

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕТОДАХ РАСЧЕТА

Ю.А. Ивашенко, А.В. Фердер

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

Предложен вариант вероятностного расчета строительных конструкций. Определяется надежность для случая, когда функции распределения заранее неизвестны. Вероятностные расчеты прочности, устойчивости, деформативности конструктивных систем и их элементов разрабатываются с целью повышения точности обеспечения надежности. Повышение точности происходит за счет более детального учета случайного характера параметров, от которых вычисляются внутренние усилия, несущая способность и другие показатели конструкций.

Предложен алгоритм вероятностного расчета, при котором нет необходимости заранее принимать одинаковость законов распределения для внутренних усилий и несущей способности.

Ключевые слова: вероятностный расчет, функции распределения и их характеристики, надежность, несущая способность.

По действующим нормам [1, 2] и рекомендациям [3] прочность конструктивных систем и их элементов определяется сравнением внутренних усилий S_{ext} с их предельными значениями N_{ult} . Для вычисления S_{ext} и N_{ult} используются методы строительной механики и формулы несущей способности, в которых параметры конструктивных систем и их элементов считаются действительными числами.

В действительности все параметры являются случайными величинами, характеризующими случайные события, которые могут быть взаимосвязаны или независимы друг от друга.

В действующих нормах и рекомендациях случайность учитывается введением коэффициентов, полученных статистической обработкой экспериментальных данных. Можно предполагать, что при таком подходе возникают некоторые неточности, так как процесс вычисления есть моделирование естественных процессов с неустановленной степенью точности. В связи с этим возникли «вероятностные» методы расчета конструктивных систем [4, 5]. Эти методы основаны на применении определенных правил алгебраических операций над случайными числами (величинами) с учетом законов их распределения и допущений их взаимозависимости [6, 7, 8–10].

Задачами вероятностного метода расчета конструкций и сооружений является вычисление величин S_{ext} и N_{ult} путем математических операций над случайными величинами. При этом S_{ext} и N_{ult} будут являться случайными величинами или случайными процессами, характеризуемые функциями распределения, средними значениями, дисперсиями, стандартами.

Вопрос о надежности элемента конструкции и системы, решается сравнением S_{ext} и N_{ult} с заданной вероятностью отказов, при этом эти величины

являются функциями случайных величин или случайными функциями.

В связи с постановкой такой задачи предполагается, что функции распределения усилий и несущей способности представляются одинаковым законом (например, нормальный). Это предположение основывается на некоторых экспериментальных данных, но не является общим.

В статье предлагается постановка решения таких задач, при которой нет необходимости предполагать одинаковость законов распределения S_{ext} и N_{ult} . В связи с этим используется следующий алгоритм и основные положения.

1. Исходными данными для расчета являются характеристики случайных величин, т.е. параметров, входящих в формулы для S_{ext} и N_{ult} :

– функции распределения $f_S(x_i)$, $f_N(\zeta_j)$,

где x_i и ζ_j – случайные величины в количестве $i = 1 \dots k$ и $j = 1 \dots n$;

– математические ожидания соответственно

$$M_S(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \cdot f_S(x_i) dx_i, ; \quad (1)$$

$$M_N(\zeta_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta_j \cdot f_N(\zeta_j) d\zeta_j$$

– дисперсии соответственно

$$D_S(x_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x_i - M_S(x_i)] \cdot f_S(x_i) dx_i, \quad (2)$$

$$D_N(\zeta_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\zeta_j - M_N(\zeta_j)] \cdot f_N(\zeta_j) d\zeta_j;$$

– среднеквадратичные отклонения (стандарты)

$$\sigma_S(x_i) = \sqrt{D_S(x_i)}, \quad \sigma_N(\zeta_j) = \sqrt{D_N(\zeta_j)}; \quad (3)$$

2. По выше приведенным формулам вычисляются характеристики S_{ext} и N_{ult} , а именно: $M(S)$ и $M(N)$; $D(S)$ и $D(N)$; $\sigma(S)$ и $\sigma(N)$.

3. Используя математические зависимости теории вероятностей для S_{ext} и N_{ult} как для случайных величин можно записать:

$$\left. \begin{aligned} M(S) &= \int_{-\infty}^{+\infty} S \cdot f(S) dS; \\ M(N) &= \int_{-\infty}^{+\infty} N \cdot f(N) dN; \\ D(S) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [S - M(S)] \cdot f(S) dS; \\ D(N) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [N - M(N)] \cdot f(N) dN. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

На основании теоремы о сложении противоположных случайных событий записываются уравнения для любых значений $S_{ext.i}$ и $N_{ult.i}$:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\infty}^{S_i} f(S) dS + \int_{-\infty}^{+\infty} f(S) dS &= 1; \\ \int_{-\infty}^{N_j} f(N) dN + \int_{-\infty}^{+\infty} f(N) dN &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Уравнения (4) и (5) являются системой интегральных уравнений. Характеристики $M(S)$, $M(N)$, $D(S)$, $D(N)$ равны числам, полученным в п. 2. Решением системы интегральных уравнений определяются неизвестные функции $f(S)$ и $f(N)$. Эти функции являются функциями распределения случайных величин S_{ext} и N_{ult} . Они определяются без заранее принятой формы (закона распределения).

Задача определения надежности (определение наступления предельного состояния или его не наступления с заданной заранее вероятностью) решается наложением функций $f(S)$ и $f(N)$ в координатных осях «частота (вероятность) P – значения S и N » (см. рисунок) [8, 9]. Заштрихованная область определяет вероятность разрушения, т. е. частоту $P\{N < S\}$ того, что $N < S$.

Вопрос о допустимой вероятности наступления разрушения (предельного состояния) решается

на основе экономических соображений и социально-психологических последствий. При установлении допустимой величины вероятности наступления разрушения задача обеспечения ее величины решается по двум направлениям:

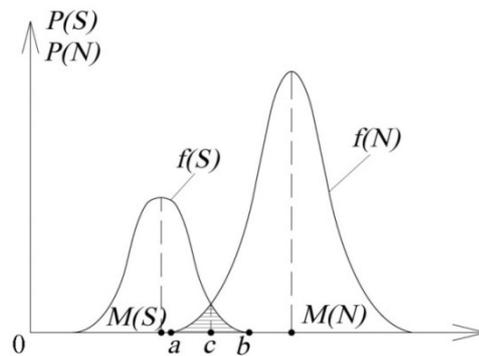
– смещением $f(S)$ вдоль оси S_{ext} и N_{ult} , т.е. изменением величины сил и нагрузок (влево или вправо);

– смещением $f(N)$, т.е. изменением величины сопротивления, изменяя величины его параметров, их статических характеристик. В анализируемой литературе [13–15] решение данного вопроса не приводится.

Прямое решение данного вопроса состоит в том, чтобы решить следующее уравнение:

$$\int_a^c f(N) dN + \int_c^b f(S) dS = P\{N < S\}, \quad (6)$$

где правая часть – заданное число, а (a, c, b) – фиксированные значения на оси S, N (см. рисунок).



Функции распределения

Для практического применения предлагаемого алгоритма можно использовать упрощение, состоящее в том, что непрерывный интервал интегрирования $(-\infty \dots +\infty)$ заменить на фиксированные значения S_i и N_i , используя известные в теории вероятности соотношения, подставляя соответственно при $x = S$ и $x = N$ [7, 11]:

$$\begin{aligned} M(x) &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot P\{x = x_i\}; \\ D(x) &= \sum_{i=1}^n [x_i - M(x)]^2 \cdot P\{x = x_i\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Ниже приведен пример составления и решения системы уравнений с использованием зависимостей (7).

Пример. Дана функция плотности распределения – $f(x_1 = 7) = 0,25$; $f(x_2 = 10) = 0,50$; $f(x_3 = 13) = 0,25$;

Средние значения – $M(x_i) = (x_1 + x_2 + x_3) / n = 10$;

$$M(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i P_i = 7 \cdot 0,25 + (10 \cdot 0,50 + 13 \cdot 0,25) / 3 = 10;$$

$$\text{Дисперсия} - D(x_i) = (7-10)^2 \cdot 0,25 + (10-10)^2 \cdot 0,50 + (13-10)^2 \cdot 0,25 = 4,50;$$

$$\text{Стандарт} - \sigma = \sqrt{D(x_i)} = \sqrt{4,50} = 2,12.$$

Решение обратной задачи – определение значений функции плотности распределения, т. е. значений $f(x_1 = 7) = P_1$, $f(x_2 = 10) = P_2$, $f(x_3 = 13) = P_3$ по известным величинам $M(x_i)$, $D(x_i)$, $\sigma(x_i)$.

Для трех неизвестных значений функций плотности распределения необходимо составить не менее трех уравнений:

$$\begin{cases} 7P_1 + 10P_2 + 13P_3 = 10; \\ (7-10)^2 P_1 + (10-10)^2 P_2 + (13-10)^2 P_3 = 4,50; \\ P_1 + P_2 + P_3 = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы дает следующие величины:

$$P_1 = 0,25; P_2 = 0,50; P_3 = 0,25.$$

Выводы

1. Вероятностные расчеты позволяют решать задачи обеспечения безопасности и долговечности строительных конструкций и сооружений при накоплении определённой базы статистических данных на момент их создания и в течение эксплуатации.

При разработке алгоритмов определения безопасности и долговечности необходимо учитывать развитие нелинейных деформаций в материалах конструкций и связанного с этим перераспределения внутренних усилий, рассматривая эти процессы как случайные. В литературе такие разработки отсутствуют.

2. Предлагаемый алгоритм решения задачи о безопасности конструкций и сооружений для сложных конструктивных систем может быть использован при разработке специальных программ для ЭВМ.

Ивашенко Юлий Алексеевич, доктор техн. наук, профессор кафедры «Строительные конструкции и сооружения», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), ivashenkoia@susu.ru

Фердер Анна Владимировна, ст. преподаватель кафедры «Строительные конструкции и сооружения», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), ferderav@susu.ru

Литература

1. СНиП 2.03.01-84. Бетонные и железобетонные конструкции. – М.: Госстройиздат, 1985. – 80 с.
2. СНиП II-23-81* Стальные конструкции. – М.: ЦИТП, 1991. – 96 с.
3. СП 52-102-2004. Предварительно-напряженные железобетонные конструкции. – М.: ФГУП ЦПП, 2004. – 38 с.
4. Лужин, О.В. Вероятностные методы расчета сооружений / О.В. Лужин. – М.: Стройиздат, 1983. – 122 с.
5. Болотин, В.В. Статистические методы в строительной механике / В.В. Болотин. – М.: Госстройиздат, 1965. – 280 с.
6. Лукомский, Я.И. Теория корреляций и ее применение к анализу производства / Я.И. Лукомский. – М.: Госстройиздат, 1961. – 375 с.
7. Авиром, Л.С. Надежность конструкций сборных зданий и сооружений / Л.С. Авиром. – Л.: Стройиздат, 1971. – 216 с.
8. Шишмарёв, В.Ю. Надежность технических систем: уч. для студентов вузов / В.Ю. Шишмарёв. – М.: Академия, 2011. – 304 с.
9. Лычев, А.С. Надежность строительных конструкций / А.С. Лычев. – М.: АСВ, 2008. – 184 с.
10. Начальная надежность элементов строительных конструкций (методические указания к выполнению расчетно-графической работы) / Сост. Р.П. Моисеенко. – Томск: ТГУ, 2014.
11. Кудзис, А.П. Оценка надежности железобетонных конструкций / А.П. Кудзис. – Вильнюс: Моклас, 1985. – 156 с.
12. Стрелецкий, Н.С. Основы статического учета коэффициента запаса прочности сооружений / Н.С. Стрелецкий. – М.: Стройиздат, 1947. – 161 с.
13. Перельмутер, А.В. Избранные проблемы надежности и безопасности строительных конструкций / А.В. Перельмутер. – М.: АСВ, 2007. – 256 с.
14. Уткин, В.С. Новые методы расчетов надежности строительных конструкций / В.С. Уткин. – Вологда: ВоГТУ, 2012. – 98 с.
15. Уткин, В.С. Расчет надежности железобетонных колонн по критерию прочности на стадии эксплуатации / В.С. Уткин, О.В. Ярычина // Бетон и железобетон. – 2012. – № 4. – С. 14–16.

Поступила в редакцию 21 декабря 2016 г.

THE SET OF EQUATIONS FOR DEFINING A DISTRIBUTION FUNCTION IN CASE OF PROBABILISTIC CALCULATION METHODS

Yu.A. Ivashenko, ivashenkoia@susu.ru

A.V. Ferder, ferderav@susu.ru

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The paper presents probabilistic calculation of building structures. The reliability is determined for a case when distribution functions are unknown in advance. The probability calculation of strength, stability and deformation properties of structural systems is made for improving accuracy of reliability control. The accuracy increase is caused by more detailed consideration of a random nature of parameters, which are used to calculate internal forces, load-carrying capacity and other characteristics.

The authors suggest an algorithm of probabilistic calculation, whereby there is no need to accept in advance the equality of distribution laws for internal forces and the load-carrying capacity.

Keywords: probabilistic calculation, distribution functions and their characteristics, reliability, load-carrying capacity.

References

1. SNiP 2.03.01-84. [Concrete and Reinforced Concrete Structures]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1985. 80 p. (in Russ.).
2. SNiP II-23-81* [Steel Construction]. Moscow, FGUP TsPP Publ., 1991. 96 p. (in Russ.).
3. SP 52-102-2004. [Prestressed Concrete Structures]. Moscow, FGUP TsPP Publ., 2004. 38 p. (in Russ.).
4. Luzhin O.V. *Veroyatnostnye metody rascheta sooruzheniy* [Probabilistic Methods of Analysis of Structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1983. 122 p.
5. Bolotin V.V. *Statisticheskie metody v stroitel'noy mekhanike* [Statistical Methods in Structural Mechanics]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1965. 280 p.
6. Lukomskiy Ya.I. *Teoriya korrelyatsiy i ee primeneniye k analizu proizvodstva* [The Theory of Correlation and its Application to the Analysis of Production]. Moscow, Gosstroyizdat Publ., 1961. 375 p.
7. Aviom L.S. *Nadezhnost' konstruksiy sbornykh zdaniy i sooruzheniy* [Reliability of Structures Prefabricated Buildings]. Leningrad, Stroyizdat Publ., 1971. 216 p.
8. Shishmarev V.Yu. *Nadezhnost' tekhnicheskikh sistem* [Reliability of Technical Systems]. Moscow, Akademiya Publ., 2011. 304 p.
9. Lychev A.S. *Nadezhnost' stroitel'nykh konstruksiy* [Reliability of Technical Systems]. Moscow, ASV Publ., 2008. 184 s.
10. Moiseenko R.P. *Nachal'naya nadezhnost' elementov stroitel'nykh konstruksiy* [Initial Reliability of Building Construction Elements]. Tomsk, TGU Publ., 2014.
11. Kudzis A.P. *Otsenka nadezhnosti zhelezobetonnykh konstruksiy* [Evaluation of Reliability of Reinforced Concrete Structures]. Vil'nyus, Mokslas Publ., 1985. 156 p.
12. Streletskiy N.S. *Osnovy staticheskogo ucheta koeffitsienta zapasa tprochnosti sooruzheniy* [Basis of the Static Safety Factor Taking into Account the Strength of Structures]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1947. 161 p.
13. Perel'muter A.V. *Izbrannyye problemy nadezhnosti i bezopasnosti stroitel'nykh konstruksiy* [Selected Problems of Building Structures Reliability and Safety]. Moscow, ASV Publ., 2007. 256 p.
14. Utkin V.S. *Novyye metody raschetov nadezhnosti stroitel'nykh konstruksiy* [New Methods of Building Structures Reliability Calculations]. Vologda, VoGTU Publ., 2012. 98 p.
15. Utkin V.S., Yarychina O.V. [Calculation of Reliability of Reinforced Concrete Columns on the Criterion of Strength During the Operational Phase]. *Beton i zhelezobeton* [Concrete and Reinforced Concrete]. Moscow, 2012, no. 4, pp. 14–16. (in Russ.).

Received 21 December 2016

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Ивашенко, Ю.А. Система уравнений для определения функций распределения при вероятностных методах расчета / Ю.А. Ивашенко, А.В. Фердер // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2017. – Т. 17, № 1. – С. 34–37. DOI: 10.14529/build170104

FOR CITATION

Ivashenko Yu.A., Ferder A.V. The Set of Equations for Defining a Distribution Function in Case of Probabilistic Calculation Methods. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2017, vol. 17, no. 1, pp. 34–37. (in Russ.). DOI: 10.14529/build170104