УДК 519.64, 517.922 **DOI: 10.14529/cmse210301**

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ

© 2021 Е.В. Чистякова[1], Л.С. Соловарова[1], Доан Тай Сон[2]

[1]*Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН (664033 Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134)*

[2]*Институт математики Вьетнамской академии наук и технологий (10307 Вьетнам, Ханой, ул. Хоанг куок вьет роуд, д. 18)*

E-mail: elena.chistyakova@icc.ru, soleilu@mail.ru, dtson@math.ac.vn

Поступила в редакцию: 02.03.2021

Формулировки многих прикладных задач часто включают в себя дифференциальные уравнения и интегральные уравнения Вольтерра первого и второго рода. Комбинируя такие уравнения, мы получаем систему интегро-дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей перед главной частью. Такие системы называются вырожденными интегро-дифференциальными уравнениями. Если они не содержат интегральную составляющую, то их называют дифференциально-алгебраическими уравнениями. Если отсутствует слагаемое с производной, то их принято называть интегро-алгебраическими уравнениями. К подобным математическим формулировкам приводит моделирование процессов, протекающих в электрических и гидравлических цепях, различных динамических системах, в частности, многотельных. Поэтому качественное исследование и численное решение такого рода задач являются достаточно актуальными, а результаты исследований — востребованными на практике. В данной статье на основе теории матричных пучков, а также с использованием схем исследований, разработанных для дифференциально-алгебраических и интегро-алгебраических уравнений, проанализированы условия существования и единственности решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений со слабой особенностью в ядре и предложен численный метод их решения, который был реализован в пакете прикладных программ MATLAB и протестирован на модельных примерах.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, интегро-дифференциальные уравнения, уравнение Абеля, слабая особенность.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Чистякова Е.В., Соловарова Л.С., Доан Тай Сон. Об одном методе численного решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений со слабой особенностью в ядре // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2021. Т. 10, № 3. С. 5–15. DOI: 10.14529/cmse210301.

Введение

Формулировки многих прикладных задач могут включать в себя дифференциальные уравнения и интегральные уравнения Вольтерра первого и второго рода, а также алгебраические связи. Комбинируя такие уравнения, мы получаем систему интегро-дифференциальных уравнений (ИДУ) с вырожденной матрицей перед главной частью. Такие системы называются вырожденными интегро-дифференциальными уравнениями. Если они не содержат интегральную составляющую, то их называют дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). Если отсутствует слагаемое с производной, то их принято называть интегро-алгебраическими уравнениями (ИАУ), и такие задачи были впервые исследованы в работах [1, 2]. И тот, и другой класс задач достаточно хорошо изучен. В частности, к настоящему времени уже опубликованы сотни статей и десятки монографий, посвященных анализу и численному решению ДАУ (см., например, [3] и приводимую там библиографию). Изучение ИАУ началось несколько позже, чем ДАУ. Впервые их качественные свойства и связь с ДАУ были исследованы в работе [2]. Современное состояние данной тематики частично отражено в работах [4–6]. Среди последних публикаций, посвященных ИАУ со слабой особенностью можно отметить [7, 8]. Однако перенос методов и теории, разработанных для ДАУ и ИАУ на вырожденные системы ИДУ не всегда успешен, поэтому их принято выделять в самостоятельный объект исследования, который к настоящему времени изучен недостаточно, что частично подтверждается списком литературы из недавно опубликованной работы [9], содержащей довольно полный обзор по вырожденным системам ИДУ. Основным принципом исследования таких систем является их расщепление на подсистемы ИДУ и уравнений Вольтерра I и II рода с последующим применением кусочно-полиномиальных методов коллокации. Самым малоизученным классом в данном спектре задач остаются вырожденные системы ИДУ типа Вольтерра со слабой особенностью в ядре, которым и посвящена данная работа. К настоящему моменту сделана только одна публикация по этой тематике [10], которая не содержит численного метода решения.

Системы вырожденных ИДУ имеют важное прикладное значение. Они довольно часто возникают при математическом моделировании различных физических и технических процессов. Примеры моделирования различных динамических систем с помощью вырожденных систем ИДУ могут быть найдены в [11], в частности, к ним могут быть сведены математические модели процессов, протекающих в электрических и гидравлических цепях [12–14]. Вырожденные системы ИДУ даже оказываются полезными при моделировании расположения тазобедренного сустава пассажира, сидящего в кресле автомобиля [15] и во многих других случаях, где необходимо моделирование динамики многотельных систем.

Статья организована следующим образом: во введении описаны задачи, приводящие к появлению интегро-дифференциальных уравнений и приводится обзор литературы по данной тематике. В разделе 1 описывается постановка задачи, раздел 2 посвящен условиям существования единственного решения и содержит необходимые дополнительные сведения. В разделе 4 рассматривается численный метод и анализируется его работа на модельных примерах. В заключении содержится краткая сводка результатов, полученных в работе, с указанием направления дальнейших исследований.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) + \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} K(t,s)x(s)ds = f(t),\ t \in [0,1] = T,\ 0 < \alpha < 1, \tag{1}$$

с начальными данными

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $A(t), B(t), K(t,s)$ — $(n \times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ — заданная и искомая n-мерные вектор-функции, x_0 — заданный вектор из $\mathbb{R}^n$. Предполагается, что все входные данные достаточно гладкие в своих областях определения, и, кроме того,

$$\det A(t) = 0\ \forall t \in T. \tag{3}$$

Такие системы мы называем вырожденными интегро-дифференциальными уравнениями, а под решением начальной задачи (1), (2) будем понимать любую вектор-функцию $x(t)$, которая обращает (1) в тождество и удовлетворяет условию (2). Рассматриваемый класс задач существенно отличается от систем с невырожденной матрицей перед производной искомой вектор-функции. В классической теории, если определитель $\det A(t)$ обращается в ноль в изолированных точках отрезка T, то такие точки называются особыми, т.к. решение в них может не существовать или же они являются точками ветвления решений. Однако, если матрица $A(t)$ вырождена на всем отрезке определения, то в этой области решение может оставаться единственным, а может и не существовать.

2. Существование решения

Приведем ряд известных определений и утверждений.

Определение 1. [22] Пучок постоянных матриц $\lambda A + B,\ \lambda \in \mathbb{C}$ называется регулярным, если существует такое λ, что $\det(\lambda A + B) \neq 0$.

Лемма 1. [22] Пусть пучок постоянных матриц $\lambda A + B$ регулярен. Тогда существуют невырожденные $(n \times n)$-матрицы P и Q с постоянными элементами такие, что

$$P(\lambda A + B)Q = \lambda \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & E_k \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $m + l + k = n,\ N, M$ — нильпотентные матрицы размерностей $(k \times k)$ и $(l \times l)$ соответственно, $N^{k_1} = 0$, $M^{l_1} = 0$, $k_1 \leq k$, $l_1 \leq l$.

Определение 2. [19] Выражение $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t),\ t \in T$, где $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — переменные $(n \times n)$-матрицы, а λ, μ — скалярные параметры, будем называть матричным полиномом.

Определение 3. [19] Говорят, что матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет на отрезке T простую структуру, если выполнены следующие условия:

1) все элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ принадлежат C_T^m;
2) $\text{rank}A(t) = k = const\ \forall t \in T$;
3) $\text{rank}(A(t)|B(t)) = k + l = const$;
4) $\det[\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)] = a_0(t)\lambda^k \mu^l + \cdots$, где $a_0(t) \neq 0\ \forall t \in T$.

Лемма 2. [19] Пусть матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет на отрезке T простую структуру. Тогда существуют невырожденные для всех $t \in T$ матрицы $R(t)$ и $S(t)$ с элементами из C_T^m такие, что

$$R(t)(\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t))S(t) =$$
$$= \lambda \begin{pmatrix} E_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} J_1(t) & 0 & J_2(t) \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(t) & C_2(t) & 0 \\ C_3(t) & C_4(t) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-k-l} \end{pmatrix},\ t \in T, \tag{5}$$

где $J_1(t),\ J_2(t),\ C_1(t),\ C_2(t),\ C_3(t),\ C_4(t)$ — некоторые блоки подходящей размерности.

Определение 4. [20, 21] Псевдообратной матрицей к $(m \times n)$-матрице $A(t)$, $t \in T$, называется $(n \times m)$-матрица $A^+(t)$, удовлетворяющая для любых $t \in T$ уравнениям:

$$A(t)A^+(t)A(t) = A(t), \qquad A^+(t)A(t)A^+(t) = A(t),$$

$$(A(t)A^+(t))^\top = A(t)A^+(t), \qquad (A^+(t)A(t))^\top = A^+(t)A(t)$$

Прежде, чем мы сформулируем теорему существования для начальной задачи (1), (2), введем следующие обозначения:

$$\mathcal{B}(t) = (E - A(t)A^+(t))B(t), \qquad \mathcal{K}(t,s) = (E - A(t)A^+(t))K(t,s),$$

$$\zeta(t) = (E - A(t)A^+(t))f(t), \qquad \chi(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}(E - \mathcal{B}(s)\mathcal{B}^+(s))\zeta(s)ds.$$

Теорема 1. [10] Пусть задача (1), (2) удовлетворяет условиям:

1) функции $A(t), B(t), K(t,s)$, $f(t)$ дважды непрерывно-дифференцируемы на отрезке T;
2) $(E - A(0)A^+(0))B(0)x_0 = (E - A(0)A^+(0))\zeta(0)$;
3) $\pi \sin \alpha\pi (E - \mathcal{B}(0)\mathcal{B}^+(0))\mathcal{K}(0,0)x_0 = (E - \mathcal{B}(0)\mathcal{B}^+(0))\chi(0)$;
4) матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + K(t,t)$ имеет на отрезке T простую структуру.

Тогда существует единственное непрерывно-дифференцируемое решение задачи (1), (2) на T.

Отметим, что третье условие теоремы обеспечивает совместность начальных данных (2) с правой частью системы (1). Таким образом, теоретически, теорема 1 обеспечивает возможность расщепления системы (1) с помощью серии невырожденных преобразований на три невырожденных подсистемы: систему ИДУ в нормальной форме, систему уравнений Вольтерра первого рода и системы уравнений Вольтерра первого рода. Практически это возможно сделать далеко не всегда. Рассмотрим случай, когда $A(t) \equiv 0$, и B, K — постоянные матрицы, т.е. система (1) имеет вид:

$$Bx(t) + \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} K x(s) ds = f(t). \tag{6}$$

Если пучок $\lambda B + K$ регулярен (см. определение 1), то решение системы (6) может быть получено в явной форме. Для этого умножим систему (6) справа на матрицу P и введем замену $x = Qy$, где P и Q — матрицы из леммы 1. Получим

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 \\ 0 & E_l & 0 \\ 0 & 0 & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \end{pmatrix} + \int\limits_0^t \begin{pmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & E_k \end{pmatrix} (t-s)^{-\alpha} \begin{pmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \\ y_3(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \phi_1(t) \\ \phi_2(t) \\ \phi_3(t) \end{pmatrix},$$

где $(y_1^\top(t), y_2^\top(t), y_3^\top(t))^\top = y(t)$, $(\phi_1^\top(t), \phi_2^\top(t), \phi_3^\top(t))^\top = Pf(t)$. Таким образом, исходная система разбилась на 3 подсистемы, для каждой из которых решение можно выписать в явном виде. Первая подсистема представляет собой систему интегральных уравнений Абеля второго рода и ее решение может быть найдено в терминах функции Миттаг-Леффлера [23]:

$$y_1(t) = \frac{d}{dt}\int\limits_0^t \mathcal{M}_{1-\alpha}[J\Gamma(\alpha)(t-s)^{1-\alpha}]\phi_1(s)ds. \tag{7}$$

Решение второй подсистемы легко найти, последовательно исключая неизвестные:

$$y_2(t) = \phi_2 - UM\phi_2 + U^2M^2\phi_2 + \cdots + (-1)^{l-1}U^{l_1-1}M^{l_1-1}\phi_2, \tag{8}$$

$$U\psi = \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}\psi(s)ds.$$

Решение третьей подсистемы определяется структурой решения уравнения Абеля первого рода [23]:

$$y_3(t) = WN^0\phi_3 - W^2N^1\phi_3 + \cdots + (-1)^kW^{k_1}N^{k_1-1}\phi_3, \tag{9}$$

$$W\psi = \frac{sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dt}\int\limits_0^t \frac{\psi(s)}{(t-s)^{1-\alpha}}ds.$$

Таким образом решение $x(t)$ может быть найдено как $x(t) = Qy(t)$, где $y(t)$ определяется по формулам (7), (8), (9).

Для иллюстрации приведем пример.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(s) = f(t). \tag{10}$$

Заменой $x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} y$ задача (10) сводится к системе

$$Ny + \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}y(s)ds = f(t),\ N^3 = 0,$$

решение которой находится последовательным применением оператора (7).

3. Численный метод

Для численного решения начальной задачи (1), (2) была предложена и реализована следующая разностная схема первого порядка:

$$A_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + hB_{i+1}x_{i+1} + h^2\sum_{j=1}^{i+1}\omega_{i+1,j}K_{i+1,j}x_j = hf_{i+1},\ i = 0,1,2,\ldots,\mathcal{N}, \tag{11}$$

где $\mathcal{N}$ — число узлов сетки, $h = 1/N$,

$$A_{i+1} = A(t_{i+1}),\ B_{i+1} = B(t_{i+1}),\ K_{i+1,j} = K(t_{i+1}, t_j),\ t_i = ih,$$

а веса $\omega_{i+1,j}$ находятся по формуле

$$\omega_{i+1,j} = \int\limits_{(j-1)h}^{jh} (t_{i+1} - s)^{-\alpha}ds = \frac{h^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left[(i-j+2)^{1-\alpha} - (i-j+1)^{1-\alpha}\right].$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

1) начиная с некоторого $h \le h_*$ система (11) имеет решение $\forall i \in \{0, \mathcal{N}\}$;
2) справедлива оценка

$$\max_{i=0,N} |x_i - x(t_i)| \le \kappa h^{\min(\alpha, 1-\alpha)}, \ \kappa = const > 0.$$

Доказательство. Перепишем равенство (11) в виде

$$\left(A_{i+1} + hB_{i+1} + h^2\omega_{i+1,i+1}K_{i+1,i+1}\right) x_{i+1} = A_i x_i + h^2 \sum_{j=1}^{i} \omega_{i+1,j} K_{i+1,j} x_j = hf_{i+1}. \qquad (12)$$

Согласно теореме 1, начиная с некоторого $h \le h_*$, матричный полином $A_{i+1} + hB_{i+1} + h^2\omega_{i+1,i+1}K_{i+1,i+1}$ имеет простую структуру и не обращается в нуль. Далее, перепишем систему (11) в виде

$$A_{i+1} \frac{x_{i+1} - x_i}{h} + B_{i+1}x_{i+1} + h \sum_{j=1}^{i+1} \omega_{i+1,j} K_{i+1,j} x_j = f_{i+1},$$

введем замену переменной $y_{i+1} = S_{i+1}x_{i+1}$ и умножим полученную систему на R_{i+1}, где $S_i = S(t_i)$, $R_i = R(t_i)$, а $R(t)$ и $S(t)$ — матрицы из леммы 2. Таким образом, мы расщепили (12) на три подсистемы разностных уравнений, соответствующих системе ИДУ в нормальной форме, системе уравнений Вольтерра второго рода и системе уравнений Вольтерра первого рода, для каждой из которых сходимость доказана в классической теории (см., например, [6]).

□

Численный метод (11) был реализован в пакете прикладных программ MATLAB. Для анализа работы метода были использованы специально построенные модельные примеры.

Пример 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \int_0^t (t-s)^{-1/3} \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(s)ds = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}t^{5/3} \\ t + \frac{9}{10}t^{8/3} \\ \frac{27}{40}t^{8/3} \end{pmatrix},$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in [0, 1].$$

Легко проверить, что данная начальная задача удовлетворяет теореме 1. Здесь точное решение известно и имеет вид $x(t) = (1, t, t^2)^\top$. Результаты расчета приведены в таблице:

Обозначения: Nset — число узлов сетки, err_j — максимальная погрешность по каждой компоненте $x_j(t)$, $j = 1, 2, 3$.

Таблица

Результаты расчета для примера 2

Nset	err_1	err_2	err_3
90	0.010	0.011	0.023
270	0.005	0.008	0.016
810	0.003	0.004	0.009
2430	0.001	0.002	0.005

Если условия теоремы 1 не выполнены, то метод (11) неустойчив либо принципиально не применим. Чтобы проиллюстрировать сложность и неоднозначность изучаемых задач, рассмотрим следующий пример.

Пример 3. Для нижеприведенной системы не выполняется условие простой структуры:

$$\begin{pmatrix}1 & t & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\dot{x}(t)+\begin{pmatrix}0 & d & 0\\ 1 & t & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}x(t)+\int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha}\begin{pmatrix}0 & 0 & t\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}x(s)ds=f(t), t\in[0,1], \qquad (13)$$

$$f(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t))^\top,\ x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))^\top.$$

При исследовании разрешимости системы (13) возникают следующие ситуации:

1) $d\neq 1$: решение существует и единственно $\forall f(t)\in C^2_{[0,1]}$;
2) $d=1$: система (13) разрешима тогда и только тогда, когда $f_1(t)-tf_3(t)-\dot{f}_2(t)=0$. При этом одну из компонент ($x_1(t)$ или $x_2(t)$) мы можем взять в виде произвольной вектор-функции из $C^1_{[0,1]}$.

В то же время, при применении для решения системы (13) разностной схемы (11) необходимо учесть следующее:

1) $|d|<1$: метод (11) неустойчив, т.к. справедлива оценка $x_{i+1}=\mathcal{O}\left(\frac{1}{d^i}\right)$;
2) $d=0$: решение системы (13) существует, но $\det\left(A_{i+1}+hB_{i+1}+h^2\omega_{i+1,i+1}K_{i+1,i+1}\right)=0\ \forall h$;
3) $d=1$: $\det\left(A_{i+1}+hB_{i+1}+h^2\omega_{i+1,i+1}K_{i+1,i+1}\right)\neq 0\ \forall h$, но система (13) может не иметь решения.

Заключение

В статье на основе теории матричных пучков и фактов из теории численного решения интегральных уравнений проанализированы условия существования и единственности решения вырожденных систем ИДУ со слабой особенностью в ядре. К подобным математическим формулировкам приводит моделирование процессов, протекающих в электрических и гидравлических цепях, различных динамических системах, в частности, многотельных. Поэтому исследование и численное решение такого рода задач является актуальным, а результаты исследований — востребованными на практике. В работе было показано, что в случае постоянных матриц решение вырожденной системы ИДУ можно выписать в явном виде в терминах функции Миттаг-Леффлера. Предложен численный метод решения таких уравнений, который был реализован в пакете прикладных программ MATLAB и протестирован на модельных примерах. Показано, что в случае нарушения условий теоремы существования данный метод неприменим. Следующим направлением исследований является качественный анализ ИДУ со слабой особенностью в ядре, в которое искомая функция входит нелинейно, а также изучение работоспособности численного метода на реальных задачах из приложений.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-51-54003.

Литература

1. Gear C.W. Differential algebraic equations, indices, and integral algebraic equations // SIAM Journal of Numerical Analysis. 1990. Vol. 27, no. 6. P. 1527–1534. DOI: 10.1137/0727089.
2. Чистяков В.Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. С. 231–239.
3. Lamour R., Marz R., Tischendorf C. Differential-algebraic equations: a projector based analysis. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. 649 p. DOI: 10.1007/978-3-642-27555-5.
4. Brunner H., van der Houwen P.J. The numerical solution of Volterra equations (CWI Monographs 3). Elsevier Science Ltd, 1986. 604 p.
5. Brunner H. Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. Cambridge University Press, 2004. 612 p. DOI: 10.1017/CBO9780511543234.
6. Brunner H. Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. Cambridge University Press, 2017. 402 p. DOI: 10.1017/9781316162491.
7. Liang H., Brunner H. On the convergence of collocation solutions in continuous piecewise polynomial spaces for weakly singular Volterra integral equations // SIAM Journal on Numerical Analysis. 2019. Vol. 57, no. 4. P. 1875–1896. DOI: 10.1007/s10543-016-0609-x.
8. Sajjadi S.A., Pishbin S. Convergence analysis of the product integration method for solving the fourth kind integral equations with weakly singular kernels // Numerical Algorithms. 2021. No. 86. P. 25–54. DOI: 10.1007/s11075-020-00877-x.
9. Liang H., Brunner H. Collocation methods for integro-differential algebraic equations with index 1 // IMA Journal of Numerical Analysis. 2020. No. 39. P. 850–885. DOI: 10.1093/imanum/drz01.
10. Bulatov M.V., Lima P.M., Weinmuller E.B. Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations // Central European Journal of Mathematics. 2014. Vol. 12. P. 308–321. DOI: 10.2478/s11533-013-0334-5.
11. Doležal V. Dynamics of Linear Systems. Prague: Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1967. 325 p.
12. Jiang Y.L., Wing O. Waveform relaxation of linear integral-differential equations of circuit simulation // IEEE Design Automation Conference. 1999. P. 61–64. DOI: 10.1109/aspdac.1999.759710.
13. Ушаков Е.И. Статическая устойчивость электрических систем. Новосибирск: Наука, 1988. 273 с.
14. Nassirharand A. A new technique for solving sets of coupled nonlinear algebraic and integro-differential equations encountered in hydraulics // International Journal of Contemporary Mathematical Sciences. 2008. Vol. 3, no. 33. P. 1611–1617.

15. Ippili R.K., Davies P., Bajaj A.K., Hagenmeyer L. Nonlinear multi-body dynamic modeling of seat–occupant system with polyurethane seat and H-point prediction // International Journal of Industrial Ergonomics. 2008. Vol. 38, no. 5. P. 368–383. DOI: 10.1016/j.ergon.2007.08.014.

16. Чистякова Е.В. О свойствах разностных схем для вырожденных интегродифференциальных уравнений индекса 1 // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. Т. 49, № 9. С. 1579–1588.

17. Булатов М.В., Чистякова Е.В. Об одном семействе вырожденных интегродифференциальных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1665–1673.

18. Банг Н.Д., Чистяков В.Ф., Чистякова Е.В. О некоторых свойствах вырожденных систем линейных интегро-дифференциальных уравнений. I // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2015. № 11. С. 13–27.

19. Булатов М.В., Ли М.-Г. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка // Дифференциальные уравнения. 2008. Т. 44, № 10. С. 1299–1306.

20. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 222 с.

21. Lancaster P. Theory of Matrices. Academic Press, 1985. 570 p.

22. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 577 с.

23. Краснов М.Л. Интегральные уравнения: введение в теорию. М.: Наука, 1975. 302 с.

Чистякова Елена Викторовна, к.ф.-м.н., н.с., Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН (Иркутск, Российская Федерация)

Соловарова Любовь Степановна, к.ф.-м.н., м.н.с., Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН (Иркутск, Российская Федерация)

Доан Тай Сон, д.ф.-м.н., доцент, Институт математики Вьетнамской академии наук и технологий (Ханой, Вьетнам)

DOI: 10.14529/cmse210301

A NUMERICAL METHOD FOR SOLVING SINGULAR INTEGRAL ALGEBRAIC EQUATIONS WITH WEAKLY SINGULAR KERNELS

© 2021 E.V. Chistyakova[1], L.S. Solovarova[1], Doan Thai Son[2]

[1]*Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS (str. Lermontova 134, Irkutsk, 664033 Russia),*

[2]*Institute of Mathematics of the Vietnam Academy of Science and Technology (str. Hoang Quoc Viet 18, Hanoi, 10307 Vietnam)*

E-mail: elena.chistyakova@icc.ru, soleilu@mail.ru, dtson@math.ac.vn

Received: 02.03.2021

Statements of many applied problems often include differential equations and Volterra integral equations of the first and second kind. By joining such equations together, we obtain a system of integral differential equations with a singular matrix multiplying the leading part. Such systems are commonly referred to as singular integral differential equations. If they do not contain an integral part, then they are called differential-algebraic equations. If there is no term with a derivative, then they are usually called integral algebraic equations. Such mathematical problem statements arise in simulation of processes occurring in electrical and hydraulic circuits, various dynamic systems, in particular, multibody systems. Therefore, qualitative study and numerical solution of such problems are quite relevant, and the results of research remain in demand in practice. In this paper, on the basis of the theory of matrix pencils, as well as using research schemes developed for differential algebraic and integral algebraic equations, the conditions for the existence and uniqueness of the solution of singular integral-differential equations with a weakly singular kernels are analyzed and a numerical method for their solution is proposed. The method was coded in MATLAB and tested on model examples.

Keywords: differential equations, integral differential equations, Abel equation, weak singularity.

FOR CITATION

Chistyakova E.V., Solovarova L.S., Doan Thai Son. A Numerical Method for Solving Singular Integral Algebraic Equations with Weakly Singular Kernels. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering.* 2021. Vol. 10, no. 3. P. 5–15. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse210301.

References

1. Gear C.W. Differential algebraic equations, indices, and integral algebraic equations. SIAM Journal of Numerical Analysis. 1990. Vol. 27, no. 6. P. 1527–1534. DOI: 10.1137/0727089.

2. Chistyakov V.F. On singular systems of ordinary differential equations and their integral analogs. Lyapunov functions and their applications. Novosibirsk, Nauka Publishing House, 1987. P. 231–239. (in Russian)

3. Lamour R., Marz R., Tischendorf C. Differential-algebraic equations: a projector based analysis. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2013. 649 p. DOI: 10.1007/978-3-642-27555-5.

4. Brunner H., van der Houwen P.J. The numerical solution of Volterra equations (CWI Monographs 3). Elsevier Science Ltd, 1986. 604 p.

5. Brunner H. Collocation methods for Volterra integral and related functional equations. Cambridge University Press, 2004. 612 p. DOI: 10.1017/CBO9780511543234.

6. Brunner H. Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications. Cambridge University Press, 2017. 402 p. DOI: 10.1017/9781316162491.

7. Liang H., Brunner H. On the convergence of collocation solutions in continuous piecewise polynomial spaces for weakly singular Volterra integral equations. SIAM Journal on Numerical Analysis. 2019. Vol. 57, no. 4. P. 1875–1896. DOI: 10.1007/s10543-016-0609-x.

8. Sajjadi S.A., Pishbin S. Convergence analysis of the product integration method for solving the fourth kind integral equations with weakly singular kernels. Numerical Algorithms. 2021. No. 86. P. 25–54. DOI: 10.1007/s11075-020-00877-x.

9. Liang H., Brunner H. Collocation methods for integro-differential algebraic equations with index 1. IMA Journal of Numerical Analysis. 2020. No. 39. P. 850–885. DOI: 10.1093/imanum/drz01.

10. Bulatov M.V., Lima P.M., Weinmuller E.B. Existence and uniqueness of solutions to weakly singular integral-algebraic and integro-differential equations. Central European Journal of Mathematics. 2014. Vol. 12. P. 308–321. DOI: 10.2478/s11533-013-0334-5.

11. Doležal V. Dynamics of Linear Systems. Prague, Academia Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, 1967. 325 p.

12. Jiang Y.L., Wing O. Waveform relaxation of linear integral-differential equations of circuit simulation. IEEE Design Automation Conference. 1999. P. 61–64. DOI: 10.1109/aspdac.1999.759710.

13. Ushakov Ye.I. Static Stability of Electrical Systems. Novosibirsk, 1988. 273 p.

14. Nassirharand A. A new technique for solving sets of coupled nonlinear algebraic and integro-differential equations encountered in hydraulics. International Journal of Contemporary Mathematical Sciences. 2008. Vol. 3, no. 33. P. 1611–1617.

15. Ippili R.K., Davies P., Bajaj A.K., Hagenmeyer L. Nonlinear multi-body dynamic modeling of seat–occupant system with polyurethane seat and H-point prediction. International Journal of Industrial Ergonomics. 2008. Vol. 38, no. 5. P. 368–383. DOI: 10.1016/j.ergon.2007.08.014.

16. Chistyakova E.V. Properties of finite-difference schemes for singular integrodifferential equations of index 1. Comput. Math. Math. Phys. 2009. Vol. 49, no. 9. P. 1507–1515 DOI: 10.1134/S096554250909005X.

17. Bulatov M.V., Chistyakova E.V. On a family of singular integro-differential equations. Comput. Math. Math. Phys. 2011. Vol. 51, no. 9. P. 1558–1566. DOI: 10.1134/S0965542511090065.

18. Bang N.D., Chistyakov V.F., Chistyakova E.V. On some properties of degenerate systems of linear integro-differential equations. I. Bulletin of the Irkutsk State University. Series “Mathematics”. 2015. No. 11. P. 13–27. (in Russian)

19. Bulatov M.V., Ming-Gong Lee. Application of matrix polynomials to the analysis of linear differential-algebraic equations of higher order. 2008. Vol. 44, no. 10. P. 1299–1305.

20. Boyarintsev Yu.E. Regular and singular systems of linear ordinary differential equations. Novosibirsk, Nauka Publishing House, 1980. 222 p. (in Russian)

21. Lancaster P. Theory of Matrices. Academic Press, 1985. 570 p.

22. Gantmacher F.R. Matrix theory. Moscow, Nauka Publishing House, 1967. 577 p. (in Russian)

23. Krasnov M.L. Integral equations: an introduction to the theory. Moscow, Nauka Publishing House, 1975. 302 p. (in Russian)