

АНАЛИЗ КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ С ВЫКЛЮЧАЮЩИМИСЯ СВЯЗЯМИ

А.Н. Потапов

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск

В рамках теории временного анализа изложен подход к интегрированию уравнения движения дискретной диссипативной системы, основанный на исследовании характеристического матричного квадратного уравнения. Приведены математические модели колебаний и алгоритм расчёта упругой системы и системы с внезапно выключающимися связями. При выводе выражения динамической реакции учтено влияние статической нагрузки. Исследован характер колебаний диссипативной системы, связанный с эффектом выключения связей. Рассмотрены примеры анализа динамической реакции двухпролётной стальной балки при упругих колебаниях и внезапном разрушении промежуточной опоры от статического воздействия и при колебаниях.

Ключевые слова: диссипативная система, динамическая реакция, разрушение, перемещение, колебание, периодический импульс, уравнение, матрица жесткости.

Общие замечания. Построение аналитических решений в динамике диссипативных конструкций, моделируемых дискретной расчетной схемой, является сложной и трудоемкой задачей [1–3]. Несмотря на хорошо разработанную теорию исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с постоянными коэффициентами в области диссипативных конструкций существуют значительные проблемы при интегрировании ОДУ.

Основные причины этого заключаются в отсутствии эффективных методов построения фундаментальных решений. Также существует проблема построения аналитических решений соответствующих неоднородных систем уравнений для произвольных правых частей (внешних воздействий).

Данные проблемы значительно усложняются при анализе нелинейных колебаний, в частности при колебаниях конструкций с выключающимися связями. Колебания таких систем приводят к изменению расчетной схемы сооружения и характеризуют систему как конструктивно нелинейную [4].

В настоящее время пока еще не создано строго обоснованной теории, позволяющей с единых научных позиций объяснять происходящие процессы в конструктивно нелинейных системах, что является серьезным препятствием для создания эффективных методов решения прикладных задач динамики поврежденных систем. В нормативных документах практически отсутствуют методы расчёта сооружений при внезапных повреждениях, в то время как, вопросы безопасности сооружений требуют оценок, обеспечивающих необходимый уровень надёжности строительных конструкций [5, 6]. В связи с этим важна разработка аналитических методов построения динамической реакции системы с учетом эффекта разрушения связей.

В статье в рамках теории временного анализа дискретных диссипативных систем (ДДС) изложен

общий подход к интегрированию уравнения движения (математические модели, алгоритм расчёта) [7]. Приведены уравнения динамической реакции расчетной модели применительно к анализу линейно-деформируемых систем и систем с выключающимися связями.

1. Уравнение движения ДДС и матричные соотношения

Уравнение движения упругой ДДС в рамках линейной модели вязкого сопротивления (1) и начальные условия (2) динамической задачи представляется в виде

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = P(t), \quad (1)$$

$$Y(t_0) = Y_0, \quad \dot{Y}(t_0) = \dot{Y}_0, \quad (2)$$

где $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, $C = C^T = (c_{ik})$, $K = K^T = (r_{ik}) \in M_n(\mathbf{R})$ – матрицы масс, демпфирования и жесткости; $Y(t)$, $P(t)$ – векторы перемещений и внешней нагрузки.

Построение фундаментальных решений однородного дифференциального уравнения, вытекающего из (1), связано с матричной функцией $\Phi(t) = e^{St}$, в которой $S \in M_n(\mathbf{C})$ удовлетворяет характеристическому матричному квадратному уравнению (МКУ) – уравнению движения собственных форм

$$MS^2 + CS + K = 0. \quad (3)$$

Матрица S внутренних динамических характеристик ДДС, являясь решением МКУ, имеет аналитическое представление в виде корневой пары

$$S_{1,2} = M^{-1}(-C + V \pm U) / 2,$$

где $V = -V^T$, $U = U^T$ – кососимметрическая и симметрическая матрицы.

Матричные корни $S_{1,2}$ позволяют построить фундаментальные матрицы $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, формирующие решение однородного ОДУ в уравне-

нии (1). Для упругой ДДС с малой диссипацией элементы матриц V, U являются соответственно вещественными и мнимыми: $V, iU \in M_n(\mathbf{R})$, поэтому корни $S_{1,2}$ – комплексно сопряжённые ($S_1 = S, S_2 = \bar{S}$):

$$\left. \begin{aligned} S &= M^{-1}(-C + V + U) / 2, \\ \bar{S} &= M^{-1}(-C + V - U) / 2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Поскольку показатель степени экспоненты $\Phi(t) = e^{St}$ (матрица S) – содержит действительную и мнимую части (матрицы $M^{-1}(-C + V) / 2$ и $M^{-1}U / 2$), то это оказывает существенное влияние на характер движения динамической системы в целом. Мнимая часть S определяет колебательное движение узлов дискретной системы, действительная – отвечает за условия демпфирования.

Спектральное разложение S . Выполним для корня S в (4) разложение в базисе собственных векторов: $S = Q\Lambda Q^{-1}$, где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – диагональная матрица спектра ДДС; Q – матрица собственных векторов. Каждый диагональный элемент λ_k содержит два параметра: коэффициент демпфирования ε_k и частоту собственных колебаний ω_k , заключенные в действительной и мнимой частях $\lambda_k = -\varepsilon_k + i\omega_k$.

В базисе собственных векторов матрицы S , имеющей линейные элементарные делители, разложение матричной экспоненты имеет вид

$$\Phi(t) = e^{St} = Qe^{\Lambda t}Q^{-1} = Qe^{-\varepsilon t}e^{i\omega t}Q^{-1}, \quad (5)$$

где $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$.

В [8] приведены соотношения для матричных корней (4), играющие важную роль в последующем анализе (E – единичная матрица):

$$\left. \begin{aligned} S^{-1} &= -K^{-1}(C + V + U) / 2, \\ A &= (US)^{-1} = -K^{-1} / 2 - K^{-1}(C + V)U^{-1} / 2, \\ \text{Re } A &= -K^{-1} / 2, \\ B &= SU^{-1} = M^{-1} / 2 - U^{-1}(C + V)M^{-1} / 2, \\ \text{Re } B &= M^{-1} / 2, \\ G &= U^{-1}M\bar{S} = (US)^{-1}K = -E / 2 - U^{-1}(C - V) / 2, \\ \text{Re } G &= (\text{Re } A)K = -E / 2. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

2. Интеграл Дюамеля и его частные случаи

Пусть в узлах упругой ДДС действует произвольная нагрузка $p_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$), представленная вектором $P(t)$. Реакция системы в матричной форме интеграла Дюамеля (векторы перемещений и скоростей узлов ДДС) записывается так [7]:

$$Y(t) = 2\text{Re} \{ \Phi(t-t_0)U^{-1}M[-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0] + U^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau \}. \quad (7)$$

$$\dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{ S[\Phi(t-t_0)U^{-1}M(-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0) + U^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau] \}. \quad (8)$$

Полагая в (7), (8) начальные условия нулевыми, приведем некоторые частные случаи действия динамической нагрузки. Общая форма уравнений реакции системы имеет вид

$$Y(t) = 2\text{Re} \{ Z(t) \}, \quad \dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{ SZ(t) \}, \quad (9)$$

где вектор-функция $Z(t)$ зависит от вида динамической нагрузки.

Постоянный закон действия сил $P(t) = P_0 = [p_{0j}]$ ($j = 1, \dots, n$) (рис. 1). При внезапном приложении сил к узлам ДДС вектор-функция $Z(t)$ в уравнениях (9) представляется в виде

$$Z(t) = [\Phi(t-t_0) - E](US)^{-1}P_0. \quad (10)$$

Синусоидальный импульс $P(t) = \sin(\theta(t-t_0))P_0$, где $\theta = E\pi/t_a$; $t_a = t_1 - t_0$ – длина импульса; P_0 – вектор амплитуд (рис. 2). Реакция системы (9) на активном этапе ($t \leq t_1$) записывается на основе вектора [9]

$$Z(t) = \{ S[\Phi(t-t_0) \cdot \sin(\theta t_0 + \varphi) - \sin(\theta t + \varphi)] + [\Phi(t-t_0) \cdot \cos(\theta t_0 + \varphi) - \cos(\theta t + \varphi)] \theta \} [U(S^2 + \theta^2)]^{-1}P_0,$$

вычисляем при начальной фазе $\varphi = -\theta t_0$:

$$Z(t) = \{ \Phi(t-t_0) \cdot \theta - S \cdot \sin \theta(t-t_0) - \theta \cos \theta(t-t_0) \} \times [U(S^2 + \theta^2)]^{-1}P_0. \quad (11)$$

При свободных колебаниях вектор $Z(t)$ определяется так ($t \geq t_1$):

$$Z(t) = \Phi(t-t_1)[\Phi(t_1) + E][U(S^2 + \theta^2)]^{-1}\theta P_0.$$

Периодические импульсы. На рис. 3 показаны импульсы сил, действующие в j -м узле ДДС. Характеристики i -й группы импульсов сил: t_{2i-2}, t_{2i-1} – время начала и конца действия импульсов; $T_p = t_{2i} - t_{2i-2}$ – периодичность импульсов, которая вместе с их длиной постоянны для всех узлов ДДС.

Реакция ДДС от действия i -й группы импульсов при $t \in [t_{2i-2}, t_{2i-1}]$ определяется из системы (7), (8) с заменой t_0 на $t_{2i-2} = (i-1)T_p$.

Для импульсов синусоидальной формы: $P(t) = \sin(\theta \cdot (t-t_{2i-2}))P_0$ ($\theta = E\pi/(t_{2i-1}-t_{2i-2})$, $\varphi = -\theta t_{2i-2}$)

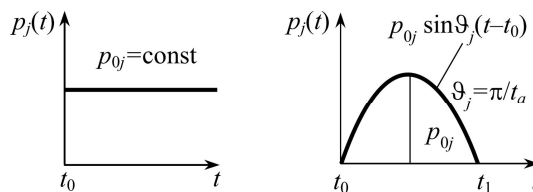


Рис. 1. Постоянная сила в j -м узле Рис. 2. Синусоидальный импульс в j -м узле

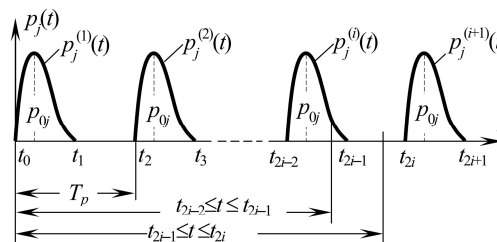


Рис. 3. Периодические импульсы в j -м узле

вектор $Z(t)$ в (9) содержит реакцию при свободных и вынужденных колебаниях ($t \in [t_{2i-2}, t_{2i-1}]$):

$$Z(t) = \Phi(t-t_{2i-2})U^{-1}M[-\bar{S}Y_0 + \dot{Y}_0] + Z^p(t), \quad (12)$$

где $Z^p(t)$ от i -й группы импульсов определяется из (11) с заменой t_0 на t_{2i-2} .

После исчезновения i -й группы вектор $Z(t)$ в (9) имеет вид ($t \in [t_{2i-1}, t_{2i}]$)

$$Z(t) = \Phi(t-t_{2i-1})U^{-1}M(-\bar{S}Y_0 + \dot{Y}_0). \quad (13)$$

Свободные колебания совершаются под действием начальных условий (2), назначаемых в конце предыдущего интервала времени при $t = t_{2i-1}$ из уравнений (9), (12): $Y_0 = Y(t_{2i-1}), \dot{Y}_0 = \dot{Y}(t_{2i-1})$.

3. Построение динамической реакции с учётом действия статической нагрузки

Пусть Q, Y_{st} – векторы узловых статических сил и перемещений и K – матрицы жесткости заданной системы, тогда будем иметь:

$$Y_{st} = K^{-1}Q. \quad (14)$$

Принимая в качестве вектора внешнего воздействия вектор $f(t) = Q + P(t)$ и основываясь на уравнениях (7), (8), учтём в них влияние нагрузки Q . Это влияние аналогично действию сил при постоянном законе (10) с соответствующей заменой P_0 на $Q(t \geq t_0)$: $Z^Q(t-t_0) = [\Phi(t-t_0) - E](US)^{-1}Q$.

Дополняя реакцию (9) вектор-функцией ускорений $\ddot{Y}(t)$, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re}\{Z(t)\}, \dot{Y}(t) = 2\text{Re}\{SZ(t)\}, \\ \ddot{Y}(t) &= 2\text{Re}\{S^2Z(t)\} + M^{-1}(Q + P(t)), \end{aligned} \right\}$$

где $Z(t) = Z_0(t-t_0) + Z^Q(t-t_0) + Z^p(t-t_0)$,

$$Z_0(t-t_0) = \Phi(t-t_0)U^{-1}M(-\bar{S}Y_0 + \dot{Y}_0).$$

В работе [8] сделан переход от записи данных уравнений к виду ($t \geq t_0$):

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re}\{X(t)\} + Y_{st}, \dot{Y}(t) = 2\text{Re}\{SX(t)\}, \\ \ddot{Y}(t) &= 2\text{Re}\{S^2X(t)\} + M^{-1}P(t), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

выполненный с помощью вектор-функции $Z(t) = X(t) - (US)^{-1}Q$, где

$$\left. \begin{aligned} X(t) &= X_0(t-t_0) + Z^p(t-t_0), \\ X_0(t-t_0) &= \Phi(t-t_0)U^{-1}M[-\bar{S}(Y_0 - Y_{st}) + \dot{Y}_0]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Первое слагаемое в выражении вектора $X(t)$ отвечает за свободные колебания (от действия начальных условий Y_0, \dot{Y}_0 и статической нагрузки Q), второе – за вынужденные колебания от действия $P(t)$.

Из выражения перемещений в (15) следует, что узлы ДДС совершают колебательные движения относительно положения статического равновесия, устанавливаемого системой в результате действия постоянной нагрузки Q .

В частном случае уравнений реакции (15), (16), когда в момент приложения динамической нагрузки (при t_0) система находится в покое (векторы (2) имеют вид $Y_0 = Y_{st}, \dot{Y}_0 = 0$), из (16) получим $X_0(t-t_0) = 0$ ($t \geq t_0$):

$$X(t) = Z^p(t-t_0). \quad (17)$$

Таким образом, если до момента приложения нагрузки ($t = t_0$) система находилась в состоянии движения, то вектор $X(t)$ в уравнениях реакции (15) определяется по (16), если в состоянии покоя, то по (17).

При действии синусоидальных импульсов $P(t) = \sin(\theta(t-t_0))P_0$ выражение $Z^p(t-t_0)$ в (17) строится по (11). После исчезновения импульсов вектор $X(t)$ в (15) формируется с помощью вектора X_0 в (16) при замене t_0 на t_1 ($t \geq t_1$). Процесс свободных колебаний, задаваемый экспоненциальной матричной функцией $\Phi(t-t_1)$ в (16), является затухающим, что обусловлено отрицательной вещественной частью матрицы Λ в (5). При $t \rightarrow \infty$ величины $\Phi(t), X(t)$ в (16) стремятся к нулю: $\Phi(t_\infty), X(t_\infty) \rightarrow 0$, поэтому из (15) следует:

$$Y(t_\infty) = Y_{st}, \dot{Y}(t_\infty) = \ddot{Y}(t_\infty) = 0.$$

Силовые параметры реакции – векторы восстанавливающих (упругих), диссипативных и инерционных сил

$$R(t) = KY(t), F(t) = C\dot{Y}(t), I(t) = -M\ddot{Y}(t) \quad (18)$$

при затухании процесса колебаний ($t \rightarrow \infty$), учитывая (14), принимают вид

$$\left. \begin{aligned} R(t_\infty) &= KY(t_\infty) = Q, F(t_\infty) = C\dot{Y}(t_\infty) = 0, \\ I(t_\infty) &= -M\ddot{Y}(t_\infty) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Таким образом, после завершения колебаний все кинематические и силовые параметры реакции, кроме $Y(t)$ и $R(t)$, стремятся к нулю. В установившемся балансе сил внутренние усилия, определяемые компонентами вектора упругих сил $R(t)$, уравновешивают статическую нагрузку (вектор Q).

Ниже проведем анализ колебаний конструктивно нелинейной системы при внезапном выключении (разрушении) связи.

4. Реакция ДДС с выключающимися связями

Внезапное разрушение связи в j -м конструктивно нелинейном элементе приводит к изменению его жёсткости. На диаграмме деформирования «Восстанавливающая сила – относительное перемещение»: $R_j(t) \sim \tilde{y}_j(t)$ (рис. 4) показаны уровни жёсткости j -го элемента в моменты выключения связей при t_1, t_2, \dots . Данные уровни определяются тангенсами углов наклона прямых ab, cd, ef, \dots к горизонтальной оси. Так как данные прямые проходят через начало координат, то в каждом

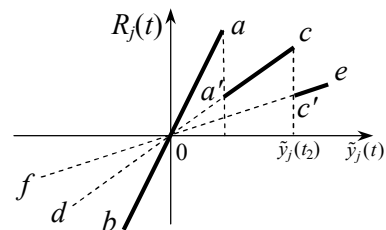


Рис. 4. Диаграмма деформирования j -го конструктивно нелинейного элемента системы

состоянии системы может быть использована схема упругого расчёта.

Поэтому уравнение движения ДДС с конструктивно нелинейными элементами на отдельных интервалах времени следует формировать по аналогии с линейной системой. С этой целью в момент выключения связи (например, при t_1), необходимо выполнить смену начальных условий и сделать замену «старых» параметров расчётной динамической модели (РДМ) – матриц демпфирования C и жёсткости K , на «новые» – матрицы C_1, K_1 . «Старые» параметры строятся при t_0 (прямая ab на диаграмме), «новые» – формируются при t_1 в соответствии с прямой cd (рис. 4). Характеристики масс при выключении связи считаются неизменными.

Проведём анализ реакции на интервалах $t \in [t_0, t_1]$ и $t \in [t_1, t_2]$ полагая, что при $t \in [t_0, t_1]$ все конструктивные элементы расчётной модели работают линейно. Тогда уравнения реакции неповреждённой системы при действии нагрузки $f(t) = Q + P(t)$ принимают вид (15), (16).

При внезапном изменении жёсткости конструктивного элемента в момент времени t_1 (рис. 4) и в результате моделирования нового состояния формируются параметры реакции ДДС: U_1 и \bar{S}_1 , включая матричную экспоненту $\Phi_1(t) = \exp(S_1 t)$, которая строится на каждом шаге временного анализа (всем новым матрицам в структуре решения присваивается индекс «1»). Ниже приведены уравнения движения расчётной модели, начальные условия и характеристическое МКУ при ($t \geq t_1$):

$$M\ddot{Y}(t) + C_1\dot{Y}(t) + K_1Y(t) = f(t), \tag{1a}$$

$$Y_0(t_1) = Y(t_1), \quad \dot{Y}_0(t_1) = \dot{Y}(t_1), \tag{2a}$$

$$MS^2 + C_1S + K_1 = 0. \tag{3a}$$

В силу линейного характера колебаний интегрирование (1a) приведёт к уравнениям динамической реакции, аналогичным по форме уравнениям (15), (16). Здесь параметры реакции строятся на основе решения (3a), структура которого имеет вид (4). После вычисления корней S_1, \bar{S}_1 и формирования величин $U_1, \Phi_1(t)$ проводится построение вектор-функции $X(t)$, в которой вектору $Z_1^P(t - t_1)$, включающего величины $U_1, \Phi_1(t)$, также присваивается индекс «1». Тогда уравнения реакции ДДС принимают вид ($t \geq t_1$)

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re}\{X(t)\} + Y_{st}(t_1), \\ \dot{Y}(t) &= 2\text{Re}\{S_1 X(t)\}, \\ \ddot{Y}(t) &= 2\text{Re}\{S_1^2 X(t)\} + M^{-1}P(t), \\ X(t) &= X_1^0(t - t_1) + Z_1^P(t - t_1), \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{где } X_1^0(t - t_1) &= \Phi_1(t - t_1)U_1^{-1}M \times \\ &\times [-\bar{S}_1(Y_0(t_1) - Y_{st}(t_1)) + \dot{Y}_0(t_1)], \\ Y_{st}(t_1) &= K(t_1)^{-1}Q, \\ Z_1^P(t - t_1) &= U_1^{-1} \int_{t_1}^t \Phi_1(t - \tau)^T P(\tau) d\tau. \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

Элементы вектора $Y_{st}(t_1)$, записываемого по аналогии с формулой (14), определяют статические прогибы расчётной модели с выключенной связью.

В качестве начальных условий (2a) принимаются значения векторов перемещений и скоростей, формируемых из уравнений (15), (16) в конце интервала времени $[t_0, t_1]$:

$$Y_0(t_1) = Y(t_1) = 2\text{Re}\{X(t_1)\} + Y_{st},$$

$$\dot{Y}_0(t_1) = \dot{Y}(t_1) = 2\text{Re}\{SX(t_1)\},$$

где $X(t_1) = X_0(t_1 - t_0) + Z^P(t_1 - t_0)$,

$$X_0(t_1 - t_0) = \Phi(t_1 - t_0)U^{-1}M[-\bar{S}(Y_0(t_0) - Y_{st}) + \dot{Y}_0(t_0)].$$

В частном случае, когда в момент выключения связи действует только статическая нагрузка $f(t) = Q$, начальные условия равны:

$$Y_0(t_1) = Y_{st}, \quad \dot{Y}_0(t_1) = 0. \tag{2б}$$

Поэтому в (19), (20), ввиду $Z_1^P(t - t_1) = 0$, вектор $X(t) = X_1^0(t - t_1) = \Phi_1(t - t_1)U_1^{-1}M\bar{S}_1[-Y_{st} + Y_{st}(t_1)]$.

Учитывая свойство G в (6): $U_1^{-1}M\bar{S}_1 = (U_1S_1)^{-1}K_1$ и в силу равенств (14), (20): $Q = KY_{st} = K_1Y_{st}(t_1)$, получим

$$X(t) = \Phi_1(t - t_1)(U_1S_1)^{-1}\Delta K(t_1)Y_{st}, \tag{21}$$

где $\Delta K(t_1)$ – невязка матрицы жесткости, представляющая разность этой матрицы до и после повреждения расчётной модели: $\Delta K(t_1) = K - K_1$.

5. Реакция ДДС в момент разрушения связи

Определим реакцию расчётной модели в момент её повреждения в двух состояниях: до выключения связи и после её выключения. Это позволит в аналитическом виде получить оценку динамической реакции, связанную с эффектом выключения связи, а также позволит выяснить наличие или отсутствие скачков у параметров реакции повреждённой ДДС и определить условия, влияющие на наличие скачков. С этой целью для критической точки t_1 введём обозначения: t_1^-, t_1^+ – время до и после выключения связи, соответственно.

Выражение реакции неповреждённой ДДС (15), (16) при t_1^- имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} Y(t_1^-) &= 2\text{Re}\{X(t_1^-)\} + Y_{st}, \\ \dot{Y}(t_1^-) &= 2\text{Re}\{SX(t_1^-)\}, \\ \ddot{Y}(t_1^-) &= 2\text{Re}\{S^2 X(t_1^-)\} + M^{-1}P(t_1), \\ X(t_1^-) &= \Phi(t_1 - t_0)U^{-1}M[-\bar{S}(Y_0(t_0) - Y_{st}) + \\ &+ \dot{Y}_0(t_0)] + Z^P(t_1 - t_0), \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

где векторы начальных условий $Y_0(t_0)$, $\dot{Y}_0(t_0)$ определяются по (2). Реакцию поврежденной ДДС получим из (19), (20) при $\Phi_1(0) = E$, $Z_1^P(0) = 0$ ($t = t_1^+$):

$$\left. \begin{aligned} Y(t_1^+) &= 2\operatorname{Re}\{X(t_1^+)\} + Y_{st}(t_1), \\ \dot{Y}(t_1^+) &= 2\operatorname{Re}\{S_1 X(t_1^+)\}, \\ \ddot{Y}(t_1^+) &= 2\operatorname{Re}\{S_1^2 X(t_1^+)\} + M^{-1}P(t_1), \\ X(t_1^+) &= U_1^{-1}M[-\bar{S}_1(Y_0(t_1) - Y_{st}(t_1)) + \dot{Y}_0(t_1)]. \end{aligned} \right\} (23)$$

Здесь векторы начальных условий (2а) назначаются из выражений (22), предшествующих выключению связи: $Y_0(t_1) = Y(t_1^-)$, $\dot{Y}_0(t_1) = \dot{Y}(t_1^-)$.

Первые два соотношения в (22) с учетом начальных условий примут вид:

$$\begin{aligned} Y(t_1^-) &= 2\operatorname{Re}\{X(t_1^-)\} + Y_{st} = Y_0(t_1), \\ \dot{Y}(t_1^-) &= 2\operatorname{Re}\{S X(t_1^-)\} = \dot{Y}_0(t_1). \end{aligned}$$

Отсюда из первого равенства имеем: $2\operatorname{Re}\{X(t_1^-)\} = Y_0(t_1) - Y_{st}$. Для второго соотношения представим действительную часть произведения двух комплексных величин в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}\{SX(t_1^-)\} &= (\operatorname{Re} S) \cdot 2\operatorname{Re}\{X(t_1^-)\} + \\ &+ (i\operatorname{Im} S) \cdot 2i\operatorname{Im}\{X(t_1^-)\} = \dot{Y}_0(t_1). \end{aligned}$$

Записывая: $i\operatorname{Im}\{X(t_1^-)\} = X(t_1^-) - \operatorname{Re}\{X(t_1^-)\}$ и группируя слагаемые возле члена $(Y_0(t_1) - Y_{st})$, находим: $\dot{Y}_0(t_1) = \bar{S}[Y_0(t_1) - Y_{st}] + (i\operatorname{Im} S) \cdot 2X(t_1^-)$. Ввиду (4): $i\operatorname{Im} S = M^{-1}U/2$, получим

$$X(t_1^-) = U^{-1}M[-\bar{S}(Y_0(t_1) - Y_{st}) + \dot{Y}_0(t_1)].$$

Тогда для выражения вектора ускорений в (22) будем иметь:

$$\ddot{Y}(t_1^-) = 2\operatorname{Re}\{S^2 U^{-1} M[-\bar{S}(Y_0(t_1) - Y_{st}) + \dot{Y}_0(t_1)] + M^{-1}P(t_1)\}.$$

Матричные выражения: $S^2 U^{-1} M \bar{S}$ и $S^2 U^{-1} M$ с учетом формул (6) примут вид:

$$\operatorname{Re}\{S^2 U^{-1} M \bar{S}\} = M^{-1}K/2, \operatorname{Re}\{S^2 U^{-1} M\} = -M^{-1}C/2.$$

Отсюда:

$$\ddot{Y}(t_1^-) = -M^{-1}K[Y_0(t_1) - Y_{st}] - M^{-1}C\dot{Y}_0(t_1) + M^{-1}P(t_1).$$

Окончательно кинематические и силовые параметры реакции при t_1^- равны:

$$\left. \begin{aligned} Y(t_1^-) &= Y_0(t_1), \dot{Y}(t_1^-) = \dot{Y}_0(t_1), \\ \ddot{Y}(t_1^-) &= -M^{-1}K[Y_0(t_1) - Y_{st}] - \\ &- M^{-1}C\dot{Y}_0(t_1) + M^{-1}P(t_1), \\ R(t_1^-) &= KY_0(t_1), F(t_1^-) = C\dot{Y}_0(t_1), \\ I(t_1^-) &= K[Y_0(t_1) - Y_{st}] + C\dot{Y}_0(t_1) - P(t_1). \end{aligned} \right\}$$

При анализе реакции (23) также используются свойства (6), что приводит к следующим выражениям реакции поврежденной ДДС при t_1^+ :

$$\left. \begin{aligned} Y(t_1^+) &= Y_0(t_1), \dot{Y}(t_1^+) = \dot{Y}_0(t_1), \\ \ddot{Y}(t_1^+) &= -M^{-1}K(t_1)[Y_0(t_1) - Y_{st}(t_1)] - \\ &- M^{-1}C(t_1)\dot{Y}_0(t_1) + M^{-1}P(t_1), \\ R(t_1^+) &= K(t_1)Y_0(t_1), F(t_1^+) = C(t_1)\dot{Y}_0(t_1), \\ I(t_1^+) &= K(t_1)[Y_0(t_1) - Y_{st}(t_1)] + C(t_1)\dot{Y}_0(t_1) - P(t_1). \end{aligned} \right\}$$

6. Анализ результатов

Для оценки качества полученных решений составим невязки векторных величин, представляющих разность параметров реакции в критической точке t_1 соответственно после и до отказа связи:

$$\begin{aligned} \Delta Y(t_1) &= Y(t_1^+) - Y(t_1^-), \Delta \dot{Y}(t_1) = \dot{Y}(t_1^+) - \dot{Y}(t_1^-), \dots, \\ \Delta I(t_1) &= I(t_1^+) - I(t_1^-). \end{aligned}$$

Учитывая в этих выражениях полученные выше формулы, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y(t_1) &= 0, \Delta \dot{Y}(t_1) = 0, \\ \Delta \ddot{Y}(t_1) &= M^{-1}\Delta K(t_1)Y_0(t_1) + M^{-1}\Delta C(t_1)\dot{Y}_0(t_1), \\ \Delta R(t_1) &= -\Delta K(t_1)Y_0(t_1), \Delta F(t_1) = -\Delta C(t_1)\dot{Y}_0(t_1), \\ \Delta I(t_1) &= -\Delta K(t_1)Y_0(t_1) - \Delta C(t_1)\dot{Y}_0(t_1), \end{aligned} \right\} (24)$$

где $\Delta C(t_1) = C - C_1$.

Формулы (24) выражают величину скачка у параметров динамической реакции ДДС в момент выключения связи. Из формул следует, что в общем случае при t_1 только перемещения и скорости являются непрерывными функциями времени, что обеспечивается постановкой начальных условий в критических точках. Остальные параметры имеют скачки, зависящие как от невязок матриц жесткости и/или демпфирования, так и от ненулевых компонент векторов $Y_0(t_1)$, $\dot{Y}_0(t_1)$. Скачок инерционной силы равен суммарному скачку восстанавливающей и диссипативной сил: $\Delta I(t_1) = \Delta R(t_1) + \Delta F(t_1)$.

При отсутствии сил сопротивления ($F = 0$, $C = 0$) в соотношениях (24) невязки ускорений и инерционных сил содержат только слагаемые с $\Delta K(t_1)$.

При рассмотрении частного случая ДДС, находящейся до выключения связи (при t_1) в положении статического равновесия, уравнения реакции (19), (21), как показано выше, сформированы при начальных условиях (26). Тогда независимо от условий демпфирования формулы (24) принимают вид [8]:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y(t_1) &= 0, \Delta \dot{Y}(t_1) = 0, \\ \Delta \ddot{Y}(t_1) &= M^{-1}\Delta K(t_1)Y_{st}, \\ \Delta R(t_1) &= -\Delta K(t_1)Y_{st}, \Delta F(t_1) = 0, \\ \Delta I(t_1) &= -\Delta K(t_1)Y_{st}. \end{aligned} \right\} (25)$$

Отсутствие скачка в момент выключения связи у диссипативных сил в (25) обусловлено тем, что скорости узлов системы в состоянии покоя равны нулю. По той же причине отсутствуют слагаемые с невязкой $\Delta C(t_1)$.

В случае консервативной системы с 1-й степенью свободы невязка ускорения в (24) совпадает с формулой (7), приведенной в статье [10, с. 54].

Примеры колебаний стальной балки при разрушении средней опоры

Расчетная схема балки (двутавр № 50, сталь 14Г2) показана на рис. 5 до (а) и после (б) разрушения промежуточной опоры. Жесткость балки $EJ = 79,454 \text{ МН}\cdot\text{м}^2$, жесткость средней опоры $r_0 = kEJ / l^3$ (k – коэффициент жесткости). Расчет выполнялся при разбивке пролета $l = 15 \text{ м}$ на 10 участков ($a = 1,5 \text{ м}$). Число степеней свободы $n = 9$. Элементы вектора статической узловой нагрузки Q , включающей собственный вес балки, составляют $Q_i = 4,1478 \text{ кН}$. Массы $m_i = 0,4228 \text{ кНс}^2/\text{м}$ расположены в узлах расчетной модели (условно не показаны).

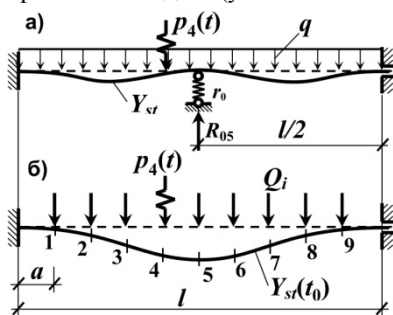


Рис. 5. Расчетная схема балки до (а) и после (б) разрушения опоры

Внутреннее трение материала учитывается моделью непропорционального демпфирования [7]: $C = \alpha(KT + TK)/2 + (1-\alpha)MV$, где $T = \gamma W_0^{-1}$, $V = \gamma W_0$, $W_0 = \text{diag}(w_{01}, \dots, w_{0n})$, $w_{0i} = \sqrt{r_{ii} / m_i}$ (r_{ii}, m_i – диагональные элементы матриц K и M), $\gamma = \delta/\pi$ ($\delta = 0,07$ – логарифмический декремент колебаний), $\alpha = 0,9045$.

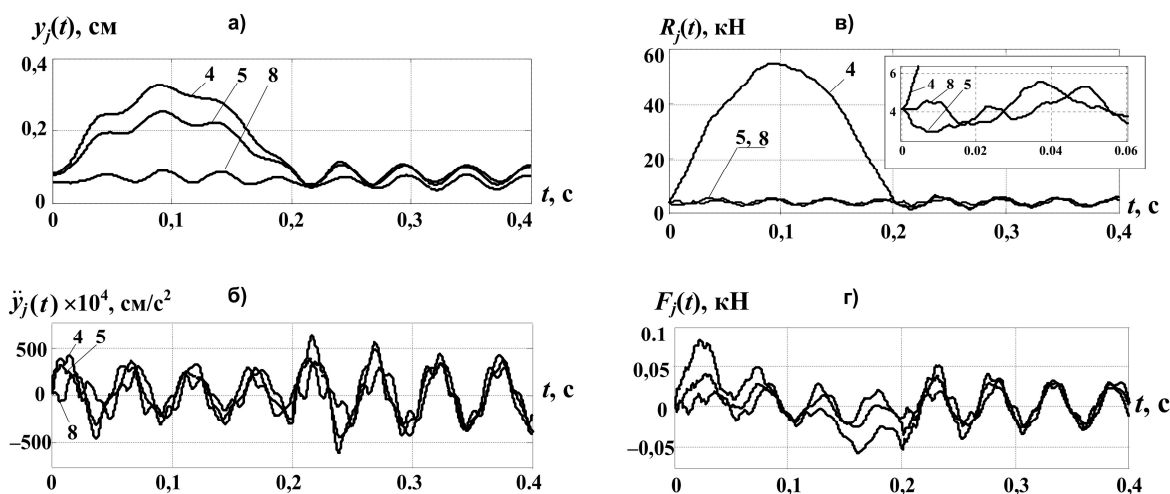


Рис. 6. Кинематические (а, б) и силовые (в, г) параметры реакции балки при действии одиночной группы импульсов синусоидальной формы: а – перемещения; б – ускорения; в, г – восстанавливающие и диссипативные силы, соответственно

Рассматриваются упругие колебания балки от импульсного воздействия и конструктивно нелинейные колебания балки для двух вариантов разрушения опоры: от действия статической нагрузки и от совместного действия статической и динамической нагрузок. Последняя имеет вид синусоидальных импульсов: $P(t) = \sin(\theta(t-t_0))P_0$, где $\theta = E\pi/t_a$ (см. рис. 2), $t_a = 0,2 \text{ с}$; вектор амплитуд представлен ненулевой 4-й компонентой: $P_0 = [0, 0, 0, P_{04}, 0, 0, 0, 0, 0]^T$.

Пример 1. Анализ вынужденных колебаний расчетной модели балки на действие импульсных сил. Коэффициент жесткости равен $k = 10^3$.

Действие одиночного импульса. В 4-м узле расчетной модели действует импульс с амплитудой $P_{04} = 50 \text{ кН}$ при $t_0 = 0$, $t_a = 0,2 \text{ с}$. На рис. 6 приведены осциллограммы кинематических и силовых параметров реакции, вычисленных по (11), (15), (16), (18). Цифры на графиках – номера узлов.

Действие периодического импульса. Импульс, рассмотренный выше, действует с периодичностью $T_p = T_1 = 2\pi/\omega_1$, где $\omega_1 = 120,386 \text{ с}^{-1}$ – наименьшая частота собственных колебаний расчетной модели балки. Осциллограммы параметров реакции, вычисленных с учетом периодичности действия импульсов (12), (13), приведены на рис. 7 для соответствующих узлов РДМ.

Качество решения оценивается с помощью вектор-функции

$$\varphi(t) = R(t) + F(t) - I(t) - Q,$$

представляющей алгебраическую сумму сил левой части уравнения (1) с учетом постоянной нагрузки (вектор Q), перенесенной в левую часть уравнения для удобства анализа. Характер сходимости решения приведен на осциллограммах функций $\varphi_4(t)$, $\varphi_5(t)$ ($j = 3, 5, 8$) (рис. 8) и свидетельствует о высокой точности решения, погрешность которого не превышает величины $\varepsilon \leq 10^{-11} \text{ кН}$.

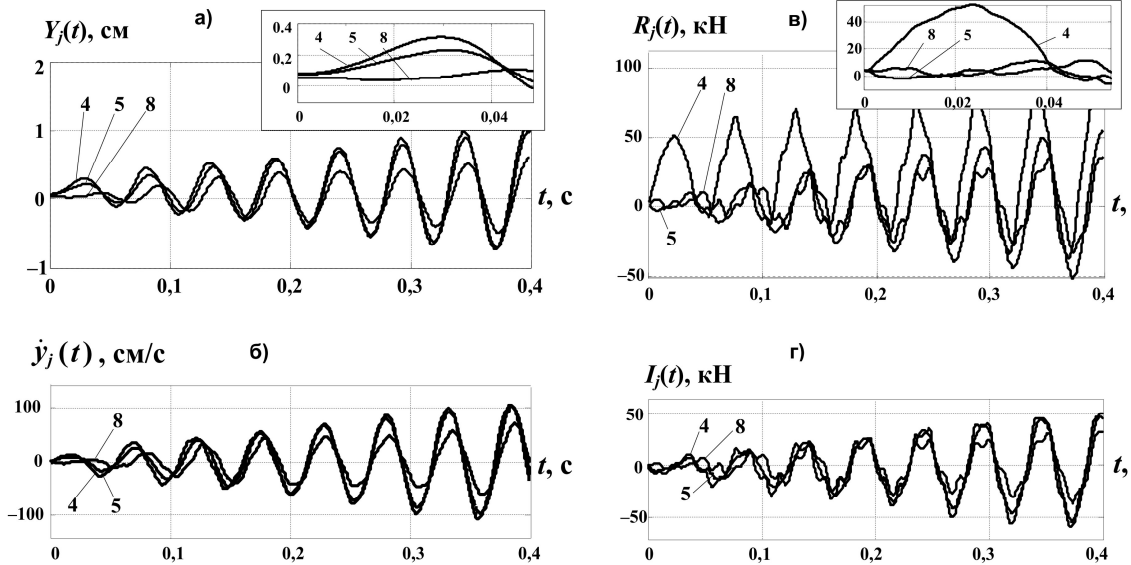


Рис. 7. Кинематические (а, б) и силовые (в, г) параметры реакции балки при действии периодического импульса синусоидальной формы: а – перемещения; б – скорости; в, г – восстанавливающие и инерционные силы, соответственно

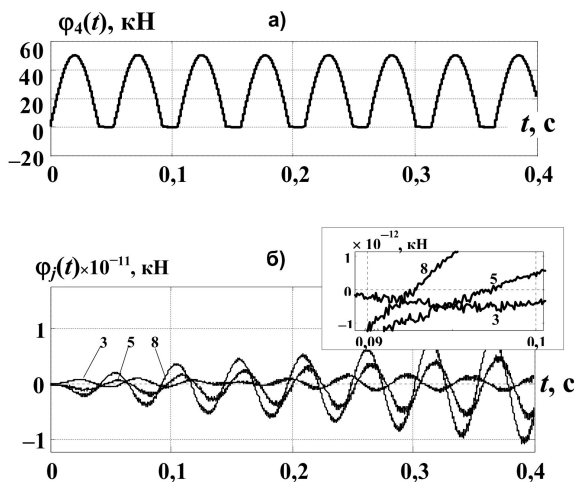


Рис. 8. Осциллограммы функций $\varphi_j(t)$ левой части уравнения движения при действии периодического импульса: а – условия динамического равновесия для узла 4; б – то же для узлов 3, 5, 8

Пример 2. Разрушение опоры от действия статической нагрузки. Рассматривается динамическая задача (1а), (2б) во временной области $t \in [t_0, t_m]$ ($t_0 = 0, t_m = 1,5$ с), реализуемая по уравнениям(19), (21). В уравнении движения (1а) принято $f(t) = Q$, а в начальных условиях (2б) и уравнениях(19), (21) t_1 заменено на t_0 . Коэффициент жесткости средней опоры равен $k = 10^5$.

На рис. 9 приведены осциллограммы кинематических параметров реакции балки. Кривые перемещений при t_0^+ имеют значения, соответствующие компонентам вектора Y_{st} статических перемещений исходной модели: $Y_{st}(2, 3, 5) = [26,74 \ 27 \ 0,879]^T / 1000$ (см). С течением времени $t > t_0$ эти кривые асимптотически стремятся к статическим

перемещениям $Y_{st}(t_0)$ поврежденной ДДС: $Y_{st,0}(2, 3, 5) = [0,188 \ 0,324 \ 0,459]^T$ (см) (штрихпунктирные горизонтальные прямые, рис. 9, а). Кривые скоростей и ускорений (рис. 9, б, в) всех узлов балки при t_0^+ имеют нулевые значения, за исключением ускорения 5-го узла: $\ddot{y}_5(t_0^+) = 4895,6$ кН/с² (при $t \rightarrow \infty$ кривые стремятся к нулевым асимптотам).

До разрушения опоры упругие силы $R_j(t)$ (рис. 10, а) во всех сечениях равны статическому значению нагрузки $R_i(t_0^-) = Q_i$. После разрушения опоры (при t_0^+) значения упругих сил остались прежними, кроме 5-го сечения, где $R_5(t_0^+) = -16,5513$ кН. Скачок в 5-м сечении равен $\Delta R_5(t_0) = -20,699$ кН. С течением времени все кривые восстанавливающих сил асимптотически стремятся к значению Q_j . Инерционные силы $I_j(t)$ (рис. 10, б) во всех сечениях при t_0^+ равны нулю, кроме 5-го: $I_5(t_0^+) = -20,699$ кН (рис. 10, б). Значения всех скачков при t_0 согласуются с аналитическими выражениями (25).

За критерий точности полученного решения задачи (1а), (2б), как и выше, принимается величина $\varphi(t)$: $\varphi(t) = R(t) + F(t) - I(t) - Q$, представляющая векторную невязку между левой частью уравнения движения и его правой частью – вектором постоянной нагрузки Q . Характер сходимости решения показан на осциллограммах невязок сил (рис. 10, в), из которых следует, что точность решения находится в пределах погрешности $\varepsilon \leq 6 \cdot 10^{-12}$ кН.

Пример 3. Разрушение опоры в процессе колебаний. Исследуются колебания расчетной модели во временной области $t \in [t_0, t_m]$ ($t_0 = 0, t_m = 1,3$ с), вызванные действием статической нагрузкой Q и

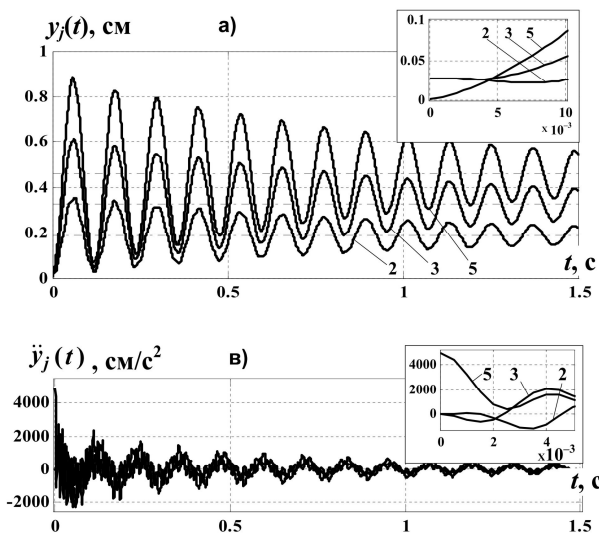


Рис. 9. Осциллограммы кинематических параметров реакции балки при внезапном разрушении средней опоры: а – перемещения; б – скорости; в – ускорения

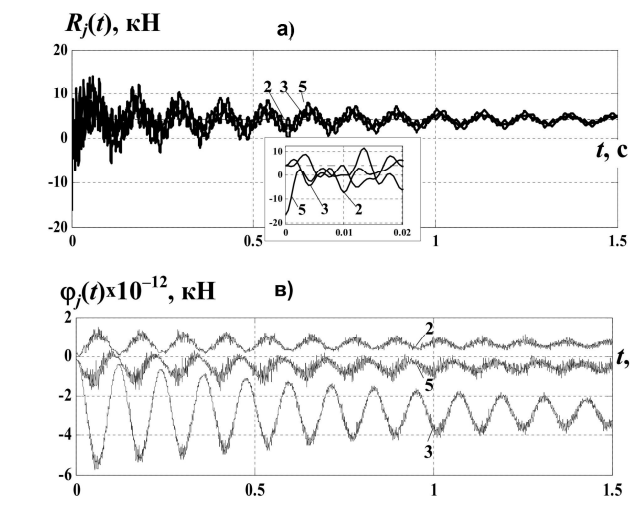


Рис. 10. Осциллограммы восстанавливающих (а) и инерционных (б) сил при разрушении средней опоры; в – невязка сил левой и правой частей уравнения движения ДДС

синусоидальным импульсом с амплитудой в 4-м узле: $P_{04} = 100$ кН. Расчёт проведён при коэффициенте жесткости $k = 10^3$.

Вначале решается задача для уравнения (1) с функцией правой части $f(t) = Q + P(t)$ и начальными условиями (2) при $Y_0(t_0) = Y_{st}$, $\dot{Y}_0(t_0) = 0$ на интервале $t \in [t_0, t_1]$, где $t_1 = 0,0929$ с – время, при котором происходит внезапное разрушение опоры при максимальной реакции $R_{05} = 100,6$ кН (рис. 11). Затем при $t \in [t_1, t_m]$ решается задача (1а), (2а) для повреждённой системы с изменёнными параметрами РДМ. В первом случае для решения задачи используются уравнения (15), (16), во втором – (19), (20), где значения вектора $Z_i^P(t-t_i)$ вычисляются в соответствии с (11) (при $i = 0$ параметры РДМ соответствуют заданной системе, при $i = 1$ – повреждённой системе).

На рис. 12 даны осциллограммы кинематических параметров реакции балки. Компоненты вектора статических перемещений исходной и повреждённой модели показаны штрихпунктирными

горизонтальными прямыми для 4, 5, 8-го узлов (рис. 12, а) и имеют вид:

$$\text{при } t \leq t_1: Y_{st}(4, 5, 8) = [7,796 \ 7,39 \ 5,244]^T / 100 \text{ (см),}$$

$$\text{при } t > t_1: Y_{st,1}(4, 5, 8) = [0,423 \ 0,459 \ 0,188]^T \text{ (см).}$$

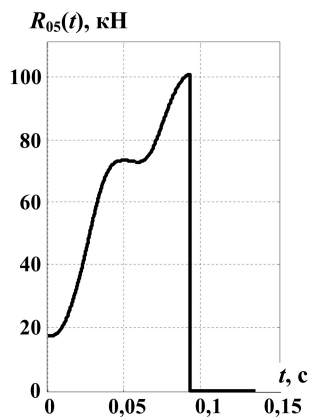


Рис. 11. Осциллограмма реакции промежуточной опоры расчетной модели балки

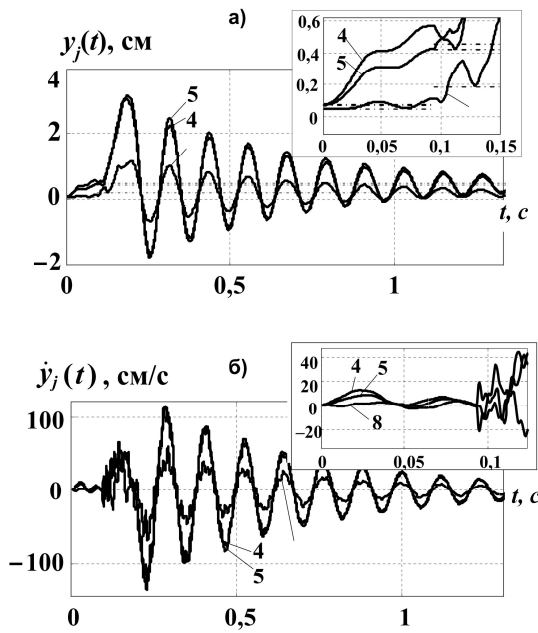


Рис. 12. Осциллограммы перемещений (а) и скоростей (б) узлов балки при внезапном разрушении средней опоры балки

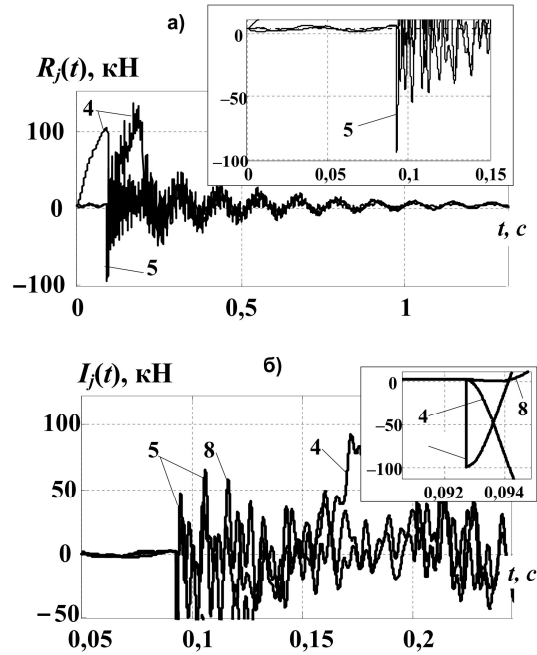


Рис. 13. Осциллограммы восстанавливающих (а) и инерционных (б) сил при разрушении средней опоры балки

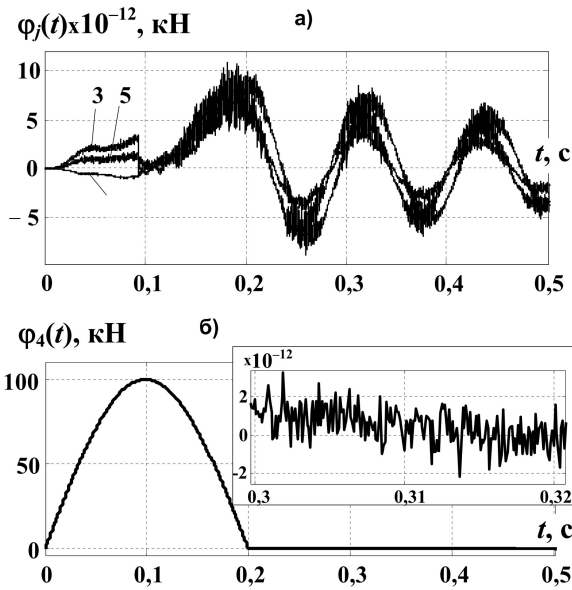


Рис. 14. Осциллограммы сил левой части уравнения движения для узлов расчетной модели балки: а – 3, 5, 8; б – 4

При $t = t_1$ перемещения и скорости (рис. 12, а, б) – непрерывны, хотя скорости в момент отказа связи имеют перелом и быстро возрастают.

На рис. 13 приведены силовые параметры реакции: восстанавливающие $R_j(t)$ и инерционные $I_j(t)$ силы. Кривые восстанавливающих сил $R_j(t)$ (рис. 13, а) в обоих состояниях системы (исходном и повреждённом) имеют общую асимптоту – горизонтальную прямую, отвечающую статическому

значению нагрузки $Q_j = 4,148$ кН. Все силовые параметры реакции при $t = t_1$ имеют скачки, значения которых согласуются с соответствующими значениями невязок, вычисленных по аналитическим выражениям (24).

Особенностью кривых на рис. 12, 13 является следующее: после выключения связи (при $t > t_1$) резко возрастают амплитудные составляющие всех параметров реакции без исключения; доминирующее влияние на колебательный процесс оказывают гармоники с высшими частотами, вносящие существенный вклад в основной тон колебаний, характеризуемый частотой $\omega_1 = 52,75$ с⁻¹ (до разрушения опоры частота $\omega_1(t_0) = 120,37$ с⁻¹).

Оценка точности полученного решения также строится с помощью вектор-функции $\varphi(t)$: $\varphi(t) = R(t) + F(t) - I(t) - Q$ (при $t \leq t_1$ для уравнения (1), при $t > t_1$ для уравнения (1а)). Характер сходимости решения к заданным функциям правой части уравнения отображают осциллограммы функции $\varphi_j(t)$ для ненагруженных узлов ($j = 3, 5, 8$; рис. 14, а) и для нагруженного узла ($j = 4$, рис. 14, б). Из графиков следует, что точность решения дифференциального уравнения движения не выходит за пределы погрешности $\varepsilon \leq 1,1 \cdot 10^{-11}$ кН.

Вычисления проводились в системе MatLab при шаге временного анализа $\Delta t = 10^{-4}$ с (в примерах 1, 3) и $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ с (в примере 2).

Выводы

В рамках теории временного анализа предложен единый подход к расчету дискретных диссипатив-

ных конструкций в упругой постановке и для систем с выключающимися связями.

1. Для уравнения реакции, полученной с учётом действия статической и динамической нагрузки, показано, что статическая нагрузка оказывает влияние только на свободные колебания системы.

2. В общем случае диссипативной конструкции при действии динамической нагрузки для параметров реакции получены аналитические выражения скачков в момент выключения связи и показано, что:

– перемещения и скорости являются непрерывными функциями времени (не имеют скачков);

– ускорения, восстанавливающие, диссипативные и инерционные силы имеют скачки, зависящие от невязок матриц жесткости и / или демпфирования, а также от векторов начальных условий, вытекающих из выражений реакции неповреждённой системы.

3. В частном случае конструкции, находящейся под действием только статической нагрузки, показано, что в момент выключения связи скачки появляются только у ускорений, восстанавливающих и инерционных сил; при этом величина скачка зависит от невязки матрицы жесткости и вектора статических перемещений неповреждённой системы.

Данный аналитический подход может быть рекомендован для анализа конструкций с дискретной расчётной схемой при сложных условиях динамических воздействий и демпфирования, а также при оценке приближённых решений, полученных численными методами.

Литература

1. Резников, Л.М. Эквивалентная модель многомассовой системы с вязким и частотно-независимым трением / Л.М. Резников // *Строительная механика и расчет сооружений*. – М.: Стройиздат. – 1979. – № 4. – С. 44–48.

2. Цейтлин, А.И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики / А.И. Цейтлин. – М.: Стройиздат, 1984. – 336 с.

3. Ананьин, А.И. К составлению и решению уравнений движения неконсервативных систем / А.И. Ананьин // *Известия вузов. – Новосибирск: Строительство*. – 1999. – № 5. – С. 21–27.

4. Перельмутер, А.В. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: ДМК Пресс, 2007. – 600 с.

5. Еремеев, П.Г. Предотвращение лавинообразного (прогрессирующего) обрушения несущих конструкций уникальных большепролетных сооружений при аварийных воздействиях / П.Г. Еремеев // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2006. – № 2. – С. 65–72.

6. Андросова, Н.Б. Некоторые предложения к нормированию параметров живучести сооружений / Н.Б. Андросова, Н.В. Ключева, В.И. Колчунов // *Вестник отделения строительных наук*. – 2011. – Вып. 15. – С. 17–25.

7. Потапов, А.Н. Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях / А.Н. Потапов. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. – 167 с.

8. Потапов, А.Н. Колебания систем с выключающимися связями / А.Н. Потапов // *Моделирование и механика конструкций*. – 2015. – № 2. – http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no2/stroitel'naya-mehanika/2.3/at_download/file

9. Potapov, A.N. Time analysis of elastic response of dissipative systems. Part 1 / A.N. Potapov // *Procedia Engineering*. – 2016. – 150. – P. 1898–1903.

10. Чернов, Ю.Т. К расчету систем с выключающимися связями / Ю.Т. Чернов // *Строительная механика и расчет сооружений*. – 2010. – № 4. – С. 53–57.

Потапов Александр Николаевич, доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Строительное производство и теория сооружений», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), potapov.alni@gmail.com

Поступила в редакцию 22 декабря 2016 г.

THE ANALYSIS OF STRUCTURAL OSCILLATIONS WITH SWITCH OFF CONNECTIONS

A.N. Potapov, potapov.alni@gmail.com

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The approach to the integration of the equations of motion of discrete dissipative system based on the study of the characteristic matrix quadratic equation is expressed within the framework of the theory of the time analysis. The mathematical model of oscillations and the algorithm for calculation of the elastic system and system with suddenly shuts down connections are shown. The effect of static loads in the derivation of dynamic reaction taken into account. The nature of oscillations of a dissipative system associated with the effect of turning off supports is explored. The examples of the analysis of the dynamic response of the two span steel beam during elastic vibrations and sudden breakdown of the intermediate support from the static effects and vibrations.

Keywords: dissipative system, dynamic response, destruction, displacement, oscillation, periodic pulse, equation, stiffness matrix.

References

1. Reznikov L.M. [Equivalent Model of the Multi-mass System with Viscous and Frequency-Independent Friction]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1979, no. 4, pp. 44–48. (in Russ).
2. Tseytlin A.I. *Prikladnye metody resheniya kraevykh zadach stroitel'noy mekhaniki* [Applied Methods of solution of Boundary Problems of Structural Mechanics]. Moscow, Stroyizdat Publ., 1984. 336 p.
3. Anan'in A.I. *K sostavleniyu i resheniyu uravneniy dvizheniya nekonservativnykh sistem* [To the Formulation and Solution of the Equations of Motion of Nonconservative Systems]. *Izvestiya vuzov* [News of Higher Educational Institutions]. Novosibirsk, Stroitel'stvo Publ., 1999, no. 5, pp. 21–27. (in Russ).
4. Perel'muter A.V., Slivker V.I. [Calculation Models of Structures and the Possibility of Their Analysis]. Moscow, DMK Press Publ., 2007. 600 p.
5. Eremeev P.G. *Predotvrashchenie lavinoobraznogo (progressiruyushchego) obrusheniya nesushchikh konstruktivnykh unikal'nykh bol'sheproletnykh sooruzheniy pri avariynnykh vozdeystviyakh* [Prevention Avalanche (Progressive) Collapse of Bearing Structures of Unique Large-Span Buildings During Emergency Impacts]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. 2006, no. 2, pp. 65–72. (in Russ).
6. Androsova N.B., Klyueva N.V., Kolchunov V.I. *Nekotorye predlozheniya k normirovaniyu parametrov zhivuchesti sooruzheniy* [Some Suggestions to Rationing Survivability Parameter Structures]. *Vestnik otdeleniya stroitel'nykh nauk* [Bulletin of the Department of Construction Sciences]. 2011, iss. 15, pp. 17–25. (in Russ).
7. Potapov A.N. [Dynamic Analysis of Discrete Dissipative Systems with Nonstationary Effects]. Chelyabinsk, South Ural St. Univ. Publ., 2003. 167 p.
8. Potapov A.N. *Kolebaniya sistem s vyklyuchayushchimisya svyazyami* [Fluctuations Systems Shuts Down Connections]. *Modelirovaniye i mekhanika konstruktivnykh* [Modelling and structural mechanics]. 2015. no. 2, http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no2/stroitel'naya-mekhanika/2.3/at_download/file
9. Potapov A.N. [Time Analysis of Elastic Response of Dissipative Systems]. *Procedia Engineering*. 2016, vol. 1, pp. 1898–1903.
10. Chernov Yu.T. [To turn off the Calculation of Systems with Constraints] *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]. Moscow, FGUP NITs «Stroitel'stvo» Publ., 2010, no. 4, pp. 53–57. (in Russ).

Received 22 December 2016

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Потапов, А.Н. Анализ колебаний конструкций с выключающимися связями / А.Н. Потапов // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2017. – Т. 17, № 1. – С. 38–48. DOI: 10.14529/build170105

FOR CITATION

Potapov A.N. The Analysis of Structural Oscillations with Switch Off Connections. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2017, vol. 17, no. 1, pp. 38–48. (in Russ.). DOI: 10.14529/build170105