузки в рабочем режиме составляет  $P_k = 320 \text{ кН}$ . Нагрузка прикладывается к узлам, ее амплитуды зависят от расстояния от колёс до узлов (рис. 6):  $P_{k,1} = (2,6/3)P_k$ ,  $P_{k,2} = (0,4/3)P_k$ ,  $P_{k,3} = P_k$ .

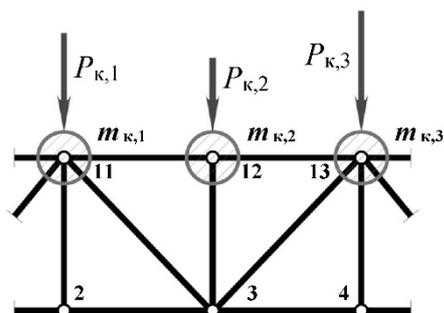


Рис. 6. Узловая крановая нагрузка

Характеристики воздействия следующие: амплитуды  $P_{0,18} = 277,33$  кН,  $P_{0,20} = 42,67$  кН,  $P_{0,22} = 320$  кН; продолжительность  $t_a = 0,06$  с;  $\theta = \pi / t_a = 52,36$  с<sup>-1</sup>. Приняв коэффициент динамичности  $k_{дин} = 3$ , максимальная амплитуда нагрузки составит  $P_{к,дин} = 960$  кН.

Вследствие потери устойчивости ( $\sigma_{cr} = 297,7$  МПа) из работы последовательно выключаются раскосы 5-13 и 1-11, соответственно, при  $t_1 = 0,0448$  с и  $t_2 = 0,1067$  с. После этого левый пролёт фермы становится изменяемой системой и теряет несущую способность.

На рис. 7, а, б приведены графики параметров реакции для узлов левого пролёта фермы. В момент отказа раскоса 5-13 кривые восстанавливающие силы (рис. 7, б), связанные с его концами, терпят разрывы. На рис. 7, в представлены осциллограммы напряжений в наиболее нагруженных стержнях (пунктиром отмечены графики для выключаемых раскосов).

Для проверки решения построена невязка (а) векторов левых и правых сил уравнения (6). Наибольшее значение невязки  $|\Delta f_k(t)|$  не превышает величины  $3,4 \times 10^{-10}$  кН (рис. 7, г), что свидетельствует о точности решения задачи.

**Примеры № 3, 4.** РДМ ферменной конструкции показана на рис. 8, а. Система имеет  $n = 2$  степени свободы (по вертикали и по горизонтали). Масса  $m = 10$  т сосредоточена в узле 4.

Данная задача решалась с учётом упругопластического деформирования центрального стержня

2-4 (показан пунктиром на рис. 8, а). При этом были рассмотрены два варианта решения: 1-й вариант – без учёта, 2-й вариант – с учётом потери устойчивости этого элемента. Во 2-м варианте учитывалась циклическая работа стержня, связанная с его попеременным выключением при сжатии и включением при растяжении. Потеря устойчивости происходит при достижении критического напряжения  $\sigma_{cr} = 4,11$  МПа. На рис. 8 приведены построенные в системе *MATLAB* диаграммы жёсткости материала этого стержня для обоих вариантов решения.

Матрицы жёсткости, масс и демпфирования формируются аналогичным образом, как и в примере № 1.

В качестве внешней нагрузки рассматривался полусинусоидальный импульс длиной  $t_a = 0,01$  с. Амплитуды нагрузки составляли, соответственно,  $P_0 = 455$  кН для 1-го варианта и  $P_0 = 250$  кН для 2-го варианта решения.

Более подробные исходные данные по задаче приведены в работе [20].

На рис. 9 приведены осциллограммы параметров реакции системы для 1-го (а-з) и 2-го (и-р) вариантов решения. На фрагментах а-в, и-л изображены кинематические параметры, на фрагментах з-е, м-о – силовые.

Осциллограммы перемещений (а, и) и скоростей (б, к) массы  $m$  представляют собой непрерывные графики. При этом осциллограммы

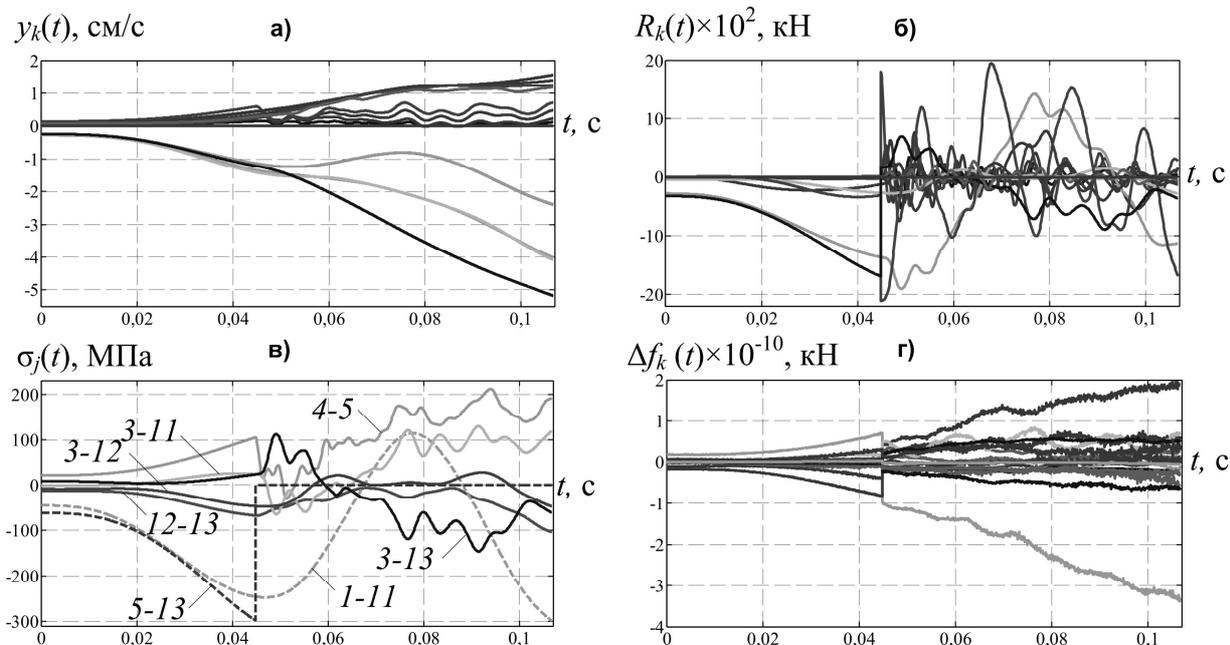


Рис. 7. Осциллограммы параметров реакции РДМ левого пролёта подкрановой фермы: а – перемещения; б – восстанавливающие силы; в – напряжения в стержнях; г – невязки уравнения движения ДДС (6)

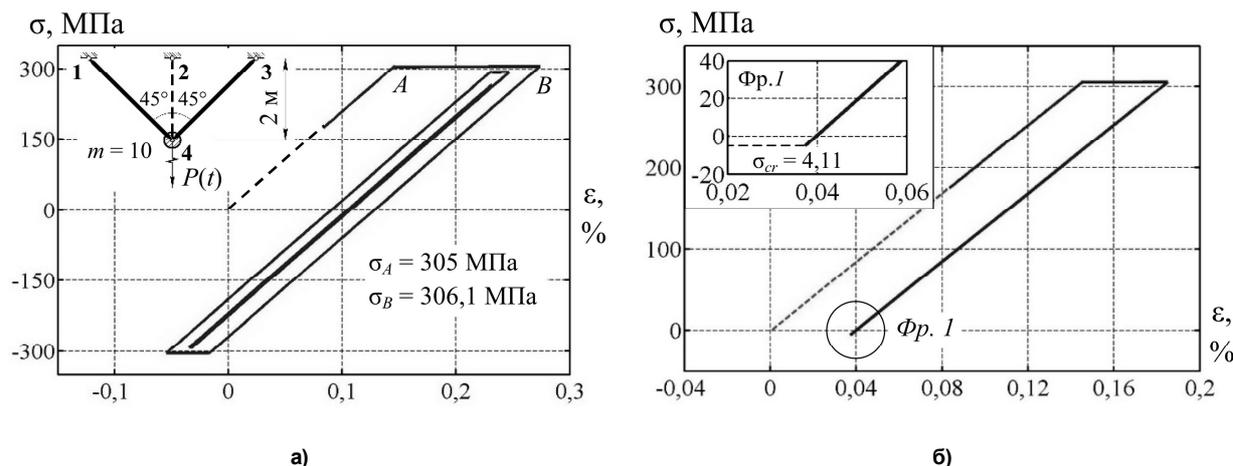


Рис. 8. Диаграммы деформирования материала стержня 2-4 при учёте нелинейности:  
а – физической; б – физической и конструктивной

скоростей имеют переломы в критических временных точках, при переходе системы в новое состояние.

Вертикальные колебания массы происходят относительно ненулевой асимптоты, высота которой меняется в моменты времени  $t_i$ . Для перемещений массы в горизонтальном направлении характерны те же эффекты, что и для вертикальных колебаний, но в гораздо меньшей степени. При этом горизонтальные колебания имеют ярко выраженную форму «биения», с периодом  $T = 0,822 \text{ с}$ , что обусловлено близостью частот собственных колебаний:  $\omega_1 = 69,25 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 76,9 \text{ с}^{-1}$ . Для вертикальных колебаний этот эффект выражен значительно слабее.

Графики ускорений ( $\epsilon, \lambda$ ) так же, как и осциллограммы скоростей, не имеют смещения относительно положения статического равновесия. На фрагментах графиков ускорений массы в вертикальном направлении при  $t = 0,01 \text{ с}$  можно видеть перелом, связанный с окончанием действия импульсной нагрузки. Также на фрагментах можно видеть скачки, появляющиеся в характерных точках упругопластического процесса.

Осциллограммы динамических восстанавливающих сил ( $z, m$ ) для 1-го варианта задачи являются непрерывными, и в точках перехода системы в новое состояние наблюдаются переломы. На осциллограммах для 2-го варианта, помимо указанных явлений, можно наблюдать также и разрывы, связанные с конструктивно нелинейной работой системы.

Характер диссипативных сил ( $\delta, n$ ) на осциллограммах в целом сходен с характером скоростей ( $\beta, \kappa$ ), а кривые инерционных сил ( $e, o$ ) иден-

тичны кривым ускорений ( $\epsilon, \lambda$ ). Однако в отличие от скоростей осциллограммы диссипативных сил содержат скачки.

На фрагментах  $ж, n$  рис. 9 показаны осциллограммы напряжений в стержнях фермы. Для 1-го варианта задачи ( $ж$ ) осциллограмма напряжений в центральном стержне содержит 5 положив участков упрочнения (однако явно заметны только три участка), которые появляются при достижении предела текучести  $\sigma_{yl}$ . Для 1-го полуцикла эта величина равна 315 МПа, для последующих полуциклов – по величине меньше начального значения и определяется по (13) в соответствии с принципом Мазинга [13].

При 2-м варианте решения задачи ( $n$ ) первый пологий участок связан с упругопластической работой системы (рис. 9, б), остальные – с её конструктивно нелинейной работой. Эти участки получены при напряжении  $\sigma = 0$  в связи с циклическим выключением центрального стержня из работы при потере устойчивости, происходящим вплоть до  $t = 0,48 \text{ с}$ . На этом этапе стержень работает как односторонняя связь. В последующем он больше не выключается из работы, поскольку в результате демпфирования система переходит в режим упругих колебаний с учётом накопленных пластических деформаций.

Осциллограммы невязок уравнения (6), вычисленные по зависимости (а), приведены на фрагментах  $з, p$  рис. 9. Из графиков видно, что невязка  $|\Delta f_k(t)|$  не превышает величин  $5,9 \times 10^{-1} \text{ кН}$  и  $3,95 \times 10^{-13} \text{ кН}$ , соответственно, для 1-го и 2-го вариантов решения. Данный факт свидетельствует о точности решения.

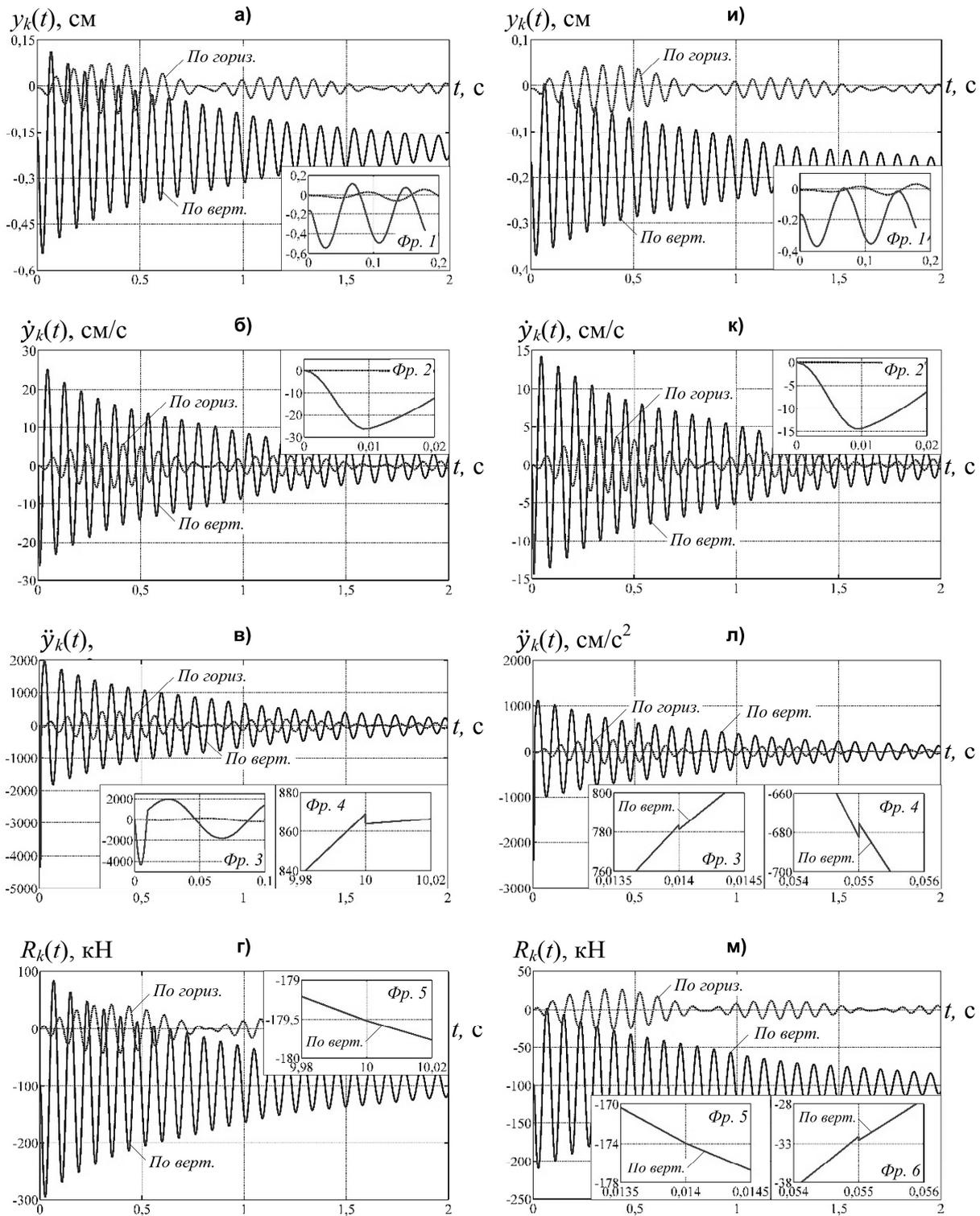
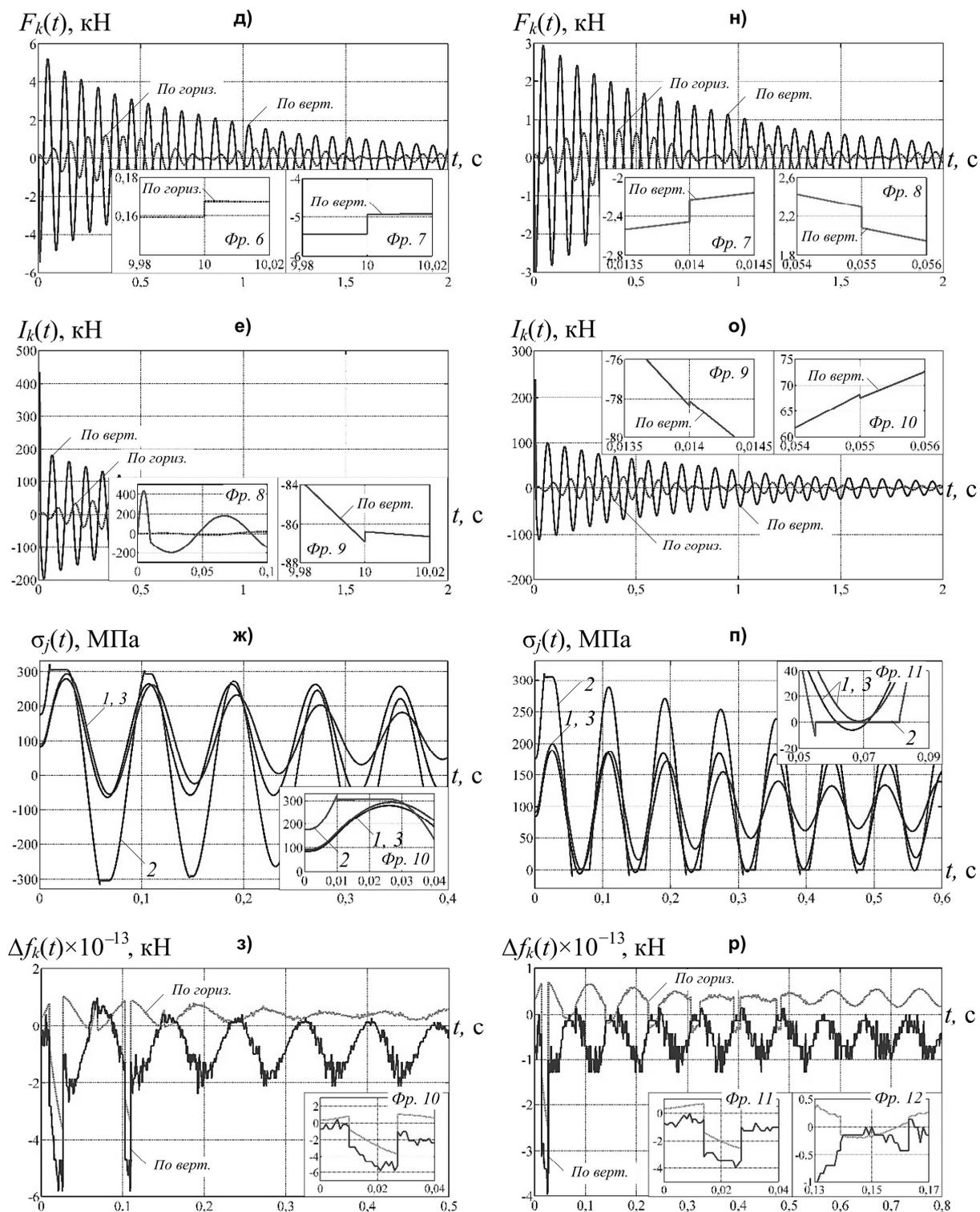


Рис. 9. Осциллограммы параметров динамической реакции модели ферменной конструкции для 1-го (а–з) и 2-го (и–р) вариантов расчёта (начало): а, и – перемещения; б, к – скорости; в, л – ускорения; г, м – восстанавливающие силы



**Рис. 9. (окончание):**  
 д, н – диссипативные силы; е, о – инерционные силы;  
 ж, п – напряжения в стержнях; з, р – невязка уравнения движения ДДС (6)

**Заключение**

Представленные примеры иллюстрируют накопленный на кафедре строительной механики ЮУрГУ опыт расчётов нелинейных колебаний ферм и ферменных конструкций на основе МВА. Полученные результаты дают представление о возможностях количественного и качественного анализа динамической реакции конструкций при сложной постановке задачи, а также показывают эффективность используемого метода расчёта в рамках принятых моделей.

**Литература**

1. Клаф, Р. Динамика сооружений / Р. Клаф, Д.Ж. Пензиен. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
2. Ерхов, М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций / М.И. Ерхов. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
3. Потапов, А.Н. Временной анализ упруго-пластических конечномерных диссипативных систем при нестационарных воздействиях / А.Н. Потапов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2005. – Вып. 3. – № 13(53). – С. 57–62.
4. Безделев, В.В. Численное моделирование динамического напряжённо-деформированного состояния зданий при сейсмических воздействиях с целью оптимизации параметров демпфирующих устройств / В.В. Безделев // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2008. – Т. 4, № 2. – С. 24–25.
5. Ключева, Н.В. К вопросу развития экспериментальных исследований деформирования и разрушения пространственных конструктивных систем при запроектных воздействиях / Н.В. Ключева, О.В. Ажзеуров, К.А. Шувалов // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2013. – № 1(46). – С. 111–116.
6. Еремеев, П.Г. Предотвращение лавинообразного (прогрессирующего) обрушения несущих конструкций уникальных большепролетных сооружений при аварийных воздействиях / П.Г. Еремеев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2006. – № 2. – С. 65–72.
7. Шлычков, С.В. Расчёт геометрически нелинейных конструкций методом конечных элементов / С.В. Шлычков, С.П. Иванов, С.Г. Кузюков, Ю.В. Лоскутов // Известия высших учебных заведений. Технические науки. Машиностроение и машиноведение. – 2008. – Вып. 4. – С. 145–152.
8. Симон, Е.В. К расчёту геометрически нелинейных стержневых систем в смешанной форме / Е.В. Симон // Интернет-вестник ВолгГАСУ. Серия Политематическая. – 2012. – Вып. 3 (23). – URL: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Simon-2012\\_3\(23\).pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Simon-2012_3(23).pdf) (дата обращения: 07.02.2016).
9. Свентиков, А.А. Геометрически нелинейный расчёт висячих стержневых конструкций. Ч. 2. Матричный расчёт висячих систем / А.А. Свентиков // Строительство и архитектура. – 1970. – Т. 1, № 1. – С. 18–27.
10. Потапов, А.Н. Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях: монография / А.Н. Потапов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.
11. Уфимцев, Е.М. Динамический расчёт статически неопределимых ферм методом временного анализа с учётом физической и конструктивной нелинейности: дис. ... канд. техн. наук / Е.М. Уфимцев; ТГАСУ. – Томск, 2016. – 240 с.
12. Рейнер, М. Реология / М. Рейнер. – М.: Наука, 1965. – 224 с.
13. Москвитин, В.В. Пластичность при переменных нагрузках / В.В. Москвитин. – М.: Изд-во МГУ, 1965 – 264 с.
14. Потапов, А.Н. Колебания систем с обрушающимися связями / А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев // Теория и практика расчёта зданий, сооружений и элементов конструкций. Аналитические и численные методы: Сборник трудов международной научно-практической конференции 29 июня 2011. – М.: Изд-во МГСУ, 2011. – С. 292–301.
15. Моделирование физической нелинейности стального стержня при одноосном нагружении с учётом истории деформирования / Б.И. Пунус, В.В. Безделев, Г.И. Гребенюк, П.С. Созонов // Известия вузов. Строительство. – 2013. – № 5. – С. 122–128.
16. Дьяконов, В.П. MATLAB 7.\*/R2006/R2007: Самоучитель / В.П. Дьяконов. – М.: ДМК Пресс, 2008. – 768 с.
17. Потапов, А.Н. Динамика конструкций при выключении связей / А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев // Морские интеллектуальные технологии. – 2012. – № 1. – С. 20–24.
18. Потапов, А.Н. Временной анализ подкрановой фермы при аварийном воздействии / А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев, Н.А. Зямбаев // Проблемы оптимального проектирования сооружений: сборник тезисов докладов 3-й Всероссийской конференции 15–17 апреля 2014. – Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2014. – С. 318–326.
19. Потапов, А.Н. Анализ колебаний подкрановой фермы при аварийном воздействии / А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев, Н.А. Зямбаев // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2014. – № 5. – С. 55–59.
20. Потапов, А.Н. Временной анализ реакции дискретных систем с учётом физической и конструктивной нелинейности / А.Н. Потапов, Е.М. Уфимцев // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2014. – Т. 10, № 3. – С. 146–158.

**Уфимцев Евгений Михайлович**, старший преподаватель кафедры «Строительное производство и теория сооружений», Архитектурно-строительный институт, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), [ufimtcevem@susu.ru](mailto:ufimtcevem@susu.ru)

Поступила в редакцию 20 декабря 2016 г.

## MODELING OF NONLINEAR OSCILLATIONS OF FLAT TRUSSES DURING NONSTATIONARY PROCESSES BASED ON THE TIME ANALYSIS METHOD

*E.M. Ufimtsev, ufimtcevem@susu.ru*  
South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The article covers the experience of calculation of statically indeterminate flat trusses and truss structures under the action of single half-sine pulse forces in the process of nonlinear oscillations performed at the Department of Structural Mechanics of South Ural State University. The work of a single-span bridge truss, a two-span crane truss and a 3-rods truss structure is considered in the described examples. The structural oscillations are associated with physically and structurally nonlinear behavior of individual load-bearing elements. The behavior of parameters of the dynamic response of trusses in the process of oscillation is shown. The method of time analysis based on the study of characteristic matrix quadratic equations is used as the calculation method.

*Keywords: method, time analysis, mathematical model, discrete system, dissipative system, flat truss, physical nonlinearity, structural nonlinearity, oscillations, dynamic response, Matlab.*

### References

1. Klaf R., Penzien D. Zh. *Dinamika sooruzheniy* [Structural Dynamics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1979. 320 p.
2. Erkhov M.I. *Teoriya ideal'noplasticheskikh tel i konstruktivnykh* [The Theory of Ideal Plastic Bodies and Structures]. Moscow, Nauka Publ., 1978. 352 p.
3. Potapov A.N. [Time Analysis of Elastic-plastic Finite Dissipative Systems Under Nonstationary Effects]. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction and Architecture*, 2005, no. 13(53), pp. 57–62. (in Russ.).
4. Bezdelev V.V. [Numerical Simulation of the Dynamic Stress-strain State of Buildings under Seismic Actions in Order to Optimize Parameters of Damping Devices]. [International Journal for Computational Civil and Structural Engineering], 2008, no. 2, vol. 4, pp. 24–25.
5. Klyueva N.V., Azhzeurov O.V., Shuvalov K.A. [On the Issue of Development of Experimental Studies of Deformation and Fracture of Spatial Design Systems under Beyond Design Impacts]. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta* [Journal «Proceedings of the South-West State University»], 2013, no. 1(46), pp. 111–116. (in Russ.).
6. Ereemeev P.G. [Prevention Avalanche (Progressive) Collapse of Supporting Structures of Unique Large-Span Structures during Emergency Loads]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Building Mechanics and Calculation of Constructions], 2006, no. 2, pp. 65–72. (in Russ.).
7. Shlychkov S.V., Ivanov S.P., Kuzovkov S.G., Loskutov Yu.V. [Calculation of Geometrically Nonlinear Structures Using Finite Element Method]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Tekhnicheskienauki. Mashinostroenie i mashinovedenie* [Proceedings of the Higher Educational Institutions. Technical Science. Machine Building and Engineering], 2008, no. 4, pp. 145–152. (in Russ.).
8. Simon E.V. *K raschetu geometricheski nelineynykh sterzhnevnykh sistem v smeshannoy forme* [Calculation of Geometrically Nonlinear Rod Systems in Mixed Form]. Available at: [http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Simon-2012\\_3\(23\).pdf](http://vestnik.vgasu.ru/attachments/Simon-2012_3(23).pdf).
9. Sventikov A.A. [Geometrically Nonlinear Calculation of the Hanging Rod Designs. Part 2: The Matrix Calculation of Suspension Systems]. *Stroitel'stvo i arkhitektura* [Construction and architecture], 1970, no. 1, vol. 1, pp. 18–27. (in Russ.).
10. Potapov A.N. [Dynamical Analysis of Discreet Dissipative Systems under Nonstationary Loadings]. Chelyabinsk, South Ural St. Univ. Publ., 2003. 167 p.
11. Ufimtcev E.M. *Dinamicheskii raschet staticheskineopredelimykh ferm metodom vremennogo analiza s uchetom fizicheskoy i konstruktivnoy nelineynosti*. Kand. diss. [Dynamic Calculation of Statically Indeterminate Trusses by Time Analysis, Taking into Account the Physical and Structural Nonlinearity. Cand. sci. diss.]. Tomsk, 2016. 240 p.
12. Reiner M. *Reologiya* [Reology]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 224 p.
13. Moskvitin V.V. *Plastichnost' pri peremennykh nagruzheniyah* [Plasticity at Variable Loadings]. Moscow, MSU Publ., 1965. 264 p.

14. Potapov A.N., Ufimtcev E.M. [Oscillations of Systems with a Breaking Ties]. *Teoriya i praktika rascheta zdaniy, sooruzheniy i elementov konstruksiyi. Analiticheskie i chislennye metody* [Theory and Practice of Calculation of Buildings, Structures and Structural Elements. Analytical and Numerical Methods: Proceedings of the International Scientific-Practical Conference of June 29, 2011], 2011, pp. 292–301. (in Russ.).
15. Pinus B.I., Bezdelev V.V., Grebenyuk G.I., Sozonov P.S. [Modelling of Physical Nonlinearity of Steel Bar Under Uni-axial Loading, Taking into Account the Deformation History]. *Izvestiya vuzov. Stroitelstvo* [Proceedings of the Universities. Building], 2013, no. 5, pp. 122–128. (in Russ.).
16. D'yakonov V.P. *MATLAB 7.\*/R2006/R2007* [MATLAB 7.\*/R2006/R2007]. Moscow, DMK Press Publ., 2008. 768 p.
17. Potapov A.N., Ufimtcev E.M. [Dynamics of Structures Underswitching off the Ties]. *Morskije Intellektual'nye tehnologii* [Marine Intelligent Technology]. St. Petersburg, 2012, no. 1, pp. 20–24. (in Russ.).
18. Potapov A.N., Ufimtcev E.M., Zyambaev N.A. [Time Analysis of the Crane Truss in Case of Disaster Impact]. *Problemy optimal'nogo proektirovaniya sooruzheniy* [Problems of Optimal Design Constructions: Abstracts of the 3rd All-Russian Conference of 15–17 April 2014]. Novosibirsk, 2014, pp. 318–326. (in Russ.).
19. Potapov A.N., Ufimtcev E.M., Zyambaev N.A. [Analysis of oscillations of the crane truss under disaster impact]. *Stroitel'naya mehanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Calculation of Constructions]. Moscow, 2014, no. 5, pp. 55–59. (in Russ.).
20. Potapov A.N., Ufimtcev E.M. [Time Analysis of Dynamic Response of Discrete Systems, Taking into Account the Physical and Structural Nonlinearity]. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 2014, vol. 10, iss. 3, pp. 146–158. (in Russ.).

*Received 20 December 2016*

---

#### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Уфимцев, Е.М. Моделирование нелинейных колебаний плоских ферм при нестационарных процессах на основе метода временного анализа / Е.М. Уфимцев // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2017. – Т. 17, № 1. – С. 20–33. DOI: 10.14529/build170103

#### FOR CITATION

Ufimtsev E.M. Modeling of Nonlinear Oscillations of Flat Trusses During Nonstationary Processes Based on the Time Analysis Method. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2017, vol. 17, no. 1, pp. 20–33. (in Russ.). DOI: 10.14529/build170103