

# Инженерная геометрия и компьютерная графика

УДК 624.131

DOI: 10.14529/build180411

## ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ АЛГОРИТМ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ УЧАСТКОВ ТРАНСПОРТНЫХ МАГИСТРАЛЕЙ

**В.А. Короткий, Т.Ю. Попцова**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия*

К переходным участкам транспортных магистралей предъявляется требование плавного изменения кривизны по всей длине участка. Современные методы проектирования предполагают использование как традиционных переходных кривых, так и алгебраических сплайнов высокого порядка гладкости. При этом формируется переходный участок, состоящий из нескольких разных кривых. В статье предлагается метод конструирования переходных кривых, основанный на особых свойствах квадратичных бирациональных преобразований плоскости с совпадающими фундаментальными точками. В отличие от известных методов, применение метода квадратичных бирациональных преобразований позволяет получать переходную кривую в виде одной алгебраической кривой четвертого порядка, а не в виде составной кривой, состоящей из участков различных кривых линий.

Для определения коэффициентов уравнения переходной кривой применен способ графического дифференцирования неявно заданной функции двух переменных. Показано, что при использовании средств современной компьютерной графики погрешность графического определения радиуса кривизны искомой кривой не превышает 0,6 %. Разработанный графоаналитический алгоритм может применяться при проектировании переходных участков скоростных магистралей и спортивных трасс.

*Ключевые слова:* обобщенная инверсия, циклические точки, предельная окружность, графическое дифференцирование.

### Введение

Проектирование транспортных магистралей выполняется с применением автоматизированных процедур, обеспечивающих унификацию чертежей и сметных расчетов [1]. Тем не менее, каждая магистраль уникальна, поскольку является элементом конкретного ландшафта. Поэтому экономичность и оптимальность проекта достигается не только за счет автоматизации проектных работ, но также благодаря творческому потенциалу инженера-разработчика и его знаниям теоретических основ начертательной геометрии [4, 13].

При проектировании переходной кривой, связывающей два участка трассы, используются разнообразные алгебраические и трансцендентные кривые [14, 15]. Например, два прямолинейных участка трассы могут быть связаны гладкой составной кривой, состоящей из дуги окружности и двух участков клотоиды. В этом случае переходная кривая должна обеспечивать плавное изменение кривизны переходного участка трассы от нуля (первый прямолинейный участок) до некоторого заранее заданного максимального значения, равному кривизне дуги окружности, с последующим плавным уменьшением кривизны до нуля (второй прямолинейный участок). Современные методы проектирования предполагают использование как

традиционных переходных кривых, так и алгебраических сплайнов третьего и более высоких порядков гладкости [3]. При этом формируется переходный участок, состоящий из нескольких разных кривых. В отличие от известных методов, применение квадратичного преобразования Гирста [16] позволяет получить переходную кривую в виде одной алгебраической кривой четвертого порядка [5].

### 1. Постановка задачи

Требуется построить переходную кривую, имеющую в заданных точках  $A$  и  $B$  данные касательные  $T_A$ ,  $T_B$  и радиусы кривизны  $R_A$ ,  $R_B$  (рис. 1).

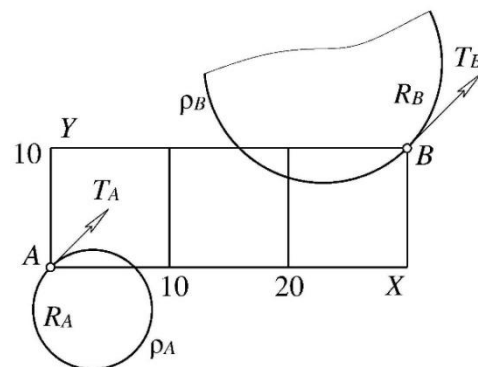


Рис. 1. Граничные условия

Рассмотрим графоаналитический способ решения задачи, основанный на преобразовании Гирста (Hirst) с инвариантной окружностью  $d^2$ . Центр преобразования принадлежит инвариантной окружности. Алгоритм решения основан на свойстве сохранения инцидентности геометрических фигур при выполнении взаимно однозначных преобразований [5, 6].

## 2. Обобщенная инверсия

На совмещенной плоскости  $\Pi=\Pi'$  начертим окружность  $d^2$  с центром  $O$ . Отметим произвольную точку  $M$  плоскости  $\Pi$ . Этой точке соответствует точка  $M'$  плоскости  $\Pi'$ . Точки  $Q, P, M, M'$  образуют гармоническую четверку (рис. 2, а). Окружность  $d^2$  называют инвариантной окружностью, поскольку точки этой окружности при инверсии переходят в себя. Центр инверсии  $O$  совпадает с центром окружности. Произвольная прямая  $m$  преобразуется в окружность  $m^2$ , проходящую через точку  $O$ . Все окружности проходят через циклические точки  $I, J$ , следовательно, образ любой прямой проходит через  $F$ -точки  $O, I, J$  [2].

В рассматриваемом случае фундаментальные точки в совмещенных полях  $\Pi=\Pi'$  попарно совпадают: точки  $F_1=F'_1$  совпадают с точкой  $O$ . Мнимые точки  $F_2=F'_3$  и  $F_3=F'_2$  совпадают с циклическими точками, то есть инцидентны инвариантной окружности  $d^2$  [8, 9].

Произвольным образом переместим центр  $O$  преобразования относительно центра окружности (рис. 2, б). Алгоритм построения соответственных точек остается прежним. Получаем преобразование, которое называют обобщенной инверсией или преобразованием Гирста. При этом мнимые точки  $F_2=F'_3$  и  $F_3=F'_2$  не совпадают с циклическими точками, но остаются на окружности  $d^2$ , указывая мнимые точки касания мнимых прямых, проведенных из точки  $O$  касательно к  $d^2$ . Произвольная прямая  $m$  переходит в конику  $m^2$ , проходящую через точку  $O=F_1=F'_1$  и через мнимые сопряженные точки  $F_2=F'_3, F_3=F'_2$  [7, 10, 11].

Вынесем центр преобразования  $O$  за пределы инвариантной окружности  $d^2$ . Перекрестно совпадающие точки  $F_2=F'_3, F_3=F'_2$ , оставаясь на окружности  $d^2$ , становятся вещественными. Образ  $m^2$  произвольной прямой  $m$  проходит через центр  $O=F_1=F'_1$  и через точки  $F_2=F'_3, F_3=F'_2$  (рис. 2, в).

Если центр преобразования  $O$  принадлежит инвариантной окружности, то  $F$ -точки совпадают с центром  $O$ :  $O=F_1=F'_1=F_2=F'_2=F_3=F'_3$ , вследствие чего образы всех прямых получают в точке  $O$  трехточечное соприкосновение друг с другом, в том числе и с образом  $p^2$  несобственной прямой (рис. 2, г). Образ несобственной прямой  $p^2$  называют предельной окружностью. Предельная окружность проходит через центр преобразования  $O$  и через центр инвариантной окружности  $d^2$ .

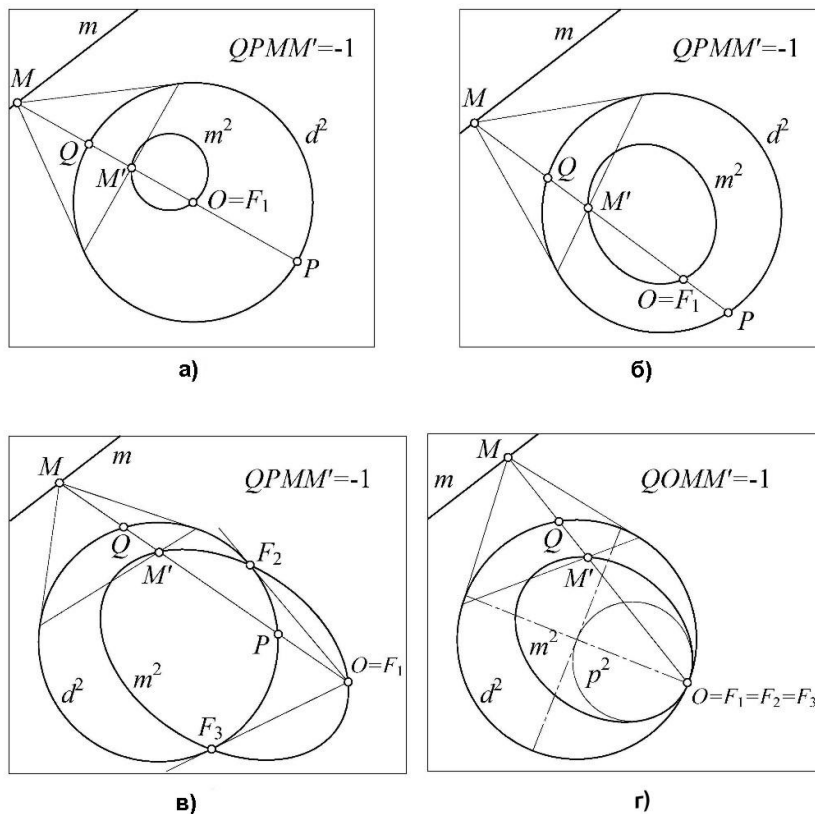


Рис. 2. Преобразование Гирста: а – инверсия; б – центр  $O$  внутри  $d^2$ ; в – центр  $O$  вне  $d^2$ ; г – центр  $O$  принадлежит  $d^2$

**3. Образ окружности в обобщенной инверсии**

Обобщенная инверсия задана центром  $F_1$  и инвариантной окружностью  $d^2$ . Требуется построить образ  $r$  окружности  $r_0$  (рис. 3).

Отмечаем точки пересечения  $1, 1'$  окружности  $r$  с прямой  $j_1=F_2F_3$ . Все точки этой прямой, в том числе и отмеченные точки  $1, 1'$ , преобразуются в точку  $F_1$ . Следовательно,  $F_1$  – двойная точка кривой  $r$ . Точки  $F_2, F_3$  также двойные. Получаем образ окружности  $r_0$  – рациональную кривую  $r$  четвертого порядка. Кривая  $r$  проходит через точки  $R, R'$  пересечения прообраза  $r_0$  и инвариантной коники  $d^2$ .

Если прообраз  $r_0$  не пересекается с прямыми  $j_1, j_2, j_3$ , то образ  $r$  не проходит через точки  $F_1, F_2, F_3$ . Если прообраз пересекается с  $j_i (i=1,2,3)$ , то образ обязательно инцидентен точке  $F_i$ . Сколько раз прообраз пересекает прямую  $j_i$ , столько раз образ проходит через ассоциированную с прямой  $j_i$  точку  $F_i$ .

В частности, если все три  $F$ -точки совпадают с центром преобразования  $O$  (рис. 2, г), то исключенные прямые  $j_1, j_2, j_3$  совпадают между собой, занимая положение касательной  $t$  к инвариантной окружности  $d^2$  в точке  $O$ . Если при этом окружность  $r_0$  пересекает касательную  $t$  (в двух точках), то ее образ  $r$  дважды проходит через три совпавшие  $F$ -точки. При этом обе ветви кривой  $r$  имеют в точке  $O$  круг кривизны, совпадающий с предельной окружностью  $p^2$ . Обе ветви кривой  $r$  и окружность  $p^2$  проходят через три совпавшие точки  $F_1=F_2=F_3$ , следовательно, находятся в трехточечном соприкосновении. Следовательно, в обобщенной инверсии с центром  $O$ , лежащим на инвариантной окружности  $d^2$ , образ  $r$  окружности  $r_0$  имеет в точке  $O$  круг кривизны  $p^2$ .

**4. Алгоритм построения переходной кривой**

В прямоугольной системе координат  $XU$  даны окружности  $\rho_A$  и  $\rho_B$  с радиусами  $R_A, R_B$ . На окруж-

ностях зафиксированы точки  $A, B$  и касательные  $T_A, T_B$  в этих точках (см. рис. 1). Требуется сконструировать кривую  $r$ , имеющую в точках  $A, B$  данные касательные  $T_A, T_B$  и данные радиусы кривизны  $R_A, R_B$ .

**Шаг 1.** Одну из граничных точек (например, точку  $B$ ), принимаем за центр квадратичной инволюции  $I_2$  совмещенных полей  $\Pi = \Pi'$  с совпавшими  $F$ -точками:  $B = F_1 = F_2 = F_3 = F'_1 = F'_2 = F'_3$ . Заданный круг кривизны  $\rho_B$  считаем предельной окружностью  $p^2$  преобразования  $I_2$ . Предельная окружность однозначно определяет инвариантную окружность  $d^2$ . Инволюция  $I_2(B, d^2)$  полностью определена [5].

**Шаг 2.** Круг кривизны  $\rho_A$ , принадлежащий полю  $\Pi$ , преобразуется в кривую четвертого порядка  $\rho'_A$ , лежащую в поле  $\Pi'$ . Найдем уравнение кривой  $\rho'_A$ . Для этого введем в рассмотрение новую систему координат  $xu \equiv x'u'$ , совместив начало координат с центром преобразования  $B$  и направив ось  $u \equiv u'$  вдоль прямой  $t$ , касающейся инвариантной окружности  $d^2$  в точке  $B$  (рис. 4).

В системе координат  $xu$  преобразование  $I_2(B, d^2)$  описывается уравнениями

$$\begin{aligned} x' &= Rx^2 / (x^2 + y^2 - Rx); \\ y' &= Rxy / (x^2 + y^2 - Rx), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $R$  – радиус инвариантной окружности  $d^2$ . Формулы обратного преобразования получаются простой перестановкой координат  $x$  и  $x'$ ,  $y$  и  $y'$ :

$$\begin{aligned} x &= Rx'^2 / (x'^2 + y'^2 - Rx'); \\ y &= Rx'y' / (x'^2 + y'^2 - Rx'). \end{aligned} \tag{2}$$

Уравнение круга кривизны  $\rho_A$  имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R_A^2, \tag{3}$$

где  $x_0, y_0$  – координаты центра круга кривизны  $\rho_A$  в системе координат  $xu$ .

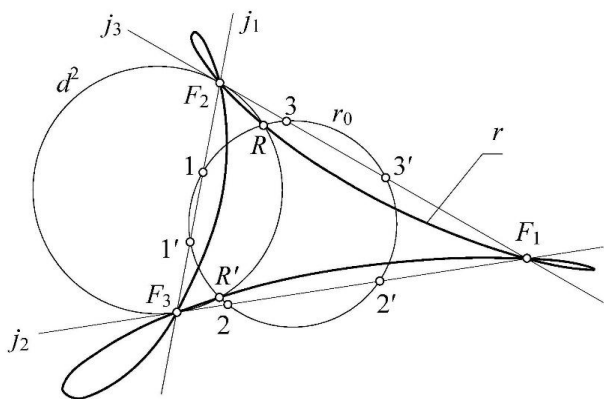


Рис. 3. Образ  $r$  окружности  $r_0$  в преобразовании Гирста

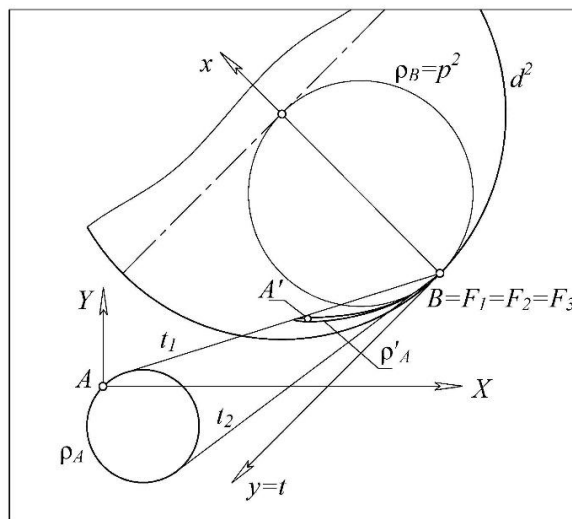


Рис. 4. Образ  $\rho'_A$  круга кривизны  $\rho_A$  в инволюции  $I_2(B, d^2)$

Подставляя в (3) выражения (2), получаем уравнение кривой  $\rho'_A$  в неявном виде:

$$E'x^4 - D'y^4 + K'x^2y^2 + T'x^3 - F'(x^3y' + x'y^3) + M'x^2y' + N'y^2 - L'x^2 = 0, \quad (4)$$

где  $D' = R_A^2 - y_0^2 - x_0^2$ ;  $E' = R^2 - 2Rx_0 - D'$ ;  $K' = R^2 - 2x_0R - 2D'$ ;  $T' = 2x_0R^2 + 2RD'$ ;  $F' = 2Ry_0$ ;  $M' = 2R^2y_0$ ;  $N' = 2RD$ ;  $L' = D'R^2$ .

Поделив выражение (4) на коэффициент  $E'$ , получаем уравнение образа  $\rho'_A$  круга кривизны  $\rho_A$ :

$$G(x, y) = x^4 - Dy^4 + Kx^2y^2 + Tx^3 - F(x^3y + xy^3) + Mx^2y + Nxy^2 - Lx^2 = 0 \quad (5)$$

**Шаг 3.** По формулам прямого преобразования (1) находим численные значения координат точки  $A'$ , соответствующей точке  $A$  в инволюции  $I_2$ . Для вычисления кривизны кривой  $\rho'_A$  дифференцируем функцию  $G(x, y)$ :

$$G'_x = (\partial G / \partial x) = 4Ex^3 + 2Ky^2x - 3Fx^2y - Fy^3 + 3Tx^2 + 2Mxy + Ny^2 - 2Lx;$$

$$G'_y = (\partial G / \partial y) = 2Kx^2y - 4Dy^3 - 3Fx^2 - 3Fy^2x + Mx^2 + 2Nxy;$$

$$G''_{xx} = (\partial G / \partial x)''_x = 12Ex^2 + 2Ky^2 - 6Fxy + 6Tx + 2My - 2L;$$

$$G''_{xy} = (\partial G / \partial x)''_y = 4Kxy - 3F(x^2 + y^2) + 2Mx + 2Ny;$$

$$G''_{yy} = (\partial G / \partial y)''_y = 2Kx^2 - 12Dy^2 - 6Fxy + 2Nx.$$

Первая производная  $g'_A = -G'_x / G'_y$  в точке  $A'$  определяет угол наклона касательной к кривой  $G(x, y)$ . Кривизна  $Kg$  кривой  $G(x, y) = 0$  вычисляется по формуле:

$$Kg = (2G'_x G'_y G''_{xy} - G'^2_y G''_{xx} - G'^2_x G''_{yy}) / (G'^2_x + G'^2_y)^{3/2}. \quad (6)$$

**Шаг 4.** Для окончательного решения задачи надо найти прообраз окружности  $r'$  в квадратичной инволюции  $I_2(B, d^2)$ . Запишем уравнение круга кривизны  $r'$  в поле  $\Pi'$ :

$$(x' - x_{O'})^2 + (y' - y_{O'})^2 = R^2_{A'}. \quad (7)$$

Подставляя в (7) вместо переменных  $x'$ ,  $y'$  выражения (1), получаем уравнение кривой  $r$  четвертого порядка с двойной точкой  $B$ :

$$r(x, y) = ex^4 - dy^4 + kx^2y^2 + tx^3 - f(x^3y + xy^3) + mx^2y + nxy^2 - lx^2 = 0. \quad (8)$$

Покажем, что кривая  $r$  удовлетворяет заданным граничным условиям. Обе ветви кривой  $r$  имеют в точке  $B$  один и тот же круг кривизны  $\rho_B = p^2$ , следовательно, граничные условия в точке  $B$  выполнены. Осталось показать, что кривая  $r$  удовлетворяет граничным условиям в точке  $A$ . Действительно, точке  $A'$ , лежащей на круге кривизны  $r'$ , в инволюции  $I_2(B, d^2)$  соответствует точка  $A$ . Следовательно, прообраз  $r$  окружности  $r'$  проходит через  $A$ . Окружность  $r'$  имеет в точке  $A'$  трехточечное соприкосновение с кривой  $\rho'_A$  – образом круга кривизны  $\rho_A$ . Прообразы  $r$  и  $\rho_A$  также имеют в точке  $A$  трехточечное соприкосновение, поскольку обобщенная инверсия, как и любое взаимно однозначное преобразование, сохраняет инцидентность (рис. 5).

Кривая  $r$  содержит две ветви  $AB$ . Если не учитывать направление касательной  $T_A$ , то обе ветви удовлетворяют граничным условиям. С учетом направления  $T_A$  следует выбрать «верхнюю» ветвь кривой  $r$ . Чтобы найти уравнение кривой  $r$  в исходной системе координат  $XY$ , надо в уравнении (8) выполнить замену переменных:

$$x = X \cos \alpha - Y \sin \alpha + a, \quad y = X \sin \alpha + Y \cos \alpha + b.$$

## 5. Графическое дифференцирование функции $G(x, y)$

Кривизна  $Kg$  неявно заданной кривой  $G(x, y)$  в точке  $A'$  вычисляется по формуле (6). При этом требуется предварительно рассчитать первые и вторые частные производные функции  $G(x, y)$ . Эту трудоемкую вычислительную процедуру можно заменить более простой операцией графического дифференцирования.

**Построение касательной в данной точке.** На кривой  $\rho$  указана точка  $A$  и ряд точек 1, 2, 3 в малой окрестности точки  $A$  (рис. 6). Требуется по-

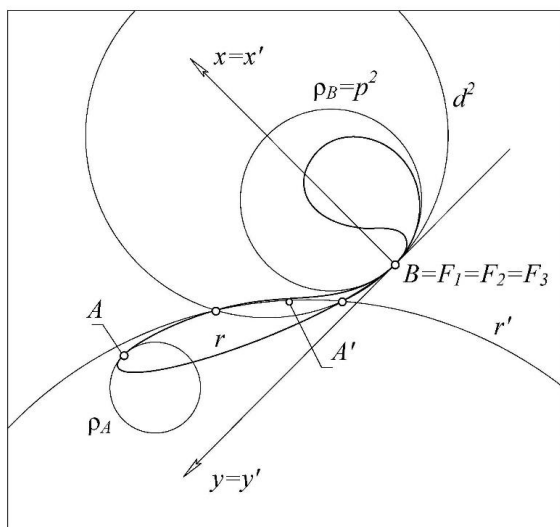


Рис. 5. Прообраз  $r$  круга кривизны  $r'$

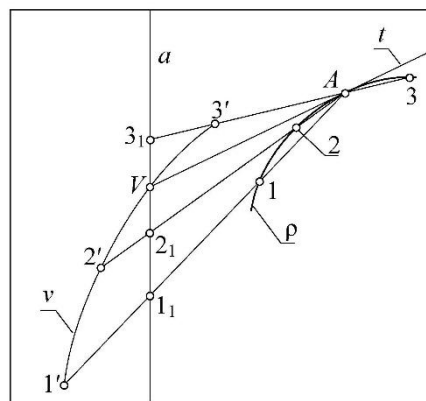


Рис. 6. Построение касательной

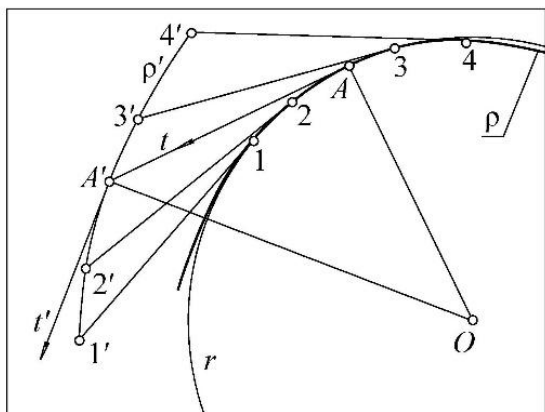


Рис. 7. Построение круга кривизны

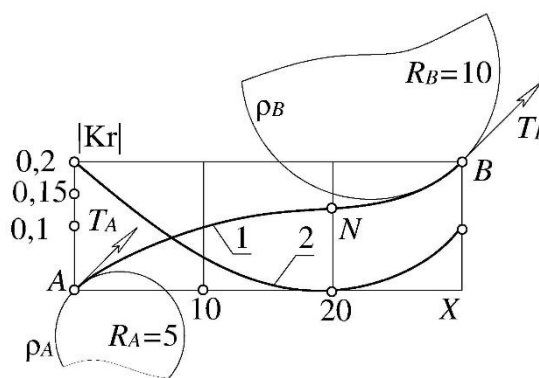


Рис. 8. Переходный участок: 1 – переходная кривая; 2 – график изменения кривизны

строить касательную к кривой  $\rho$  в точке  $A$ . Начертим произвольную прямую  $a$ , приблизительно перпендикулярную к искомой касательной. Через точку  $A$  проведем хорды  $A-1$ ,  $A-2$ ,  $A-3$  и продолжим их до пересечения с прямой  $a$ . От точек пересечения  $1_1$ ,  $2_1$ ,  $3_1$  отложим отрезки, равные хордам:  $1_1-1'=A-1$ ;  $2_1-2'=A-2$ ;  $3_1-3'=A-3$ , причем длины хорд, расположенных по разные стороны от точки  $A$ , отложим с разных сторон прямой  $a$ . Через точки  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  проводим кривую  $\nu$  и отмечаем точку  $V$  ее пересечения с прямой  $a$ . Прямая  $t=AV$  является искомой касательной к кривой  $\rho$  в точке  $A$  [12].

Графический алгоритм может быть реализован на компьютере с любой заранее заданной степенью точности. В частности, указанный алгоритм графического дифференцирования использован для проверки значения производной  $g'_A = -G'_x/G'_y = 1,10346$ , найденной посредством дифференцирования неявно заданной функции  $G(x,y)$ . Для этого на окружности  $R_A$  были отмечены несколько произвольных точек в малой окрестности точки  $A$ , затем графически определены их образы в инволюции  $I_2(B, d^2)$ , после чего графически построена касательная в точке  $A'$ . Получено значение  $(g'_A)^* = 1,1035$ , отличающееся от проверяемого значения  $g'_A = 1,10346$  лишь пятой значащей цифрой.

**Построение круга кривизны в данной точке.**

Для построения круга кривизны в точке  $A$  отмечаем на данной кривой  $\rho$  ряд точек  $1, 2, 3, 4$ , лежащих в малой окрестности точки  $A$ . В каждой точке (в том числе в точке  $A$ ) выполняем построение касательной к кривой  $\rho$  (рис. 7).

От точек  $A, 1, 2, 3, 4$  откладываем вдоль касательных равные отрезки произвольной длины. Концы  $A', 1', 2', 3', 4'$  этих отрезков определяют кривую  $\rho'$ , эквитангенциальную по отношению к кривой  $\rho$ . Точке  $A$  кривой  $\rho$  соответствует точка  $A'$  кривой  $\rho'$ . По ранее рассмотренной графической схеме (см. рис. 6) находим касательную  $t'$  к кривой  $\rho'$  в точке  $A'$ . Нормали к кривым  $\rho, \rho'$ , построенные в точках  $A, A'$ , пересекаются в точке  $O$  – центре искомого круга кривизны  $r$  (см. рис. 7). Графиче-

ское дифференцирование использовано для проверки значения радиуса  $R_A = 46,038$  круга кривизны  $r'$  кривой  $\rho'_A$  в точке  $A'$ , найденного расчетно-аналитическим способом. Получено значение  $R_A = 45,742$ , отличающееся от расчетного на 0,6 %. Повышение точности может быть достигнуто за счет использования дополнительных точек в малой окрестности исследуемого участка кривой.

Таким образом, алгебраическая кривая четвертого порядка  $r(x,y)$  обеспечивает плавное изменение кривизны  $Kr$  переходного участка от значения  $Kr=0,2$  в точке  $A$  до значения  $Kr=0,1$  в точке  $B$ . В точке перегиба  $N$  кривизна равна нулю (рис. 8).

**Заключение**

Разработан графоаналитический способ проектирования переходных участков транспортных магистралей с заданными граничными условиями, основанный на особых свойствах квадратичного бирационального преобразования плоскости с совпадающими фундаментальными точками. В отличие от известных способов, разработанный способ позволяет получать переходную кривую в виде дуги одной алгебраической кривой четвертого порядка, а не в виде составной кривой, состоящей из участков различных кривых линий. Для определения коэффициентов уравнения переходной кривой предлагается использовать способ графического дифференцирования. Показано, что при использовании средств современной компьютерной графики погрешность графического определения радиуса кривизны искомой кривой не превышает 0,6 %. Разработанный графоаналитический способ может применяться при проектировании переходных участков скоростных магистралей и спортивных трасс.

**Литература**

1. Бойков, В.Н. Автоматизированное проектирование автомобильных дорог / В.Н. Бойков, Г.А. Федотов, В.И. Пуркин. – М.: Изд-во МАДИ, 2005. – 224 с.

2. Глаголев, Н.А. *Проективная геометрия* / Н.А. Глаголев. – М.: Высшая школа, 1963. – 343 с.
3. Голованов, Н.Н. *Геометрическое моделирование* / Н.Н. Голованов. – М.: Изд-во физико-математической литературы, 2012. – 472 с.
4. Иванов, Г.С. *Теоретические основы начертательной геометрии* / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1998. – 157 с.
5. Иванов, Г.С. *Конструирование технических поверхностей. Математическое моделирование на основе нелинейных преобразований* / Г.С. Иванов. – М.: Машиностроение, 1987. – 192 с.
6. Иванов, Г.С. *Бирациональные преобразования в моделировании поверхностей* / Г.С. Иванов. – М.: МАИ, 1984. – 44 с.
7. Короткий, В.А. *Графоаналитические алгоритмы конструирования одномерных и двумерных динамических обводов* / В.А. Короткий // *Фундаментальные и прикладные проблемы науки: материалы 12-й Международного симпозиума*. – М.: РАН, 2017. – С. 189–199.
8. Короткий, В.А. *Компьютерная визуализация кривой второго порядка, проходящей через мнимые точки и касающейся мнимых прямых* / В.А. Короткий // *Научная визуализация*. – 2018. – Т. 10, № 1. – С. 56–68.
9. Короткий, В.А. *Визуальная компьютерная конструкция квадратичных соответствий* / В.А. Короткий // *Труды 27-й Международной научной конференции GraphiCon 2017 (24–28 сентября 2017)*, ПГНИУ, Пермь, Россия. – С. 355–358.
10. Короткий, В.А. *Реконструкция квадратичного кремонова преобразования* / В.А. Короткий // *Геометрия и графика*. – 2017. – Т. 5, № 2. – С. 59–68.
11. Короткий, В.А. *Квадратичное преобразование плоскости, установленное пучком конических сечений* / В.А. Короткий // *Омский научный вестник*. – 2013. – № 1(117). – С. 9–14.
12. *Курс начертательной геометрии (с учетом принципов программированного обучения)* / под ред. Н.Ф. Четверухина. – М.: Высшая школа, 1968. – 266 с.
13. Прасолов, В.В. *Геометрия* / В.В. Прасолов, В.М. Тихомиров. – М.: Изд-во МЦНМО, 2013. – 336 с.
14. Савелов, А.А. *Плоские кривые* / А.А. Савелов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 296 с.
15. Уокер, Р. *Алгебраические кривые* / Р. Уокер. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 240 с.
16. Hirst, T.A. *On the Quadric Inversion of Plane Curves* / Thomas Archer Hirst // *Proceedings of the Royal Society of London*. – 1865. – Vol. 14. – P. 91–106.

**Короткий Виктор Анатольевич**, кандидат технических наук, доцент, кафедра инженерной и компьютерной графики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), korotkiiva@susu.ru

**Попцова Татьяна Юрьевна**, старший преподаватель, кафедра инженерной и компьютерной графики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), poptcovati@susu.ru

*Поступила в редакцию 16 сентября 2018 г.*

---

DOI: 10.14529/build180411

## GRAPHICAL ANALYTIC ALGORITHM FOR DESIGNING TRANSITIONAL SECTIONS OF TRANSPORT HIGHWAYS

V.A. Korotkiy, korotkiiva@susu.ru

T.Yu. Poptsova, poptcovati@susu.ru

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

Transitional sections of transport highways are required to have a smooth curvature change along the entire length of the section. Modern design methods assume the use of both traditional transition curves and algebraic splines of high order of smoothness. In this case, a transition region consisting of several different curves is formed. In this paper, we propose a method for constructing transition curves, based on the special properties of quadratic birational transformations of a plane with coinciding fundamental points. In contrast to the known methods, applying of the method of quadratic birational transformations makes it possible to obtain a transition curve in the form of a single algebraic curve of the fourth order, instead of a composite curve consisting of sections of different curved lines. In order to determine the coefficients of the transition curve equation, the method of graphic differentiation of an implicitly set function of two variables is used. It is shown that when using modern computer graphics, the error in determining the curvature radius of the desired curve does not exceed 0.6 %. The developed graphical analytic algorithm can be used when designing transitional sections of highways and sports routes.

*Keywords: generalized inversion, cyclic points, limit circle, graphic differentiation.*

## References

1. Boykov V.N. Fedotov G.A., Purkin V.I. *Avtomatizirovannoye proyektirovaniye avtomobil'nykh dorog* [Automated Design of Highways]. Moscow, MADI Publ., 2005. 224 p.
2. Glagolev N.A. *Proyektivnaya geometriya* [Projective Geometry]. Moscow, High school Publ., 1963. 343 p.
3. Golovanov N.N. *Geometricheskoye modelirovaniye* [Geometric Modeling]. Moscow, Publishing House of Physical and Mathematical Literature, 2012. 472 p.
4. Ivanov G.S. *Teoreticheskiye osnovy nachertatel'noy geometrii* [Theoretical Foundations of Descriptive Geometry]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1998. 157 p.
5. Ivanov G.S. *Konstruirovaniye tekhnicheskikh poverkhnostey. Matematicheskoye modelirovaniye na osnove nelineynykh preobrazovaniy* [Designing Technical Surfaces. Mathematical Modeling Based on Nonlinear Transformations]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1987. 192 p.
6. Ivanov G.S. *Biratsional'nyye preobrazovaniya v modelirovanii poverkhnostey* [Birational Transformations in Surface Modeling]. Moscow, MAI Publ., 1984. 44 p.
7. Korotkiy V.A. [Graphoanalytical Algorithms for Constructing One-Dimensional and Two-Dimensional Dynamic Contours]. *Fundamental'nyye i prikladnyye problemy nauki: materialy 12-y Mezhdunarodnogo simpoziuma* [Fundamental and Applied Problems of Science: Materials of the 12th International Symposium]. Moscow, RAN Publ., 2017, pp. 189–199. (in Russ.).
8. Korotkiy V.A. [Computer Visualization of a Curve of the Second Order Passing Through Imaginary Points and Touching Imaginary Lines]. *Nauchnaya vizualizatsiya* [Scientific Visualization], 2018, iss. 1, vol. 10, pp. 56–68. (in Russ.). DOI: 10.26583/sv.10.1.04
9. Korotkiy V.A. [Visual Computer Reconstruction of Quadratic Correlations]. *Trudy 27-y Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii GraphiCon 2017 (24–28 sentyabrya 2017)* [Proceedings of the 27th International Scientific Conference GraphiCon 2017]. Permian, PGNIU Publ., 2017, pp. 355–358. (in Russ.).
10. Korotkiy V.A. [Reconstruction of a Quadratic Cremona Transformation]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics], 2017, iss. 2, vol. 5, pp. 59–68. (in Russ.). DOI:10.12737/article\_5953f3002a72d8.28689872
11. Korotkiy V.A. [Quadratic Transformation of the Plane Specified by the Beam of Conic Sections]. *Omskiy nauchnyy vestnik* [Omsk Scientific Bulletin], 2013, no. 1(117), pp. 9–14. (in Russ.).
12. Chetverukhina N.F. (Ed.) *Kurs nachertatel'noy geometrii (s uchetom printsipov programmirovannogo obucheniya)* [Course of Descriptive Geometry (Taking into Account the Principles of Programmed Learning)]. Moscow, High school Publ., 1968. 266 p.
13. Prasolov V.V., Tikhomirov V.M. *Geometriya* [Geometry]. Moscow, MTSNMO Publ., 2013. 336 p.
14. Savelov A.A. *Ploskiye krivyie* [Flat Curves]. Moscow, Book House «Librokom» Publ., 2009. 296 p.
15. Uoker, R. *Algebraicheskiye krivyie* [Algebraic Curves]. Moscow, Book House «Librokom» Publ., 2009. 240 p.
16. Hirst T.A. [On the Quadric Inversion of Plane Curves]. *Proceedings of the Royal Society of London*, 1865, vol. 14, pp. 91–106. DOI: 10.1098/rspl.1865.0027

Received 16 September 2018

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Короткий, В.А. Графоаналитический алгоритм проектирования переходных участков транспортных магистралей / В.А. Короткий, Т.Ю. Попцова // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2018. – Т. 18, № 4. – С. 71–77. DOI: 10.14529/build180411

## FOR CITATION

Korotkiy V.A., Poptsova T.Yu. Graphical Analytic Algorithm for Designing Transitional Sections of Transport Highways. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2018, vol. 18, no. 4, pp. 71–77. (in Russ.). DOI: 10.14529/build180411