

## ПОЛУОБРАТНЫЙ МЕТОД КОНСТРУИРОВАНИЯ ФУНКЦИИ ПРОГИБОВ ПРИ РАСЧЁТЕ ПЛИТ

**С.В. Штурмин, Г.Ф. Сидоров**

*Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск, Россия*

В работе определены основные проблемы, связанные с известными методами расчета плит. Предложен метод расчета, позволяющий решить проблемы, возникающие при расчёте плит. Приведён пример конструирования функции прогиба предложенным методом, основанный на анализе формы деформации, для плиты, защемлённой по двум смежным торцам и свободной – по другим, нагруженной сосредоточенной силой, приложенной к свободному углу. Приведён пример конструирования одной из составляющих функции прогиба предложенным методом, основанный на анализе статического расчёта условной балки, для плиты, шарнирно опертой по трём торцам и свободной с четвертого, нагруженной распределённой по всей площади нагрузкой.

*Ключевые слова: расчёт плит, функция прогиба, уравнение Софи Жермен, полином, приближённый метод, обратный метод, полуобратный метод.*

Как известно [1], расчет изгибаемых плит строится вокруг уравнения Софи Жермен – Лагранжа. Функции, удовлетворяющие этому уравнению, гарантируют состояние внутреннего равновесия, а также непрерывность функции перемещений в каждой точке плиты:

$$\nabla^4 W = \frac{q(x,y)}{D}. \quad (1)$$

Функция  $w(x,y)$ , полученная в результате последовательного интегрирования уравнения (1), содержит в себе большое количество неизвестных постоянных (функций) интегрирования. Определить эти неизвестные в общем случае невозможно вследствие недостаточности граничных условий, поэтому расчет ведётся обратным методом и сводится к подбору такой функции прогибов, которая удовлетворяла бы, во-первых, граничным условиям и, во-вторых, уравнению Софи Жермен – Лагранжа. После того, как функция  $w(x,y)$  будет найдена, через неё легко вычислить усилия, напряжения и деформации в плите.

Следует отметить, что второе условие (удовлетворение уравнению Софи Жермен – Лагранжа) в приближённых методах расчета, как правило, опускается, а в качестве критерия внутреннего равновесия и непрерывности деформаций в плите принимаются иные условия [2] (метод Бубнова – Галёркина [3–6], метод Ритца – Тимошенко [7] и др. [8]).

Подбор функции  $w(x,y)$  затрудняется в связи с несколькими проблемами:

1. Большинство приближенных методов расчета изгибаемых плит ориентированы на применение бесконечных тригонометрических рядов [9]. Одно из таких решений (решение Навье) для плит,

шарнирно опертых по контуру, имеет следующий вид [10–12]:

$$w(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2)$$

где  $A_{mn}$  – коэффициенты ряда.

Очевидно, что сходимость такого ряда достигается с тем большим числом членов, чем сложнее нагружение, а следовательно, последующее дифференцирование (интегрирование – применительно к приближённым методам) рядов достаточно трудоёмко.

2. Применение тригонометрических функций, содержащих малое (2–4) число элементов возможно только в отдельных случаях [13], поскольку такие функции описывают характер деформирования плиты не строго. Это хорошо видно на примере изгиба балки (рис. 1).

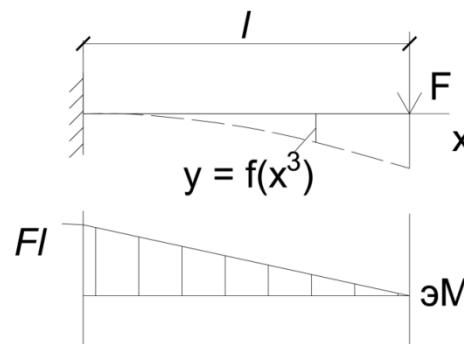


Рис. 1. Изгиб консольной балки

Как известно из закона Гука для изгибаемых стержней (плит) [14, 15], кривизна изгиба в точке связана с внутренним моментом соотношением:

$$\rho(x) = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (3)$$

С другой стороны, функция кривизны в приближении зависит от функции прогибов [16]:

$$\rho(y) = -w''(y). \quad (4)$$

Следовательно, порядок функции прогибов будет на 2 выше, чем у функции моментов. То есть при линейном характере распределения моментов по длине (рис. 1) функция прогиба будет зависеть от величины  $y$  3 степени и для представленного на рис. 1 примера будет иметь вид (для наглядности принимаем все постоянные множители равными 1;  $0 \leq x \leq 1$ ):

$$y = 3x^2 - x^3. \quad (5)$$

Тогда наибольшая величина прогиба:  $y_{x=1} = 2$ .

Функция (5), разложенная в ряд Фурье [17], будет иметь вид (при разложении по косинусам [18]):

$$y = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^4 \pi^4} ((-1)^n \pi^2 n^2 + 2(-1)^n - 2) \cos(\pi n x). \quad (6)$$

Определим сумму ряда (6) при  $x = 1$ :

$$n = 1 \rightarrow y = \frac{3}{4} + \frac{6}{\pi^4} (-\pi^2 - 2 - 2) \cos \pi = 1,604;$$

$$n = 2 \rightarrow y = 1,604 + \frac{6}{\pi^4 16} (\pi^2 \cdot 4 + 2 - 2) \cos 2\pi = 1,751;$$

$$n = 3 \rightarrow y = 1,751 + \frac{6}{\pi^4 81} (-\pi^2 \cdot 9 + 2 - 2) \cos 3\pi = 1,821;$$

$$n = 4 \rightarrow y = 1,821 + \frac{6}{\pi^4 256} (\pi^2 \cdot 16 + 2 - 2) \cos 4\pi = 1,859;$$

$$n = 5 \rightarrow y = 1,859 + \frac{6}{\pi^4 625} (-\pi^2 \cdot 25 + 2 - 2) \cos 5\pi = 1,884;$$

$$n = 6 \rightarrow y = 1,884 + \frac{6}{\pi^4 1296} (\pi^2 \cdot 36 + 2 - 2) \cos 6\pi = 1,901.$$

Как видно, разница с точным значением равна 5 % и достигается сложением ряда вплоть до 6 члена.

Отсюда следует, что более органично характер деформирования балок и плит описывается полиномом.

3. Подбор функции прогибов в виде полинома затрудняется из-за необходимости в удовлетворении всех граничных условий.

Например, для шарнирно опертой по контуру плиты (рис. 2), нагруженной распределенной нагрузкой постоянной интенсивности, можно подобрать следующую функцию прогибов:

$$W(x; y) = A(a-x)x^3(b-y)y^3. \quad (7)$$

Функция удовлетворяет условию закрепления по прогибам:

$$W(x=0) = W(x=a) = W(y=0) = W(y=b) = 0.$$

Определив выражение для кривизн (например, в направлении оси  $x$ ), имеем:

$$W''_x(x; y) = A(6a \cdot x - 12x^2)(b-y)y^3. \quad (8)$$

Выражение (8) не удовлетворяет условиям шарнирного закрепления:

$$W''_x(x=a) = A(-6a^2)(b-y)y^3 \neq 0. \quad (9)$$

Следовательно, исходная функция (7) нуждается в уточнении, которое, возможно, не будет гарантировать удовлетворение остальных граничных условий, что и вызывает затруднения в подборе функции прогиба.

Для решения проблем, связанных с подбором функции  $w(x; y)$ , целесообразно применять *полуобратный метод конструирования функции прогибов*. Суть его заключается в том, что подбор начинается от старшей производной, а именно – второй.

Применение такого подхода обусловлено тем, что при изгибе плиты главную роль в её работе играет изгибающий момент, который связан указанным выше соотношением с кривизной. Поэтому конструирование функции прогиба, отталкиваясь от её второй производной, позволяет получить выражение, более точно описывающее характер работы плиты, а неизвестные, полученные в процессе последовательного интегрирования, позволяют автоматически удовлетворить все граничные условия.

### Пример № 1

Рассмотрим изгиб плиты размерами  $a \times b$ , защемлённой по двум торцам и нагруженной сосредоточенной силой  $F$ , приложенной к свободному углу. В качестве расчетной схемы принимаем срединный слой плиты (рис. 3).

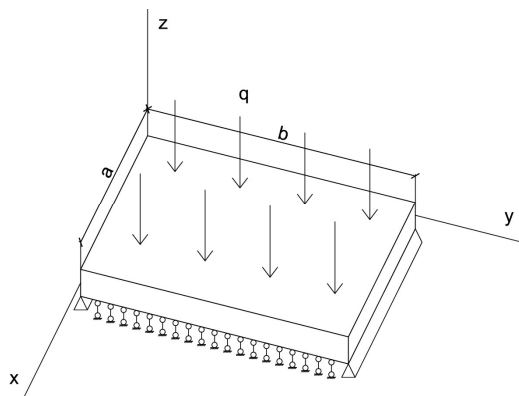


Рис. 2. Шарнирно опертая плита

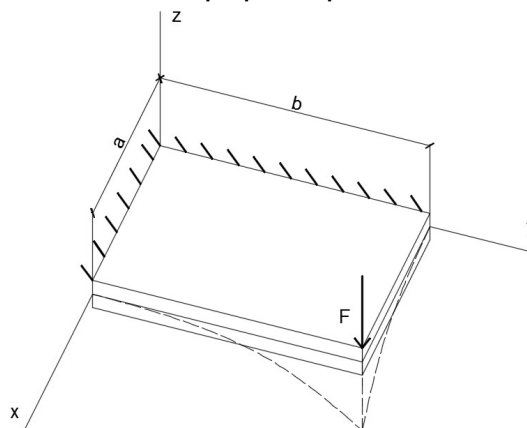


Рис. 3. Схема к примеру № 1

## Строительная механика

Будем искать функцию прогибов плиты в виде полинома. Для этого зададимся функциями кривизн: кривизна плиты вдоль оси  $x$ :

$$W_x'' = A_x (a^2 - x^2); \quad (10)$$

кривизна плиты вдоль оси  $y$ :

$$W_y'' = A_y (b^2 - y^2), \quad (11)$$

где  $A_x = A_x(y)$ ,  $A_y = A_y(x)$  – функции, зависящие от материала, закрепления, вида нагружения и координаты рассматриваемой точки, выступающие (при рассмотрении деформации одним из направлений) в качестве масштабных коэффициентов. Эти коэффициенты заменяют собой влияние близлежащих волокон плиты.

Полная (Гауссова) кривизна:

$$W''(x; y) = A (a^2 - x^2)(b^2 - y^2), \quad (12)$$

где  $A$  – неизвестный коэффициент, зависящий от материала, закрепления и вида нагружения.

Определим выражения для углов поворота:

$$W'_x = \int A_x (a^2 - x^2) \partial x = A_x \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} + c_1 \right); \quad (13)$$

$$W'_y = \int A_y (b^2 - y^2) \partial y = A_y \left( a^2 y - \frac{y^3}{3} + c_2 \right), \quad (14)$$

$c_1 = c_2 = 0$  – из граничных условий.

Далее определяем выражения прогибов:

$$W_x = \int A_x \left( a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \partial x = A_x \left( \frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + c_3 \right); \quad (15)$$

$$W_y = \int A_y \left( a^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \partial y = A_y \left( \frac{a^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{12} + c_4 \right), \quad (16)$$

$c_3 = c_4 = 0$  – из граничных условий.

Комбинируя выражения (15) и (16), получаем:

$$W(x; y) = A \left( \frac{a^2 x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right) \left( \frac{a^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{12} \right) = A \left( \frac{a^2 b^2 x^2 y^2}{4} - \frac{a^2 x^2 y^4}{24} - \frac{b^2 y^2 x^4}{24} + \frac{x^4 y^4}{144} \right). \quad (17)$$

В рассмотренном примере выражение для

функции кривизны было получено из анализа деформации плиты (рис. 3). Теперь рассмотрим пример её отыскания на основе статического расчёта условной балки.

### Пример № 2

Рассмотрим изгиб плиты, имеющей ширину  $a$  и длину  $b$ , нагруженной постоянной распределенной нагрузкой (рис. 4). Плита шарнирно закреплена на опорах, расположенных вдоль трёх её сторон.

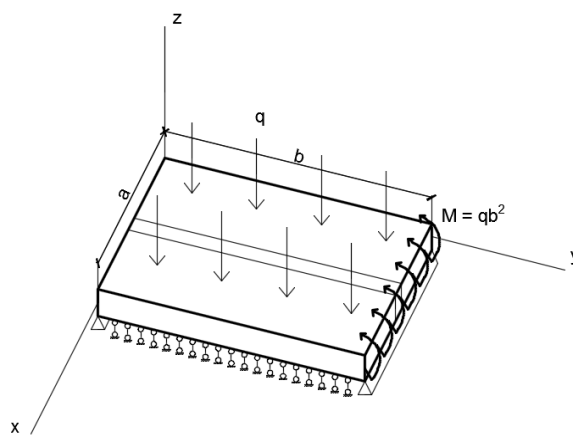


Рис. 4. Схема плиты к примеру № 2

Значение функции прогиба в каждой точке плиты будем искать в виде:

$$W(x; y) = C W_{zx}(x) W_{zy}(y), \quad (18)$$

где  $W_{zx}$  – функция прогиба, возникающего от воздействия силовых факторов, действующих вдоль оси  $x$ , м;  $W_{zy}$  – функция прогиба, возникающего от воздействия силовых факторов, действующих вдоль оси  $y$ , м;  $C$  – неизвестный коэффициент.

В примере отыщем только величину  $W_{zy}(y)$ . Для этого выделим вдоль оси уполосу длиной  $b$  и шириной, равной единице, и рассмотрим ее изгиб как отдельной (условной) балки (рис. 5).

Искомая функция в таком случае может представлять собой полином  $n$ -й степени. Конструирование функции прогибов заключается в подборе такой функции, которая удовлетворяла бы услови-

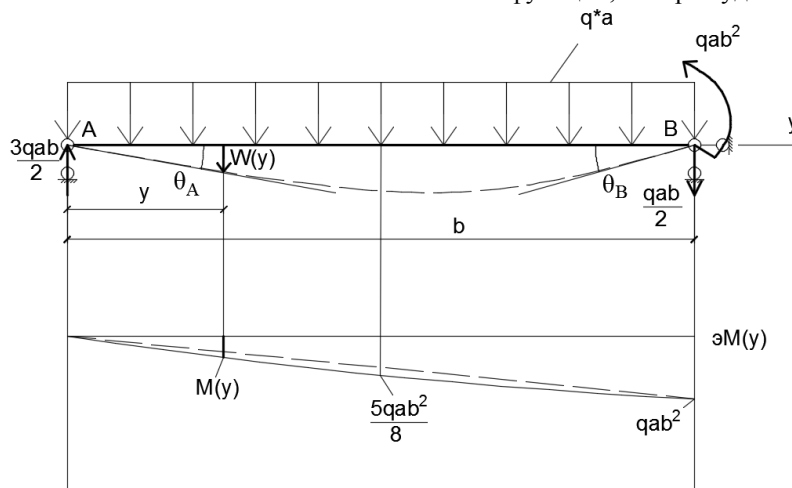


Рис. 5. Схема условной балки

ям закрепления нагружения балки, а именно (для рассматриваемого примера):

$$\begin{aligned} W_{zy} &= 0, \text{ при } y = 0; y = b; \\ W_{zy}' &= \theta \neq 0, \text{ при } y = 0 (\theta_A \neq 0); y = b (\theta_B \neq 0); \\ W_{zy}'' &= \rho = 0, \text{ при } y = 0; W_{zy}'' = \rho \neq 0 \text{ при } y = b. \end{aligned}$$

Функцию прогибов сконструируем обратным методом. Для этого определим выражение для кривизны изгиба оси условной балки через моменты (рис. 6).

$$M_x(y) = \frac{3qab}{2}y - \frac{qay^2}{2}. \quad (19)$$

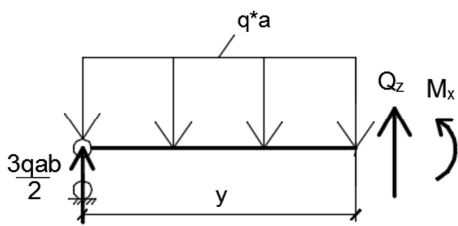


Рис. 6. К статическому расчёту

Согласно закону Гука при изгибе:

$$W_{zy}''(y) = \frac{M_x(y)}{EJ_x} = \frac{qa}{2EJ_x}(3by - y^2) = A(3by - y^2), \quad (20)$$

где  $A = \frac{qa}{2EJ_x}$ .

Интегрируя выражение (20) получаем:

$$W_{zy}'(y) = A \left( \frac{3}{2}by^2 - \frac{y^3}{3} + c_1 \right); \quad (21)$$

$$W_{zy}(y) = A \left( \frac{1}{2}by^3 - \frac{y^4}{12} + yc_1 + c_2 \right). \quad (22)$$

Теперь определим значения постоянных интегрирования  $c_1$  и  $c_2$ , подводя функцию (20) к вышеуказанным краевым условиям:

$$W_{zy}(y=0) = Ac_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0;$$

$$W_{zy}(y=b) = A \left( \frac{1}{2}b^4 - \frac{b^4}{12} + bc_1 \right) = 0 \Rightarrow c_1 = -\frac{5}{12}b^3.$$

Осуществим проверку соответствия функции  $W_{zy}'(y)$  краевым условиям:

$$W_{zy}'(y) = A \left( \frac{3}{2}by^2 - \frac{y^3}{3} + c_1 \right) =$$

$$= A \left( \frac{3}{2}by^2 - \frac{y^3}{3} - \frac{5}{12}b^3 \right);$$

$$W_{zy}'(y=0) = -\frac{5}{12}Ab^3 \neq 0;$$

$$W_{zy}'(y=b) = A_x \left( \frac{3}{2}b^3 - \frac{b^3}{3} - \frac{5}{12}b^3 \right) = -\frac{9}{12}Ab^3 \neq 0.$$

Искомая функция прогибов (для плиты):

$$W_{zy}(y) = A_x(x) \left( \frac{1}{2}by^3 - \frac{y^4}{12} - \frac{5}{12}b^3y \right). \quad (23)$$

## Выводы

1. Полиномы более органично описывают характер деформации плит и балок в отличие от тригонометрических рядов.

2. Решение задачи изгиба плит заходит в тупик при подборе полинома, начинающемся с функции  $W$ . Это связано с необходимостью одновременного удовлетворения краевым условиям и уравнению Софи Жермен – Лагранжа.

3. Подбор функции прогибов более целесообразно начинать с ее второй производной. В этом случае уменьшается число неизвестных функций интегрирования, и вместе с тем автоматически удовлетворяются граничные условия в главном (в кривизнах).

## Литература

1. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер; пер. с англ. В.И. Контовта; под. ред. Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
2. Огибалов, П.М. Оболочки и пластины / П.М. Огибалов, М.А. Колтунов. – М.: Изд-во Московского университета, 1969. – 694 с.
3. Рыжиков, Ю.И. Вычислительные методы / Ю.И. Рыжиков. – СПб.: БХВ, 2007. – 400 с.
4. Галеркин, Б.Г. Стержни и пластинки. Ряды в некоторых вопросах упругого равновесия стержней и пластинок / Б.Г. Галеркин // Вестник инженерной. – 1915. – № 19. – С. 897–908.
5. Бубнов, И.Г. Труды по теории пластин / И.Г. Бубнов, А.С. Вольмир. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 424 с.
6. Вольмир, А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А.С. Вольмир. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 419 с.
7. Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко; пер. с англ. И.К. Снитко; под. ред. В.З. Власова. – М.: ГИТТЛ, 1946. – 532 с.
8. Демидов, С.П. Теория упругости / С.П. Демидов. – М.: Высш. шк., 1979. – 428 с.
9. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер; пер. с англ. М.И. Рейтмана; под. ред. Г.С. Шапиро. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
10. Лейбензон, Л.С. Курс теории упругости / Л.С. Лейбензон. – М.: ГИТТЛ, 1947. – 464 с.
11. Филоненко-Бородич, М.М. Теория упругости / М.М. Филоненко-Бородич. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 364 с.
12. Хан, Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения / Х. Хан; пер. с нем. Е.А. Когана; под. ред. Э.И. Григолюка. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
13. Безухов, Н.И. Основы теории ползучести и пластичности / Н.И. Безухов, О.В. Лужин. – М.: Высш. шк., 1961. – 536 с.
14. Икрин, В.А. Сопротивление материалов с элементами теории упругости и пластичности: учебник / В.А. Икрин. – М.: Изд. АСВ, 2004. – 424 с.

15. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий; пер. с польск. Б.Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 872 с.

16. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.

17. Архипов, Г.И. Лекции по математическому анализу / Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков. – М.: Высш. шк., 1999. – 695 с.

18. Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. – М.: Наука, 1986. – 544 с.

**Штурмин Сергей Валерьевич**, студент кафедры «Строительные конструкции и сооружения», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), sturmakmlp@gmail.com.

**Сидоров Геннадий Федорович**, профессор кафедры «Строительное производство и теория сооружений», Южно-Уральский государственный университет (Челябинск), genasidorov@yandex.ru

Поступила в редакцию 27 ноября 2018 г.

---

DOI: 10.14529/build190102

## SEMIREVERSED METHOD OF DESIGNING OF DEFLECTION FUNCTION IN THE CALCULATION OF THE PLATES

S.V. Shturmin, sturmakmlp@gmail.com

G.F. Sidorov, genasidorov@yandex.ru

South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The paper defines the main problems associated with the known methods of plates calculating. A method of calculation is proposed, which allows to solve the problems arising in the calculating of plates. An example is presented of designing the deflection function using the proposed method, based on the analysis of the deformation form, for the plate, which is clamped on two adjacent sides and is free on the other ones, laden with concentrated force applied to the free corner. Presented an example is given on designing of a component of the deflection function using the proposed method, based on the analysis of the static calculation of nominal beam, for the plate, which is hinged on three sides and is free on the fourth, laden with load distributed across the entire area.

*Keywords: plate calculation, deflection function, Sophie Germain equation, polynomial, approximate method, inverse method, semireversed method.*

### References

1. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [Plates and Shells]. Moscow, Nauka Publ., 1966. 636 p.
2. Ogibalov P.M., Koltunov M.A. *Obolochki i plastiny* [Shells and Plates]. Moscow, Izd-vo Moskovskogo Universiteta, 1969. 694 p.
3. Ryzhikov Yu.I. *Vychislitel'nyye metody* [Computational Methods]. St. Petersburg, BKHV Publ., 2007. 400 p.
4. Galerkin B.G. [Bars and plates: the Series in some Issues of Elastic Balance of Bars and Plates]. *Bulletin of engineers*, 1915, no. 19, pp. 897–908. (in Russ.).
5. Bubnov I.G., Vol'mir A.S. *Trudy po teorii plastin* [Papers in Theory of the Plates]. Moscow, GITTL Publ., 1953. 424 p.
6. Vol'mir A.S. *Gibkiye plastinki i obolochki* [Flexible Plates and Shells]. Moscow, GITTL Publ., 1956. 419 p.
7. Timoshenko S.P. *Ustoychivost' uprugikh sistem* [Stability of Elastic Systems]. Moscow, GITTL Publ., 1946. 532 p.
8. Demidov S.P. *Teoriya uprugosti* [Elasticity Theory]. Moscow, High School Publ., 1979. 428 p.
9. Timoshenko S.P., Gud'yer Dzh. *Teoriya uprugosti* [Elasticity Theory]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 560 p.
10. Leybenzon L.S. *Kurs teorii uprugosti* [Course of Elasticity Theory]. Moscow, GITTL Publ., 1947. 464 p.
11. Filonenko-Borodich M.M. *Teoriya uprugosti* [Elasticity Theory]. Moscow, GIFML Publ., 1959. 364 p.

12. Khan Kh. *Teoriya uprugosti. Osnovy lineynoy teorii i eye primeneniya* [Elasticity Theory. Fundamentals of Linear Theory and its Applying]. Moscow, Mir Publ., 1988. 344 p.
13. Bezukhov N.I., Luzhin O.V. *Osnovy teorii polzuchesti i plastichnosti* [Foundation of the Theory of Creep and Plasticity]. Moscow, High School Publ., 1961. 536 p.
14. Ikrin V.A. *Soprotivleniye materialov s elementami teorii uprugosti i plastichnosti: uchebnyy* [Strength of Materials With Elements of the Theory of Plasticity and Elasticity]. Moscow, ASV Publ., 2004. 424 p.
15. Novatskiy V. *Teoriya uprugosti* [Elasticity Theory]. Moscow, Mir Publ., 1975. 872 p.
16. Feodos'yev V.I. *Soprotivleniye materialov* [Strength of Materials]. Moscow, MGTU im. N.E. Bauman Publ., 1999. 592 p.
17. Arkhipov G.I., Sadovnichiy V.A., Chubarikov V.N. *Leksii po matematicheskomu analizu* [Lectures on Mathematical Analysis]. Moscow, High School Publ., 1999. 695 p.
18. Bronshteyn I.N., Semendyaev K.A. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtu-zov* [Math Handbook for Engineers and Students of High Technical Schools]. Moscow, Nauka Publ., 1986. 544 p.

Received 27 November 2018

---

**ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ**

Штурмин, С.В. Полуобратный метод конструирования функции прогибов при расчёте плит / С.В. Штурмин, Г.Ф. Сидоров // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2019. – Т. 19, № 1. – С. 14–19. DOI: 10.14529/build190102

**FOR CITATION**

Shturmin S.V., Sidorov G.F. Semireversed Method of Designing of Deflection Function in the Calculation of the Plates. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2019, vol. 19, no. 1, pp. 14–19. (in Russ.). DOI: 10.14529/build190102

---