

# Инженерная геометрия и компьютерная графика

УДК 666.9:691.32

DOI: 10.14529/build200106

## О ГЛАДКОСТИ СТЫКОВКИ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ПРИ ЦИКЛОГРАФИЧЕСКОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ФОРМ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ

*Е.В. Любчинов, К.Л. Панчук*

*Омский государственный технический университет, г. Омск, Россия*

Системы автоматизированного проектирования автомобильных дорог позволили отказаться от двухэтапного проектирования оси дороги (в плане и профиле) и перейти к ее заданию как пространственной кривой в виде параметрических сплайнов или кривых Безье. Однако вопросы гладкости стыковки как сегментов кривых, так и отсеков поверхностей дорожного полотна, до сих пор остаются открытыми.

Авторы работы продолжают развитие метода конструирования поверхностных форм автомобильной дороги на основе циклографического отображения. Представлены возможные варианты конструирования поверхностных форм, показаны их преимущества и недостатки. Рассмотрены вопросы гладкости стыковки сегментов кривых при формообразовании оси дороги и кромки проезжей части, а также при формообразовании отсеков поверхностей проезжей части, образованных на данных сегментах. Проведены символичные вычисления и численные расчеты, которые показывают наличие прямой зависимости между порядком гладкости стыковки сегментов оси дороги, представленной в виде полиномиального сплайна, кромок проезжей части отсеками поверхностей.

Результаты работы позволяют на этапе проектирования оси автомобильной дороги и последующего конструирования её поверхностных форм заранее выбирать порядок гладкости стыкуемых сегментов линий и отсеков поверхностей дороги, что может быть использовано при разработке САПР автомобильных дорог.

*Ключевые слова: автомобильная дорога, геометрическое моделирование, циклографическое отображение, сегменты линий, отсеки поверхностей, гладкость стыковки.*

Известно, что геометрические характеристики автомобильных дорог являются одним из ключевых параметров, определяющих безопасность движения, поэтому на стадии проектирования дороги к ним необходимо подходить с максимальной ответственностью [1]. Геометрическое моделирование поверхностных форм автомобильных дорог на сегодняшний день развивается стремительными темпами. Не последнюю очередь в этом сыграли разработки систем автоматизированного проектирования (САПР), специализирующиеся в этой области [2–5]. Тем не менее, существует ряд вопросов теории формообразования поверхностных форм автомобильных дорог, которые на сегодняшний день остаются открытыми. Так, до сих пор ось дороги в большинстве существующих подходов рассматривается не как пространственная линия, а как две ее плоских проекции, что однозначно влияет на точность построения оси дороги на местности. Также нигде не указан тип поверхностей, образующих проезжую часть и обочину, не говоря о гладкости стыковки данных поверхностей на различных участках автомобильных дорог [5].

В научной литературе существует ряд работ [5–7], в которых предложены геометрическая и математическая модели поверхностных форм автомобильной дороги. Эти модели основаны на известном в прикладной геометрии каркасно-кинематическом методе. На данный момент это единственные модели, в которых автомобильная дорога рассматривается как целостный объект, отсеки которого стыкуются по определенному порядку гладкости.

В работах [8–11] авторами рассматривался подход к формированию поверхностей проезжей части на различных участках (прямолинейном, переходном и круговом) на основе метода циклографического отображения. В настоящей работе авторы продолжают и развивают данный метод применительно к геометрическому моделированию поверхностных форм автомобильных дорог, в частности рассматривают вопросы гладкости стыковки линий и поверхностей дорожного полотна, а также затрагивают некоторые особенности применения метода циклографического отображения в данной прикладной области.

**Постановка задачи**

Построение теоретической поверхности участков автомобильной дороги в большинстве существующих методов проектирования начинается с задания или формирования по определенным условиям оси дороги. Поскольку дорога имеет различные участки – прямолинейные, круговые и переходные, то также требуется, чтобы соответствующие участки оси дороги были состыкованы по определенному порядку гладкости. То же требование предъявляется и к отрезкам поверхностей, образованных от данных участков оси дороги.

Геометрическая модель участка поверхностных форм автомобильной дороги, основанная на методе циклографического отображения, базируется на циклографической проекции пространственной кривой линии  $\bar{P}(t)$ , описываемой векторным уравнением:

$$\bar{P}(t) = (x(t), y(t), z(t)); \bar{P}'(t) \neq 0; t \in \mathbb{R} : T_0 \leq t \leq T. \quad (1)$$

Циклографический образ пространственной кривой линии (1) формируется на основе огибающей однопараметрического множества  $\beta$ -конусов, вершины которых принадлежат исходной пространственной кривой, а круговые основания лежат в плоскости проекций  $z = 0$ . Обобщенные уравнения огибающей циклов – оснований  $\beta$ -конусов, имеют вид [11–14]:

$$\begin{aligned} x_{\beta(1,2)}(t) &= x(t) + \\ &+ z(t) \cdot e(t) \frac{-x'(t) \cdot \mu(t) \mp y'(t) \sqrt{\lambda(t) - \mu^2(t)}}{\lambda(t)}, \\ y_{\beta(1,2)}(t) &= y(t) + \\ &+ z(t) \cdot e(t) \frac{-x'(t) \cdot \mu(t) \pm x'(t) \sqrt{\lambda(t) - \mu^2(t)}}{\lambda(t)}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\beta$  – полуугол при вершине  $\beta$ -конуса отображения со значениями  $0^\circ < \beta < 90^\circ$ ;  $\mu(t) = e(t) \cdot z'(t) + e'(t) \cdot z(t)$ ;  $\lambda(t) = x'(t)^2 + y'(t)^2$ ;  $e(t) = tg(\beta)$ .

Зависимость между гладкостью стыковки сегментов исходной пространственной кривой  $\bar{P}(t)$  и соответствующими сегментами ее циклографической проекции ( $\bar{P}_{\beta 1}(t)$ ,  $\bar{P}_{\beta 2}(t)$ ) в научной литературе до конца не изучена. Подобно гладкости между сегментами пространственной кривой, не изучена и гладкость между отрезками поверхностей, образующихся между пространственной кривой и ее циклографической проекцией.

Исходя из вышесказанного, ставится задача построения поверхности автомобильной дороги на основе циклографического отображения, с соблюдением определенного порядка гладкости стыковки сегментов кривых и отрезков поверхностей на разных участках. В качестве исходной кривой используется сплайн Безье, широко применяемый в различных сферах компьютерного геометрического моделирования и САД-системах [15–19]. Под сегментом сплайна Безье будем понимать кривую

Безье  $n$ -степени, при этом сам сплайн Безье будем считать состоящим из множества сегментов, состыкованных по условиям гладкости.

**Теория***1. Общий принцип образования поверхностных форм автомобильных дорог*

Как уже отмечалось выше, при совместном рассмотрении уравнений (1) и (2) образуется линейчатая поверхность дорожного полотна, описываемая уравнениями:

$$\begin{aligned} X(t, l) &= x(t) + l \cdot [x_{\beta(1,2)}(t) - x(t)], \\ Y(t, l) &= y(t) + l \cdot [y_{\beta(1,2)}(t) - y(t)], \\ Z(t, l) &= z(t) \cdot (1 - l); \quad T_0 \leq t \leq T, L_0 \leq l \leq L. \end{aligned} \quad (3)$$

Из условия образования поверхности (3) следует, что она является развертывающейся [11], образующие ее принадлежат нормальным плоскостям огибающей  $\bar{P}_{\beta}(t) = (\bar{P}_{\beta 1}(t), \bar{P}_{\beta 2}(t))$ . При рассечении поверхности нормальными плоскостями по отношению к линии  $\bar{P}_1(t)$ , которая является ортогональной проекцией линии  $\bar{P}(t)$ , получаем в сечении линию, отличную от типового поперечного профиля дорожного полотна, состоящего из прямых линий [20]. В этом случае циклографическая проекция может быть преобразована в измененную циклографическую проекцию. Суть данного преобразования подробно описана в работе [8]. На рис. 1 представлены изображения циклографической проекции (а) и измененной циклографической проекции (б).

Таким образом, имеется два варианта получения поверхности дорожного полотна на основе циклографического отображения. Первый – прямая циклографическая проекция – дает развертывающуюся линейчатую поверхность, однако ее сечения отличаются от типового поперечного профиля. Второй вариант – измененная циклографическая проекция с получением неразвертывающейся поверхности, имеющей типовой поперечный профиль. Теоретически оба варианта применимы для формообразования поверхностных форм, оба математически формализуемы, что делает их доступными для использования в САПР.

После получения поверхности (3) ее необходимо обрезать на величину ширины проезжей части. Для этого от линии  $\bar{P}_1(t)$  по известным формулам строятся линии-эквилидистанты на величину, равную ширине проезжей части. На данных линиях выстраиваются проектирующие относительно плоскости  $z = 0$  цилиндрические поверхности, которые в пересечении с линейчатыми поверхностями (3) образуют пространственные кривые – кромки проезжей части. Очевидно, что в параметрических уравнениях кромки координаты  $x$  и  $y$  будут идентичны уравнениям эквидистанты, в то время как координата  $z$  будет получена в ходе вычислений. В итоге уравнения кромки проезжей

# Инженерная геометрия и компьютерная графика

части (для варианта с измененной циклографической проекцией) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} x_{e(1,2)} &= x \mp \frac{h \cdot y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \\ y_{e(1,2)} &= y \pm \frac{h \cdot x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \\ z_{e(1,2)} &= \frac{z(t) \cdot (\sqrt{z(t)^2 \cdot e(t)^2 - h})}{\sqrt{z(t)^2 \cdot e(t)^2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

где  $h$  – задаваемая ширина проезжей части.

Следовательно, ось дороги (1) и линия кромки проезжей части (4) по уравнениям (3) позволяют получить поверхность проезжей части. Подобным образом можно получить, например, поверхности обочин, создаваемые между кромками проезжей части и бровками обочины. Схема образования поверхности проезжей части представлена на рис. 2.

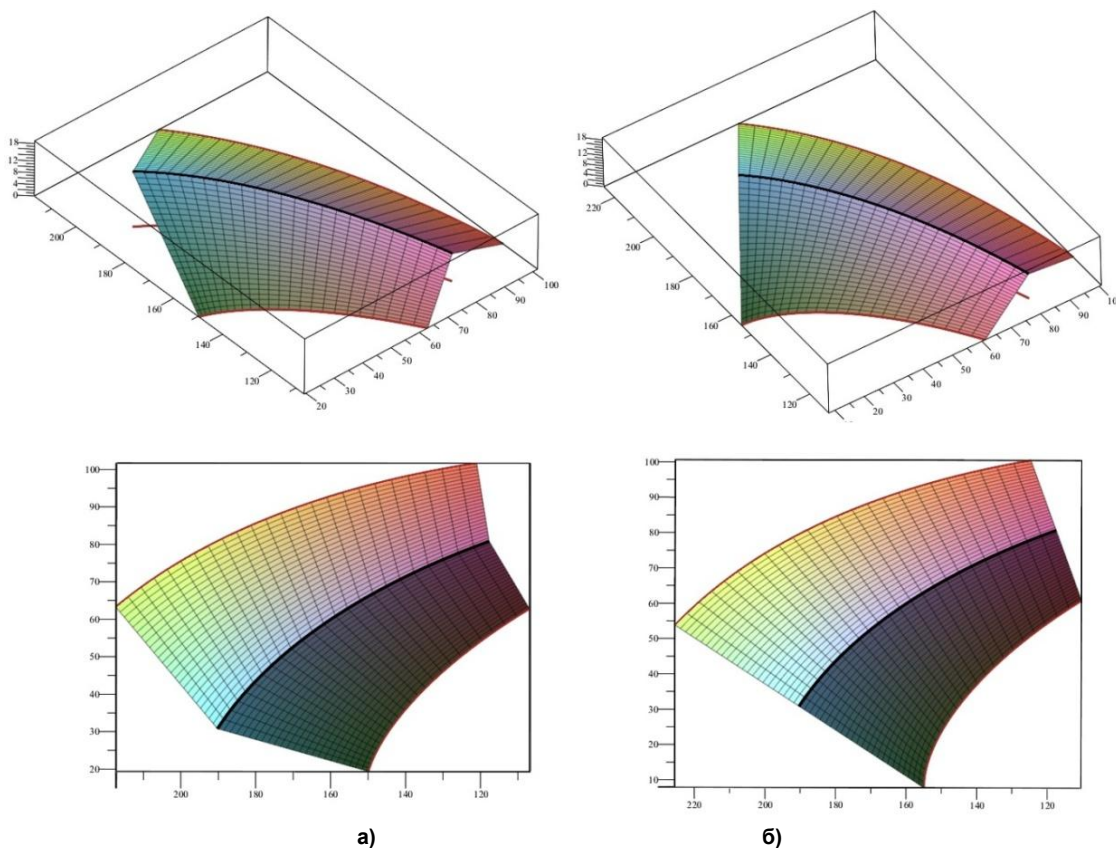


Рис. 1. Циклографическая (а) и измененная циклографическая (б) проекции кривой линии

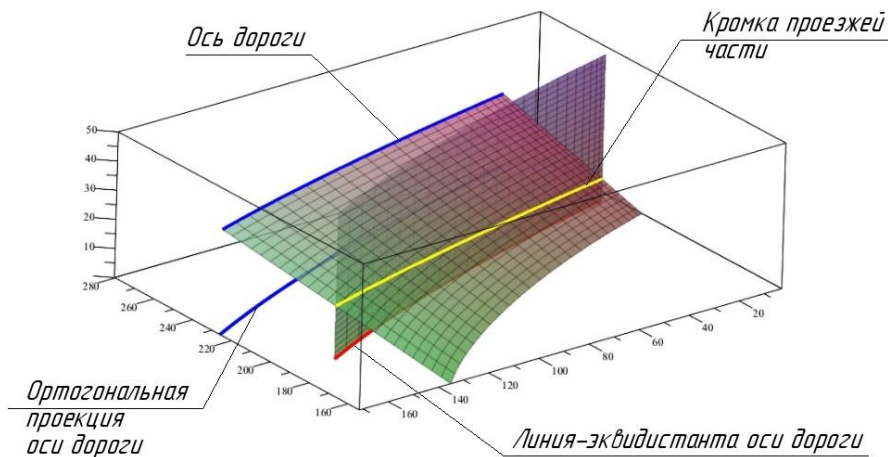


Рис. 2. Схема образования поверхности проезжей части

2. Исследование гладкости стыковки сегментов циклографической проекции сплайна Безье

Ось дороги является ключевым объектом, который заложен в основу практически каждого метода проектирования автомобильных дорог. С развитием САПР качественно новым становится подход к представлению оси дороги в виде пространственной кривой. Так для пространственного трассирования активно стали применять сплайн-функции [5], кривые Безье 2, 3, 4 и 5-го порядков [2, 21, 22], а также и NURBS-кривые [7]. Это в свою очередь позволило достигать более высоких порядков гладкости стыковки сегментов оси дороги. В этой связи возникает вопрос о гладкости стыковки циклографических проекций оси дороги, и, соответственно, кромок проезжей части и бровок обочин.

Рассмотрим построение сплайна Безье, состоящего из сегментов Безье третьей степени, как наиболее распространенных в САПР сплайнов. Уравнения сегментов Безье третьей степени в точечной форме имеют следующий вид [19]:

$$\begin{aligned} S_1^3(t_1) &= (1-t_1)^3 Q_0 + 3(1-t_1)^2 t_1 A_0 + \\ &\quad + 3(1-t_1) t_1^2 B_0 + t_1^3 Q_1; \\ S_2^3(t_2) &= (1-t_2)^3 Q_1 + 3(1-t_2)^2 t_2 A_1 + \\ &\quad + 3(1-t_2) t_2^2 B_1 + t_2^3 Q_2. \end{aligned} \quad (5)$$

где  $t_1, t_2 \in [0,1]$ . Неизвестными в этих уравнениях являются четыре управляющих точки –  $A_0, B_0, A_1, B_1$ . Для их нахождения введем условия стыковки сплайна в точке  $Q_1$  по равенствам первых и вторых производных:

$$\begin{aligned} (S_1^3)'(t_1=1) &= 2 \cdot (Q_1 - B_0); \\ (S_1^3)''(t_1=1) &= 6 \cdot (Q_1 + A_0 - 2B_0); \\ (S_2^3)'(t_2=0) &= 3 \cdot (A_1 - Q_1); \\ (S_2^3)''(t_2=0) &= 6 \cdot (Q_1 + B_1 - 2A_1). \end{aligned}$$

Приравнявая соответствующие значения:  $(S_1^3)'(t_1=1) = (S_2^3)'(t_2=0)$  и  $(S_1^3)''(t_1=1) = (S_2^3)''(t_2=0)$ , получаем два уравнения и четыре неизвестных. Для решения системы добавим еще два крайевых условия: равенство нулю вторых производных на концах сплайна. Тогда получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} -3B_0 - 3A_1 &= -6Q_1; \\ 6A_0 - 12B_0 + 12A_1 - 6B_1 &= 0; \\ 6Q_0 - 12A_0 + 6B_0 &= 0; \\ 6A_1 - 12B_1 + 6Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решая систему уравнений (6), получаем неизвестные управляющие точки  $(A_0, B_0, A_1, B_1)$ . Подставив координаты найденных управляющих точек в уравнения (5), получаем уравнения состыкованных между собой сегментов сплайна Безье  $S_1^3(t_1)$  и  $S_2^3(t_2)$  по гладкости  $C^2$ . Подставляя полученные

уравнения сегментов сплайна в уравнения циклографической проекции (1), получаем  $\bar{P}_{\beta(1,2),S_1^3}(x_{\beta(1,2),S_1^3}, y_{\beta(1,2),S_1^3})$  и  $\bar{P}_{\beta(1,2),S_2^3}(x_{\beta(1,2),S_2^3}, y_{\beta(1,2),S_2^3})$ .

Вычислим и приравняем первые и вторые производные циклографических проекций  $\bar{P}_{\beta(1,2),S_1^3}(x_{\beta(1,2),S_1^3}, y_{\beta(1,2),S_1^3})$  и  $\bar{P}_{\beta(1,2),S_2^3}(x_{\beta(1,2),S_2^3}, y_{\beta(1,2),S_2^3})$  в точках их стыковки с помощью средств системы компьютерной алгебры. Получим следующие результаты:

$$\begin{aligned} \bar{P}'_{\beta(1,2),S_1^3}(t=1) &= \bar{P}'_{\beta(1,2),S_2^3}(t=0) \rightarrow true; \\ \bar{P}''_{\beta(1,2),S_1^3}(t=1) &\neq \bar{P}''_{\beta(1,2),S_2^3}(t=0) \rightarrow false. \end{aligned}$$

Из изложенного следует предположение о том, что порядок гладкости стыковки сегментов циклографических проекций понижается на единицу относительно гладкости стыковки соответствующих сегментов исходного сплайна. Поскольку при добавлении каждого последующего сегмента появляются лишь два неизвестных, то вводятся только два дополнительных условия для их нахождения: равенства первых и вторых производных в узлах стыковки. Таким образом, все последующие сегменты сплайна стыкуются по второму порядку гладкости, а их соответствующие циклографические проекции – по первому. Дальнейшая символическая проверка показала, что это условие сохраняется и на сплайнах, состоящих из сегментов Безье второй, четвертой и пятой степеней, а также на других полиномиальных сплайнах.

Объясним данное свойство циклографической проекции. Пусть дан сплайн Безье  $S^2(t)$ , состоящий из сегментов второй степени. Стыковка данных сегментов по первому порядку гладкости означает следующее:  $S_1^2(t=1) = S_2^2(t=0)$ ,  $(S_1^2)'(t=1) = (S_2^2)'(t=0)$ , или в координатно-параметрической форме:

$$\begin{aligned} x_1(t=1) &= x_2(t=0); & x_1'(t=1) &= x_2'(t=0); \\ y_1(t=1) &= y_2(t=0); & y_1'(t=1) &= y_2'(t=0); \\ z_1(t=1) &= z_2(t=0); & z_1'(t=1) &= z_2'(t=0). \end{aligned} \quad (7)$$

При этом имеет место неравенство:

$$(S_1^2)''(t=1) \neq (S_2^2)''(t=0).$$

Рассмотрим уравнения циклографической проекции (2) в точке стыковки, где  $x_{\beta(1,2),S_1^2}(t=1) = x_{\beta(1,2),S_2^2}(t=0)$ ;  $y_{\beta(1,2),S_1^2}(t=1) = y_{\beta(1,2),S_2^2}(t=0)$ . Очевидно, что все составляющие уравнений (7), как обычные координаты сегментов сплайна, так и их первые производные, присутствуют в уравнении (2). Из этого следует, что циклографические проекции имеют всего лишь общую точку стыковки. Выполним проверку стыковки по первому порядку гладкости для циклографических проекций этого сплайна. Для этого следует взять первые производные уравнений циклографической проекции и

подставить необходимые значения параметра  $t$ . Для символической проверки воспользуемся системой компьютерной алгебры и в результате получим следующий результат:

$$(x_{\beta(1,2),S_1^2})'(t=1) \neq (x_{\beta(1,2),S_2^2})'(t=0) \rightarrow \text{false};$$

$$(y_{\beta(1,2),S_1^2})'(t=1) \neq (y_{\beta(1,2),S_2^2})'(t=0) \rightarrow \text{false}.$$

Неравенство первых производных в точке стыка на циклографической проекции объясняется тем, что при взятии первой производной в данных уравнениях появляются вторые производные уравнений сегментов сплайна  $S_n^2(t)$ , которые, как отмечалось выше, не равны между собой в точке стыковки. Отсюда легко прослеживается логическая связь и для сплайнов более высоких степеней, что подтверждает адекватность обнаруженного свойства циклографической проекции.

Для примера, на рис. 3 представлен сплайн Безье из сегментов Безье второй степени, состыкованных по первому порядку гладкости. Несмотря на то, что визуально гладкость стыковки сегментов циклографических проекций не нарушается, условие равенства первых производных на них не соблюдается. Очевидны (на увеличенном участке (см. рис. 3)) нарушения гладкости стыковки параметрической сетки соседних отсеков поверхностей, образованных на данных линиях.

Из вышесказанного можно сделать следующий вывод: сегменты циклографической проекции пространственного сплайна Безье, состоящего из сегментов Безье второй и более высокой степени с гладкостью стыковки  $C^n$ , будут иметь гладкость стыковки  $C^{n-1}$ . Это свойство сохраняется и для измененной циклографической проекции.

### 3. Исследование гладкости стыковки отсеков поверхностей

Из-за особенностей гладкости стыковки циклографических проекций возникает необходимость

гладкости стыковки отсеков поверхностей, образованных на сегментах оси дороги и ее циклографических проекциях. Очевидна неоднозначность определения гладкости стыковки, так как одна из направляющих получаемых линейчатых поверхностей имеет гладкость стыковки сегментов  $C^n$ , а другая – гладкость соответствующих сегментов  $C^{n-1}$ .

Как известно, поверхность называется гладкой  $C^k$  (где  $k$  – натуральное число), если она имеет непрерывные частные производные до  $k$ -го порядка включительно, причем в каждой точке  $(t, l) \in G$ , где  $G$  – это область определения [23]:

$$\text{ранг} \begin{pmatrix} X_t & Y_t & Z_t \\ X_l & Y_l & Z_l \end{pmatrix} = 2.$$

Символьная проверка показала, что ранг вышеприведенной матрицы в каждой точке рассматриваемых поверхностей равен двум. Это говорит о том, что поверхности являются гладкими. Из уравнений (3) следует, что частные производные по параметру  $l$ , начиная со второй, обращаются в ноль, следовательно, определяющими в данном случае являются частные производные по параметру  $t$ . Воспользуемся примером со сплайном Безье из сегментов третьей степени и проведем проверку равенств частных производных по параметру  $t$  в местах стыковки отсеков поверхностей в системе компьютерной алгебры:

– первые производные:

$$(X_1)'(t=1) = (X_2)'(t=0) \rightarrow \text{true};$$

$$(Y_1)'(t=1) = (Y_2)'(t=0) \rightarrow \text{true};$$

$$(Z_1)'(t=1) = (Z_2)'(t=0) \rightarrow \text{true};$$

– вторые производные:

$$(X_1)''(t=1) \neq (X_2)''(t=0) \rightarrow \text{false};$$

$$(Y_1)''(t=1) \neq (Y_2)''(t=0) \rightarrow \text{false};$$

$$(Z_1)''(t=1) = (Z_2)''(t=0) \rightarrow \text{true}.$$

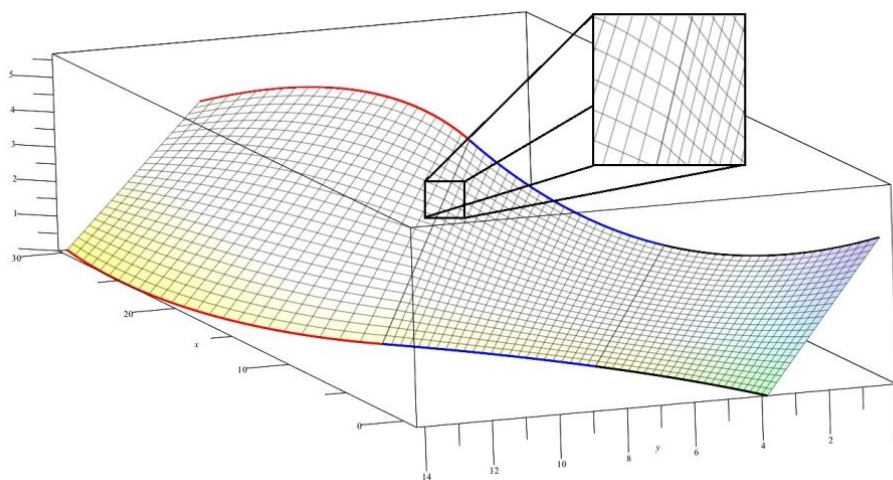


Рис. 3. Поверхность, образованная по сплайну Безье из сегментов второй степени и его циклографической проекции

Как видно из символьных вычислений, гладкость стыковки поверхностей определяется порядком гладкости стыковки циклографических проекций. Равенство вторых производных координаты  $z(t)$  определяется тем, что в отличие от координат  $x(t)$  и  $y(t)$ , в уравнениях циклографической проекции (и измененной циклографической проекции) отсутствуют производные  $z(t)$ .

Дальнейшая проверка на сплайнах Безье из сегментов второй, четвертой и пятой степени подтвердила предположение о том, что порядок гладкости стыковки отсеков поверхностей не может быть выше порядка гладкости стыковки циклографических проекций, образованных от исходного пространственного сплайна Безье.

### Результаты экспериментов

Рассмотрим пример. Пусть заданы узлы интерполяции кривой:  $Q_0 = (0; 0; 15)$ ,  $Q_1 = (70; 10; 13)$ ,  $Q_2 = (140; -5; 15)$ ;  $Q_3 = (200; 5; 12)$ . Требуется построить пространственную ось дороги, в виде сплайна Безье из сегментов третьей степени и поверхностные формы дорожного полотна проезжей части. В примере для уравнений бровки проезжей части выбрана измененная циклографическая проекция.

Решая систему уравнений (6) из условия равенства вторых производных между сегментами, и определяя управляющие точки с последующей подстановкой их координат в уравнения сегмента сплайна Безье третьей степени (5), получаем:

$$\begin{aligned}x_{S_1^3}(t) &= 69,3t(1-t)^2 + 138,7t^2(1-t) + 70t^3; \\y_{S_1^3}(t) &= 18,3t(1-t)^2 + 36,7t^2(1-t) + 10t^3; \\z_{S_1^3}(t) &= 15(1-t)^3 + 41,6t(1-t)^2 + 38,2t^2(1-t) + 13t^3; \\x_{S_2^3}(t) &= 70(1-t)^3 + 281,3t(1-t)^2 + 354,7t^2(1-t) + 140t^3; \\y_{S_2^3}(t) &= 10(1-t)^3 + 23,3t(1-t)^2 - 8,3t^2(1-t) - 5t^3; \\z_{S_2^3}(t) &= 13(1-t)^3 + 39,8t(1-t)^2 + 44,8t^2(1-t) + 15t^3; \\x_{S_3^3}(t) &= 140(1-t)^3 + 485,3t(1-t)^2 + 542,7t^2(1-t) + 200t^3; \\y_{S_3^3}(t) &= -5(1-t)^3 - 21,7t(1-t)^2 - 3,3t^2(1-t) + 5t^3; \\z_{S_3^3}(t) &= 15(1-t)^3 + 24,2t(1-t)^2 + 40,6t^2(1-t) + 12t^3.\end{aligned}$$

Подставим уравнения полученных сегментов в уравнения измененной циклографической проекции (4), при этом примем (для наглядности отображения) значение полуугла при вершине проецирующего конуса циклографического отображения  $\beta = 1,5$  рад, а значение ширины проезжей части  $h = 10$ . Уравнения измененной циклографической проекции на примере одной из бровок дорожного полотна будут иметь вид:

$$\begin{aligned}x_{\beta_1, S_1^3} &= \frac{3(23,1t \cdot M + 0,2t^3 \cdot M - 183,3 - 1 \cdot 10^{-7}t + 250t^2)}{M}; \\y_{\beta_1, S_1^3} &= -\frac{3(-6,11t \cdot M - 3,3 \cdot 10^{-9}t^2 \cdot M + 2,8t^3 \cdot M - 693,3 - 20t^2)}{M}; \\z_{\beta_1, S_1^3} &= \frac{0,07 \cdot N \cdot (14,1\sqrt{(N)^2} - 10)}{\sqrt{(N)^2}};\end{aligned}$$

где  $M = \sqrt{5661t^4 - 5754t^2 + 46289}$ ,  $N = 15(1-t)^3 + 41,6t(1-t)^2 + 38,2t^2(1-t) + 13t^3$ .

$$\begin{aligned}x_{\beta_1, S_2^3} &= \frac{-1,5(-46,7 \cdot M - 47,6t \cdot M - 1,3t^2 \cdot M + 2,2t^3 \cdot M - 66,7 - 500t + 500t^2)}{M}; \\y_{\beta_1, S_2^3} &= \frac{(1,5(6,7 \cdot M - 4,4t \cdot M - 16,7t^2 \cdot M + 11,1t^3 \cdot M + 713,3 + 40t - 100t^2))}{M}; \\z_{\beta_1, S_2^3} &= \frac{0,07 \cdot N \cdot (14,1\sqrt{(N)^2} - 10)}{\sqrt{(N)^2}},\end{aligned}$$

где  $M = \sqrt{5850t^4 - 11430t^3 + 951t^2 + 2784t + 11549}$ ,  $N = 13(1-t)^3 + 39,8t(1-t)^2 + 44,8t^2(1-t) + 15t^3$ .

$$x_{\beta_1, S_3^3} = \frac{(3(46,7 \cdot M + 21,8t \cdot M - 2,7t^2 \cdot M + 0,9t^3 \cdot M + 66,7 - 500t + 250t^2))}{M};$$

$$y_{\beta_1, S_3^3} = -\frac{(3(1,7 \cdot M + 2,2t \cdot M - 8,3t^2 \cdot M + 2,8t^3 \cdot M - 653,3 + 160t - 80t^2))}{M};$$

$$z_{\beta_1, S_3^3} = \frac{0,07 \cdot N \cdot (14,1\sqrt{(N)^2} - 10)}{\sqrt{(N)^2}},$$

где  $M = \sqrt{6201t^4 - 24804t^3 + 37212t^2 - 24816t + 38816}$ ,  $N = 15(1-t)^3 + 45,2t(1-t)^2 + 40,6t^2(1-t) + 12t^3$ .

Выполним проверку на равенства первых и вторых производных полученных уравнений бровок в точках стыковки:

– между  $S_1^3(t)$  и  $S_2^3(t)$ :

$$x'_{\beta_1, S_1^2}(t=1) = 78,2 = x'_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = 78,2; \quad x''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) = 8,8 \neq x''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = -11,7;$$

$$y'_{\beta_1, S_1^2}(t=1) = -7,3 = y'_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = -7,3; \quad y''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) = -55,2 \neq y''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = -53,3;$$

$$z'_{\beta_1, S_1^2}(t=1) = 0,8 = z'_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = 0,8; \quad z''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) = 8,4 = z''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = 8,4;$$

– между  $S_2^3(t)$  и  $S_3^3(t)$ :

$$x'_{\beta_1, S_2^2}(t=1) = 58 = x'_{\beta_1, S_3^2}(t=0) = 58; \quad x''_{\beta_1, S_2^2}(t=1) = -36 \neq x''_{\beta_1, S_3^2}(t=0) = -13,9;$$

$$y'_{\beta_1, S_2^2}(t=1) = -5,9 = y'_{\beta_1, S_3^2}(t=0) = -5,9; \quad y''_{\beta_1, S_2^2}(t=1) = 46,6 \neq y''_{\beta_1, S_3^2}(t=0) = 44,4;$$

$$z'_{\beta_1, S_2^2}(t=1) = 0,2 = z'_{\beta_1, S_3^2}(t=0) = 0,2; \quad z''_{\beta_1, S_2^2}(t=1) = -9,6 = z''_{\beta_1, S_3^2}(t=0) = -9,6.$$

Очевидно, что выдвинутое предположение о понижении порядка гладкости на циклографических проекциях выполняется. Для рассматриваемого примера по уравнениям (3) были получены уравнения поверхностей, представленные на рис. 4.

Частные производные из уравнений поверхностей в рассматриваемом примере также были проверены в системе компьютерной алгебры. Результаты проверки показали равенство лишь первых частных производных по параметру  $t$ . В качестве подтверждения приведены результаты вычислений производных между первым и вторым отсеками стыкуемых поверхностей:

$$(X_1)'(t=1) = 71,3 + 6,9l = (X_2)'(t=0) = 71,3 + 6,9l;$$

$$(Y_1)'(t=1) = -6,7 - 0,64l = (Y_2)'(t=0) = -6,7 - 0,64l;$$

$$(Z_1)'(t=1) = 0,8 + 0,7 \cdot 10^{-10}l = (Z_2)'(t=0) = 0,8 + 0,7 \cdot 10^{-10}l;$$

$$(X_1)''(t=1) = 4 + 4,8l \neq (X_2)''(t=0) = 4 - 15,7l;$$

$$(Y_1)''(t=1) = -50 - 5,22l \neq (Y_2)''(t=0) = -50 - 3,31l;$$

$$(Z_1)''(t=1) = 8,4 = (Z_2)''(t=0) = 8,4.$$

Рассмотрим еще пример, где по тем же исходным данным был составлен сплайн из сегментов Безье пятой степени, в котором сегменты состыкованы между собой по четвертому порядку гладкости. Полученные уравнения сегментов сплайна выглядят следующим образом:

$$x_{S_1^5}(t) = 68,1t(1-t)^4 + 274,5t^2(1-t)^3 + 414,8t^3(1-t)^2 + 278,6t^4(1-t) + 70t^5;$$

$$y_{S_1^5}(t) = 32t(1-t)^4 + 105,2t^2(1-t)^3 + 123,6t^3(1-t)^2 + 29,7t^4(1-t) + 10t^5;$$

$$z_{S_1^5}(t) = 15(1-t)^5 + 69,3t(1-t)^4 + 131t^2(1-t)^3 + 127,3t^3(1-t)^2 + 63,7t^4(1-t) + 13t^5;$$

$$x_{S_2^5}(t) = 70(1-t)^5 + 421,4t(1-t)^4 + 986,3t^2(1-t)^3 + 1129t^3(1-t)^2 + 633,6t^4(1-t) + 140t^5;$$

$$y_{S_2^5}(t) = 10(1-t)^5 + 40,3t(1-t)^4 + 46t^2(1-t)^3 + 3,9t^3(1-t)^2 - 15,3t^4(1-t) - 5t^5;$$

$$z_{S_2^5}(t) = 13(1-t)^5 + 66,3t(1-t)^4 + 137,7t^2(1-t)^3 + 143,9t^3(1-t)^2 + 74,2t^4(1-t) + 15t^5;$$

$$x_{S_3^5}(t) = 140(1-t)^5 + 766,4t(1-t)^4 + 1660t^2(1-t)^3 + 1780,5t^3(1-t)^2 + 947t^4(1-t) + 200t^5;$$

$$y_{S_3^5}(t) = -5(1-t)^5 - 34,7t(1-t)^4 - 73,6t^2(1-t)^3 - 55t^3(1-t)^2 - 6,97t^4(1-t) + 5t^5;$$

$$z_{c,5}(t) = 15(1-t)^5 + 75,8t(1-t)^4 + 150t^2(1-t)^3 + 144,5t^3(1-t)^2 + 67,2t^4(1-t) + 12t^5.$$

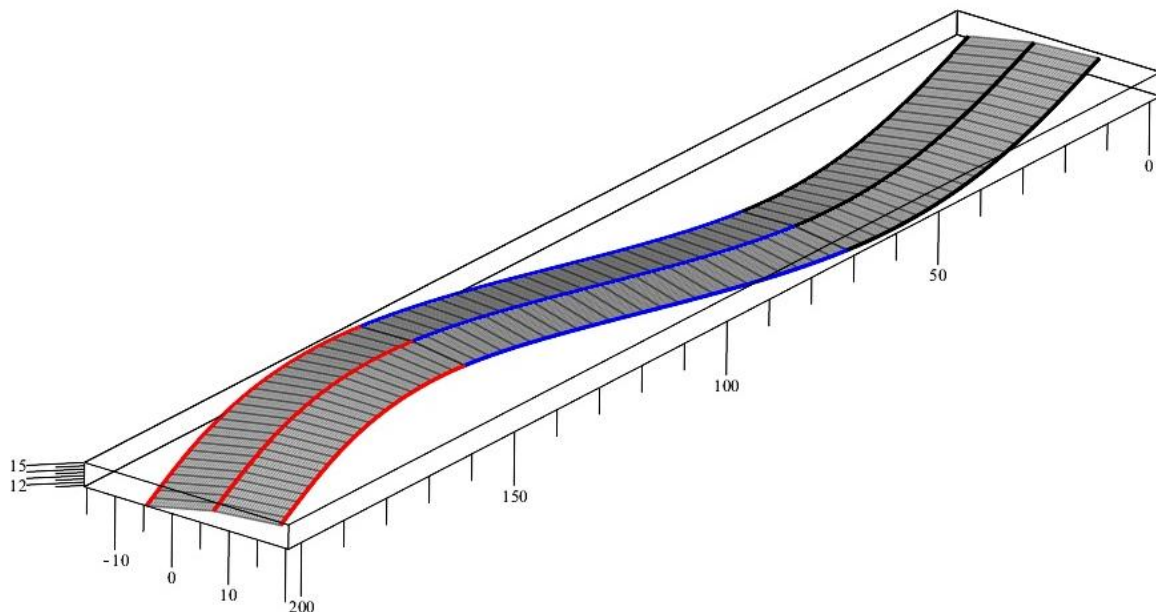


Рис. 4. Поверхность, образованная на основе сплайна Безье из сегментов третьей степени и его циклографической проекции

Получив аналогично предыдущему примеру уравнения бровки проезжей части, приравняем их производные в точке стыка между первым и вторым сегментами:

$$\begin{aligned} x'_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= 75,5 = x'_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = 75,5; \\ y'_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= -10 = y'_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = -10; \\ z'_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= 1,3 = z'_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = 1,3; \\ x''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= -5,7 = x''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = -5,7; \\ y''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= -31,1 = y''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = -31,1; \\ z''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= 4,95 = z''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = 4,95; \\ x'''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= -18,1 = x'''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = -18,1; \\ y'''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= 55 = y'''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = 55; \\ z'''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= -8,2 = z'''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = -8,2; \\ x''''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= -8,5 \neq x''''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = 27,6; \\ y''''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= 92,4 \neq y''''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = 87,5; \\ z''''_{\beta_1, S_1^2}(t=1) &= -16,4 = z''''_{\beta_1, S_2^2}(t=0) = -16,4. \end{aligned}$$

Очевидно, что и в этом случае понижение степени гладкости на единицу на циклографических проекциях сохраняется и на сплайне Безье из сегментов Безье пятой степени.

#### Обсуждение результатов

Результаты численных экспериментов подтвердили теоретические выводы о том, что порядок гладкости циклографических проекций сегментов сплайна Безье, состоящего из сегментов

Безье, а также других полиномиальных сплайнов, второй и выше степени, понижается на единицу. В проектировании поверхностей дорожного полотна в научной литературе рекомендуется отсеки поверхностей дорожного полотна стыковать по порядку гладкости не ниже второго [5]. При создании поверхностных форм методом циклографического отображения это условие выполняется на сплайнах Безье из сегментов четвертой степени и выше. При интерполяции сплайнами четных степеней имеется ряд недостатков, например, всегда остается неопределенная производная на одном из концов сплайна. Поэтому наиболее предпочтительным в выборе для проектирования поверхностных форм автомобильных дорог является сплайн Безье из сегментов Безье пятой степени.

#### Заключение

В работе рассмотрен вопрос о гладкости стыковки сегментов циклографической проекции оси дороги при создании поверхностных форм автомобильных дорог с помощью метода циклографического отображения. Проведенные как символичные, так и численные расчеты показали, что при задании оси дороги полиномиальными сплайнами Безье из сегментов  $n$ -степени, порядок гладкости стыковки сегментов циклографических проекций на единицу ниже порядка гладкости стыковки сегментов исходного пространственного сплайна. Порядок гладкости отсеков поверхностей, получаемых от заданной оси дороги, не может быть выше порядка гладкости стыковки циклографических проекций. Полученные результаты определяют выбор степени сегментов сплайна Безье и порядок гладкости их стыковки, которые впослед-



ствии определяют порядок гладкости стыкуемых кромок и поверхностей проезжей части.

### Литература

1. Кузьмин, В.И. Автоматизированное конструирование виражей безопасных конструкций на закруглениях автомобильных дорог / В.И. Кузьмин, А.И. Левтеров // *Вестн. Харьк. нац. автомоб.-дор. ун-та.* – 2009. – Вып. 47. – С. 29–33.
2. Бойков, В.Н. Автоматизированное проектирование автомобильных дорог (на примере IndorCAD/Road) / В.Н. Бойков, Г.А. Федотов, В.И. Пуркин. – М.: Изд-во МАДИ, 2005. – 224 с.
3. Пуркин, В.И. Основы автоматизированного проектирования автомобильных дорог / В.И. Пуркин. – М.: МАДИ, 2000. – 141 с.
4. Федотов, В.А. Теоретические, экспериментальные и практические основы автоматизированного проектирования развязок движения на пересечениях автомобильных дорог в разных уровнях: дис. ... канд. техн. наук / В.А. Федотов. – М., 1979. – 292 с.
5. Сальков, Н.А. Моделирование автомобильных дорог / Н.А. Сальков. – М.: ИНФРА-М, 2012. – 120 с. – (Научная мысль).
6. Сальков, Н.А. Математическое моделирование линейных и поверхностных форм автомобильных дорог на подходах к мостам / Н.А. Сальков // *Труды МАДИ: Прикладные теоретические вопросы проектирования переходов через водотоки.* – М., 1989. – С. 60–66.
7. Муфтеев, В.Г. Геометрическое моделирование кривых линий и поверхностей высокого качества / В.Г. Муфтеев, А.Р. Марданов // *Прикладная геометрия. Applied Geometry [Электронный ресурс]: науч. журн. / Моск. авиационный ин-т (гос. техн. университет) «МАИ».* – 2007. – № 19. – Вып. 9. – С. 25–74.
8. Panchuk, K.L. Cyclographic Modeling of Surface Forms of Highways / K.L. Panchuk, A.S. Niteyskiy, E.V. Lyubchinov // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering.* – 2017. – Vol. 262. – 012108. DOI: 10.1088/1757-899X/262/1/012108.
9. Любчинов, Е.В. Геометрическое моделирование поверхностных форм отгона виража автомобильной дороги на основе циклографического отображения / Е.В. Любчинов, К.Л. Панчук // *Вестник ЮУрГУ. Сер. «Строительство и архитектура».* – 2019. – Т. 19, № 1. – С. 68–77.
10. Любчинов, Е.В. Циклографическое моделирование поверхностных форм автомобильных дорог на виражном участке / Е.В. Любчинов // *Прикладная математика и фундаментальная информатика.* – 2019. – Т. 5, № 4. – С. 50–60.
11. Панчук, К.Л. Циклографическая начертательная геометрия: монография / К.Л. Панчук, Н.В. Кайгородцева. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2017. – 232 с.
12. Pottmann, H. *Computational Line Geometry* / H. Pottmann, J. Wallner. – Berlin. Heidelberg: Springer Verlag, 2001. – 565 p.
13. Pottmann, H. *Applications of Laguerre geometry in CAGD* / H. Pottmann, M. Peternell // *Comput. Aided Geom. Design.* – 1998. – № 15. – P. 165–186.
14. Cho, H.C. *Clifford algebra, Lorentzian geometry, and rational parametrization of canal surfaces* / H.C. Cho, H.I. Choi, S-H. Kwon et al. // *Computer Aided Geometric Design.* Elsevier B.V. – 2004. – Vol. 21. – P. 327–339.
15. Farin, G. *Class A Bézier curves* / G. Farin // *Comp.-Aided Des.* – 2006. – № 23. – P. 573–581.
16. Farin, G. *Curves and surfaces for CAGD* / G. Farin. – San Diego: Academic Press, 2002. – 499 p.
17. Rogers, D.F. *Mathematical Elements for computer graphics* / D.F. Rogers. – New York: McGraw-Hill Publishing Company, 1990. – 604 p.
18. Голованов, Н.Н. Геометрическое моделирование / Н.Н. Голованов. – М.: Физматлит, 2002. – 472 с.
19. Борисенко, В.В. Построение оптимального сплайна Безье / В.В. Борисенко // *Фундаментальная и прикладная математика.* – 2016. – Т. 21, № 3. – С. 57–72.
20. СНиП 2.05.02-85. Автомобильные дороги. – Введ. 1987-01-01. – Госстрой СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1986. – 56 с.
21. Федотов, Г.А. Изыскания и проектирование автомобильных дорог / Г.А. Федотов, П.И. Поспелов. – М.: Высш. шк., 2009.
22. Елугачев, П.А. *Пространственное трассирование автомобильных дорог кривыми Безье: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 05.23.11* / Елугачев Павел Александрович. – М., 2007. – 18 с.
23. Атанасян, Л.С. *Геометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч.* / Л.С. Атанасян, В.Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1987. – Ч. 2. – 352 с.

**Любчинов Евгений Владимирович**, аспирант, кафедра «Инженерная геометрия и САПР», Омский государственный технический университет (Омск), lubchinov.E.V@yandex.ru

**Панчук Константин Леонидович**, доктор технических наук, профессор кафедры «Инженерная геометрия и САПР», Омский государственный технический университет (Омск), panchuk\_kl@mail.ru

Поступила в редакцию 29 октября 2019 г.

## ON THE SMOOTHNESS OF COMPOUND OF THE LINES AND SURFACES IN CYCLOGRAPHIC MODELING OF SURFACE FORMS OF ROADS

E.V. Lyubchinov, [Lubchinov.E.V@yandex.ru](mailto:Lubchinov.E.V@yandex.ru)

K.L. Panchuk, [panchuk\\_kl@mail.ru](mailto:panchuk_kl@mail.ru)

Omsk State Technical University, Omsk, Russian Federation

The automated road design systems allowed us to substitute the two-stage design of the axis of the road (in plan and profile) with the spatial curve in the form of parametric splines or Bezier curves. However, the smoothness of compound, both segments of curves and compartments of the road surfaces, is still an open matter.

The authors continue to develop the method of surface forms construction for automobile roads based on cyclographic mapping. The possible options for surface forms construction are presented; their advantages and disadvantages are shown. The matters of smoothness of compound of segments of the curves during the shaping of the road and the carriageway edge axis, as well as the shaping of the compartments of the surfaces of the carriageway formed on these segments are considered. Symbolic and numerical calculations are made, which show the direct correlation between the smoothness order of the compound of the road axis segments, presented in the form of a polynomial spline, the edges of the carriageway and surface compartments.

At the stage of designing the automobile road axis and subsequent construction of its surface forms, the results of the work allow to preselect the smoothness order of the compound of segments of the lines and compartments of the road surfaces, which can be used in the development of CAD systems for roads.

*Keywords: automobile road, geometric modelling, cyclographic mapping, line segments, surface compartments, smoothness of compound.*

### References

1. Kuz'min, V.I., Levterov A.I. [Automated Construction of Cornering Safety Structures on the Rounding of Roads]. *Vestnik Khar'k. nats. avtomob.-dor. un-t* [Bulletin of the Kharkiv National Automobile and Road University]. Khar'kov, 2009, iss. 47, pp. 29–33 (in Russ.).
2. Boykov V.N., Fedotov G.A., Purkin V.I. *Avtomatizirovannoye proyektirovaniye avtomobil'nykh dorog (na primere IndorCAD/Road)* [Automated Road Design (Using the Example of IndorCAD / Road)]. Moscow, 2005. 224 p.
3. Purkin V.I. *Osnovy avtomatizirovannogo proyektirovaniya avtomobil'nykh dorog* [Fundamentals of Computer Aided Road Design]. Moscow, MADI Publ., 2000. 141 p.
4. Fedotov V.A. *Teoreticheskiye, eksperimental'nyye i prakticheskiye osnovy avtomatizirovannogo proyektirovaniya razvyazok dvizheniya na peresecheniyakh avtomobil'nykh dorog v raznykh urovnyakh. Dis. kand. tekhn. nauk* [Theoretical, Experimental and Practical Bases of Computer-Aided Design of Traffic Interchanges at the Intersections of Highways in Different Levels. Cand. sci. diss.]. Moscow, 1979. 292 p.
5. Sal'kov N.A. *Modelirovaniye avtomobil'nykh dorog* [Modeling of Highways]. Moscow, INFRA-M Publ., 2012. 120 p.
6. Sal'kov N.A. [Mathematical Modeling of Linear and Surface Forms of Roads on the Approaches to Bridges] *Trudy MADI: Prikladnyye teoreticheskiye voprosy proyektirovaniya perekhodov cherez vodotoki* [MADI Proceedings: Applied Theoretical Issues for the Design of Crossings]. Moscow, 1989, pp. 60–66 (in Russ.).
7. Mufteyev V.G., Mardanov A.R. [Geometric Modeling of Curved Lines and Surfaces of High Quality]. *Prikladnaya geometriya*. [Applied Geometry]. Moscow, Mosk. Aviatsionnyy in-t Publ., 2007, no. 19, iss. 9, pp. 25–74 (in Russ.).
8. Panchuk K.L., Niteyskiy A.S., Lyubchinov E.V. [Cyclographic Modeling of Surface Forms of Highways]. *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*, 2017, no. 262, 012108. DOI: 10.1088/1757-899X/262/1/012108.
9. Lyubchinov E.V., Panchuk K.L. Geometric Simulation of Surface Forms of Superelevation Attainment of a Highway Based on Cyclographic Mapping. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 68–77 (in Russ.). DOI: 10.14529/build190109
10. Lyubchinov E.V. [Cyclographic Modeling of Surface Forms of Highways on a Bend]. *Prikladnaya matematika i fundamental'naya informatika* [Applied Mathematics and Fundamental Computer Science], 2019, vol. 5, no. 4, pp. 50–60 (in Russ.).

11. Panchuk K.L., Kaygorodtseva N.V. *Tsiklograficheskaya nachertatel'naya geometriya: monografiya* [Cyclographic Descriptive Geometry]. Omsk, Izd-vo OmGTU Publ., 2017. 232 p.
12. Pottmann H., Wallner J. *Computational Line Geometry*. Berlin. Heidelberg, Springer Verlag Publ., 2001. 565 p.
13. Pottmann H., Peternell M. Applications of Laguerre Geometry in CAGD. *Comput. Aided Geom. Design.*, 1998 no. 15, pp. 165–186.
14. Cho H. C., Choi H.I., Kwon S-H, Lee D.S., Wee N-S. *Clifford Algebra, Lorentzian Geometry, and Rational Parametrization of Canal Surfaces*, 2004, vol. 21, pp. 327–339.
15. Farin G. Class A Bézier Curves, *Comp.-Aided Des.*, 2006, no. 23, pp. 573–581.
16. Farin G. *Curves and Surfaces for CAGD*. San Diego, Academic Press Publ., 2002. 499 p.
17. Rogers D.F. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. New York, McGraw-Hill Publishing Company, 1990. 604 p.
18. Golovanov N.N. *Geometricheskoye modelirovaniye* [Geometric Modeling]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002. 472 p.
19. Borisenko V.V. [The construction of the Optimal Bezier Spline]. *Fundamental'naya i prikladnaya matematika* [Fundamental and Applied Mathematics], 2016, vol. 21, no. 3, pp. 57–72 (in Russ.).
20. *SNiP 2.05.02-85. Avtomobil'nyye dorogi* [Car Roads]. Moscow, TSITP Gosstroya SSSR Publ., 1986. 56 p.
21. Fedotov G.A., Pospelov P.I. *Izyskaniya i proyektirovaniye avtomobil'nykh dorog* [Research and Design of Roads]. Moscow, High school Publ., 2009.
22. Elugachev P.A. *Prostranstvennoye trassirovaniye avtomobil'nykh dorog krivymi Bez'ye. Avtoref. kand. diss.* [Spatial Tracing of Roads by Bezier Curves. Abstract of Cand. Diss.]. Moscow, 2007. 18 p.
23. Atanasyan L.S., Bazylev V.T. *Geometriya. Ch. 2.* [Geometry. Part 2]. Moscow, Prosveshcheniye Publ., 1987. 352 p.

*Received 29 October 2019*

---

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Любчинов, Е.В. О гладкости стыковки линий и поверхностей при циклографическом моделировании поверхностных форм автомобильных дорог / Е.В. Любчинов, К.Л. Панчук // Вестник ЮУрГУ. Серия «Строительство и архитектура». – 2020. – Т. 20, № 1. – С. 52–62. DOI: 10.14529/build200106

### FOR CITATION

Lyubchinov E.V., Panchuk K.L. On The Smoothness of Compound of the Lines and Surfaces in Cyclographic Modeling of Surface Forms of Roads. *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Construction Engineering and Architecture*. 2020, vol. 20, no. 1, pp. 52–62. (in Russ.). DOI: 10.14529/build200106

---