УДК 517.977 **DOI: 10.14529/cmse210201**

ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ПОМЕХОЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

© 2021 **С.А. Никитина, В.И. Ухоботов**

Челябинский государственный университет

(454001 Челябинск, ул. Бр. Кашириных, д. 129)

E-mail: nikitina@csu.ru, ukh@csu.ru

Поступила в редакцию: 12.03.2021

Рассматриваются две модели дискретных динамических управляемых систем с помехой. В одной из них представлена дискретная задача управления, в которой вектограмма управления линейно зависит от заданных множеств. Во второй задаче предполагается, что вектограммы управления и помехи являются однотипными множествами. В обоих случаях цель выбора управления заключается в том, чтобы в момент окончания процесса управления фазовая точка содержалась в заданном множестве. При построении управления предполагается, что в каждый дискретный момент времени поступает информация о реализации помехи. Записан оператор программного поглощения, с помощью которого сформулированы условия на множество начальных положений, при которых гарантируется выполнение требуемого включения в заданный момент времени. В практической части работы показано применение полученных результатов на примере решения задачи управления запасами товара на складе. Пополнение товара происходит за счет его производства, а величина отгрузки товара определяется спросом. Предполагается, что о величине спроса на товар известно только множество его значений. Цель управления состоит в том, чтобы в заданный момент времени количество товара удовлетворяло определенным ограничениям. Получено множество начальных запасов товара, для которых возможно осуществить поставленную цель при любой реализации спроса.

Ключевые слова: дискретная система, задача управления запасами, вектограммы, линейно зависящие от заданных множеств, однотипная задача управления.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Никитина С.А., Ухоботов В.И. Дискретные динамические системы с помехой и их приложения к решению задачи управления запасами // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2021. Т. 10, № 2. С. 5–19. DOI: 10.14529/cmse210201.

Введение

Создание и применение дискретных систем управления может быть вызвано несколькими причинами. Зачастую дискретные процессы управления возникают при решении практических задач. Это связано с тем, что информацию о состоянии управляемого процесса возможно получить только в дискретные моменты времени, а управление осуществляется по шагам. Кроме этого принцип действия некоторых элементов, входящих в систему, может быть дискретным. Отметим также, что для дискретных систем бывает проще реализовать сложные алгоритмы управления.

Задачи управления запасами составляют один из обширных классов дискретных задач управления, решение которых имеет важное прикладное значение. Определение стратегии управления запасами позволяет повысить эффективность используемых ресурсов.

В статье будут рассмотрены две модели дискретных динамических управляемых систем с помехой. Для каждой их них будет показано применение полученных теоретических результатов для решения задачи управления запасами.

Статья организована следующим образом. Раздел 1 содержит обзор работ по тематике исследования. В разделе 2 приводится решение задачи управления с помехой и вектограммами, линейно зависящими от заданных множеств. Раздел 3 посвящен рассмотрению дискретной задачи управления с помехой с однотипными вектограммами и выпуклой целью. В заключении приводится краткая сводка результатов, полученных в работе, и указаны направления дальнейших исследований.

1. Обзор работ

Для систем с дискретным временем в статье [14] решается задача адаптивного управления. В каждый момент времени управление выбирается на основе правила переключения. Задача управления состоит в том, чтобы определить подходящие правила для переключения и настройки параметров. Анализ динамических систем с дискретным временем, неопределенностями параметров и помехами представлен в работе [15]. Показано, что задача построения управления для таких систем сводится к решению линейных матричных неравенств. Алгоритм синтеза управления системой с дискретным временем при наличии внешнего воздействия был получен в [13], где также было показано применение полученной схемы на нескольких практических приложениях.

В работе [16] рассмотрена дискретная модель запасов с линейной скоростью спроса без регулярного предложения. Вводится критерий для расчета чистой прибыли, исходя из которого строится управление. В [17] представлены результаты моделирования динамики производства и заказов для системы поставок с дискретным временем. Получены оценки границ диапазона колебаний запасов при неизвестном спросе.

В работах [1–3] рассмотрена задача управления дискретной линейной системой с заданным моментом окончания и с фиксированным терминальным множеством. На каждом шаге при построении управления используется информация о реализации помехи. В статье [2] эта задача рассмотрена для случая, когда терминальное множество и вектограмма управления являются многогранниками специального вида, которые задаются с помощью системы линейных неравенств. Получены условия на множество начальных положений, при которых гарантируется достижение цели в момент окончания процесса управления. В [3] требуется, чтобы в момент окончания процесса управления фазовая точка содержалась в заданном множестве, имеющем форму кольца. Было построено семейство множеств, определяющее необходимые и достаточные условия возможности окончания. В работе [1] построены оптимальные управления для такой задачи.

В [4] предложен подход для решения задачи управления запасами в дискретном случае. Записан алгоритм построения управления, которое обеспечивает удержание фазовой точки в заданном семействе множеств при любой допустимой реализации помехи. В работе [12] была рассмотрена задача удержания фазовой точки в заданном семействе множеств в дискретные моменты времени, приведены необходимые и достаточные условия возможности удержания.

В данной статье продолжается начатое ранее исследование. Рассматриваются две модели дискретных динамических управляемых систем с помехой. В одной из них рассматривается дискретная задача управления с заданным моментом окончания, в которой вектограмма управления линейно зависит от заданных множеств, а в другой вектограммы управления и помехи являются однотипными множествами. Требуется, чтобы в момент окончания процесса управления фазовая точка содержалась в некотором множестве. В каждом из двух случаев определены условия на множество начальных положений, при которых будет гарантироваться выполнение указанного требования.

2. Дискретная задача управления с помехой и вектограммами, линейно зависящими от заданных множеств

2.1. Постановка задачи

Пусть задан управляемый процесс

$$z(k+1) = z(k) - \sum_{i=1}^{N} a_i(k)u_i(k) + \sum_{j=1}^{M} b_j(k)v_j(k), \tag{1}$$

где $k = 0, \ldots, p,\ z(k) \in \mathbb{R}^n, u_i(k) \in U_i, v_j(k) \in V_j, a_i(k) \geq 0, b_j(k) \geq 0,\ p$ — фиксированный момент времени; $U_i \subset \mathbb{R}^n$ и $V_j \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые множества.

Задано выпуклое множество $X \subset \mathbb{R}^n$. Цель выбора управления $u_i \in U_i, i = 1, \ldots, N$ заключается в осуществлении включения

$$z(p) \in X \tag{2}$$

при любой допустимой реализации помехи $v_j, j = 1, \ldots, M,$. На каждом шаге при построении управления используется информация о реализации помехи.

Требуется определить множество начальных положений $z(0)$, откуда возможно осуществить (2) при любых допустимых реализациях помехи.

2.2. Решение

Введем оператор T_k который каждому числу $k = 0, \ldots, p$ и каждому множеству Y ставит в соответствие множество $T_k(Y)$, определяемое следующим образом. Точка $z \in T_k(Y)$ тогда и только тогда, когда для любой реализации помехи $v_j(k) \in V_j$ существует управление $u_i(k) \in U_i$ такое, что $z(k+1) \in Y$. Поэтому

$$T_k(Y) = \left(Y + \sum_{i=1}^{N} a_i(k)U_i \right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} b_j(k)V_j. \tag{3}$$

Здесь с помощью $A \overset{*}{-} B$ обозначена геометрическая разность [5] множеств A и B из пространства $\mathbb{R}^n$.

Для дальнейших рассуждений потребуется следующее свойство [8]: пусть множество X является выпуклым, а числа $\sigma_i \geq 0, \epsilon_i > 0, i = 1, \ldots, N,\ \delta_j \geq 0, \gamma_j > 0, j = 1, \ldots, M$ удовлетворяют неравенству

$$\max_{1 \leq i \leq N} \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} \leq \min_{1 \leq j \leq M} \frac{\delta_j}{\gamma_j}.$$

Тогда

$$\left(\left(X + \sum_{i=1}^{N} \epsilon_i U_i \right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} \gamma_j(k) V_j + \sum_{i=1}^{N} \sigma_i U_i \right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} \delta_j V_j =$$

$$= \left(X + \sum_{i=1}^{N} (\epsilon_i + \sigma_i) U_i \right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} (\gamma_j + \delta_j) V_j. \tag{4}$$

В работе [9] доказана следующая лемма.

Лемма 1. Для любого выпуклого множества K и любых чисел $\alpha_j \geq \beta_j \geq l_j \geq 0, \alpha_j \geq \beta_j + f_j, f_j \geq 0, j = 1, \ldots, M$ выполнено включение

$$\left(K + \sum_{j=1}^{M} (\beta_j - l_j) V_i \right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} f_j V_j \supset$$

$$\supset K \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} (\alpha_j - \beta_j) V_j + \sum_{j=1}^{M} (\alpha_j - l_j - f_j) V_j.$$

Обозначим

$$W(k) = \left(X + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=k}^{p} a_i(s) U_i \right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} y_j(k) V_j + \sum_{j=1}^{M} (y_j(k) - \sum_{s=k}^{p} b_j(s)) V_j. \tag{5}$$

Теорема 1. Пусть $y_j(k),\ k = 0, \ldots,\ p, j = 1, \ldots, M$ в формуле (5) удовлетворяет условиям

$$y_j(p) = 0 \text{ и}$$

$$y_j(k+1) = y_j(k) - \max \left\{ b_j(k); y_j(k+1) \cdot \max_{1 \leq i \leq N} \left(\frac{a_i(k)}{\sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)} \right) \right\}. \tag{6}$$

Тогда для множеств (5) выполнено

$$W(p) = X;\ W(k) \subset T_k(W(k+1)). \tag{7}$$

Доказательство. Равенство $W(p) = X$ следует из (5) и условия $y_j(p) = 0$.

Далее из (6) следует, что

$$y_j(k+1) - y_j(k) \leq -\frac{y_j(k+1) \cdot a_i(k)}{\sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)},$$

$$i = 1, \ldots, N,\ j = 1, \ldots, M.$$

Поэтому

$$(y_j(k) - y_j(k+1)) \sum_{s=k+1}^{p} a_i(s) \geq y_j(k+1) \cdot a_i(k),\ i = 1, \ldots, N,\ j = 1, \ldots, M.$$

Следовательно, выполняются неравенства

$$\min_{1 \leq j \leq M} \frac{y_j(k) - y_j(k+1)}{y_j(k+1)} \geq \max_{1 \leq i \leq N} \frac{a_i(k)}{\sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)}. \tag{8}$$

Из (6) получим, что

$$y_j(k) - y_j(k+1) \geq b_j(k),\ j = 1, \ldots, M. \tag{9}$$

Обозначим

$$\alpha_j = y_j(k),\ \beta_j = y_j(k+1),$$

$$l_j = \sum_{s=k}^{p} b_j(s),\ \ f_j = b_j(k),\ j = 1,\ldots,M.$$

Тогда из неравенств (9) следует, что эти числа удовлетворяют неравенствам, содержащимся в формулировке леммы 1.

Рассмотрим множество $T_k(W(k+1))$ и покажем, что выполнено $W(k) \subset T_k(W(k+1))$. Из (3) и (5) следует, что

$$T_k(W(k+1)) = \left(W(k+1) + \sum_{i=1}^{N} a_i(k)U_i\right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} b_j(k)V_j =$$

$$= [(X + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)U_i) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} y_j(k+1)V_j + \sum_{i=1}^{N} a_i(k)U_i +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} (y_j(k+1) - \sum_{s=k+1}^{p} b_j(s))V_j] \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} b_j(k)V_j.$$

Отсюда, используя лемму 1, получим

$$T_k(W(k+1)) \supset$$

$$\left[(X + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)U_i) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} y_j(k+1)V_j + \sum_{i=1}^{N} a_i(k)U_i\right] \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} (y_j(k) - y_j(k+1))V_j + \sum_{j=1}^{M} (y_j(k) - \sum_{s=k+1}^{p} b_j(s) - b_j(k))V_j \supset$$

$$\supset [(X + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=k+1}^{p} a_i(s)U_i) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} y_j(k+1)V_j + \sum_{i=1}^{N} a_i(k)U_i] \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} (y_j(k) - y_j(k+1))V_j + \sum_{j=1}^{M} (y_j(k) - \sum_{s=k}^{p} b_j(s))V_j.$$

Применим к множеству, стоящему в правой части последнего включения, равенство (4), используя при этом неравенство (8). Тогда

$$T_k(W(k+1)) \supset [(X + \sum_{i=1}^{N} (\sum_{s=k+1}^{p} a_i(s) + a_i(k))U_i)] \overset{*}{-}$$

$$\overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} (y_j(k+1) + y_j(k) - y_j(k+1))V_j + \sum_{j=1}^{M} (y_j(k) - \sum_{s=k}^{p} b_j(s))V_j =$$

$$= [(X + \sum_{i=1}^{N} \sum_{s=k}^{p} a_i(s)U_i)] \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} y_j(k)V_j + \sum_{j=1}^{M} (y_j(k) - \sum_{s=k}^{p} b_j(s))V_j.$$

С учетом обозначений (5) получим требуемое включение $W(k) \subset T_k(W(k+1))$. Таким образом, условия (7) выполнены. Теорема доказана. $\square$

Построенное семейство множеств $W(k),\ k = 0, \ldots, p$ позволяет записать условия на множество начальных положений, при которых гарантируется выполнение включения (2) в момент окончания процесса управления (1).

2.3. Пример

Рассмотрим задачу управления запасами [7]

$$x(k+1) = x(k) + a(k) \cdot u - \sum_{j=1}^{M} b_j(k) v_j^*,\ k = 0, 1, \ldots, p. \tag{10}$$

Предполагаем, что $a(k) \geq b_j(k),\ j = 1, \ldots, M$.

Пусть $x(k) = \big(x^1(k); x^2(k)\big)$, где $x^1(k),\ x^2(k)$ — количество товаров первого и второго вида, имеющихся в наличии на складе в k-ый период времени, $x^1(k) \geq 0, x^2(k) \geq 0$;

$u(k) = \big(u^1(k); u^2(k)\big)$, где $u^1(k), u^2(k)$ — доля товара первого и второго вида, произведенного за период k, $u^1(k) \in [0; 1], u^2(k) \in [0; 1]$;

$a(k)$ — максимально возможный выпуск продукции каждого вида в k-ый период времени (определяется особенностями технологического процесса);

$a(k)u^1(k), a(k)u^2(k)$ — количество товара первого и второго вида, произведенного за период k.

Величина $\sum_{j=1}^{M} b_j(k) v_j^*$ определяется спросом на продукцию в k-й период. Информация о спросе на товар может поступать из разных источников. Предприятие получает эту информацию и на ее основании строит управление, то есть принимает решение об объеме производимой продукции в данный период времени.

Пусть к концу p-го периода требуется, чтобы выполнялось условие

$$c_1 x^1(p) + c_2 x^2(p) \leq \epsilon,$$

$c_1, c_2 > 0, x^1(p) \geq 0, x^2(p) \geq 0$. Это условие можно рассматривать как ограничение на ёмкость склада.

Введем управления $u_1 = (-u^1; 0)$, $u_2 = (0; -u^2)$, и $v_j = -v_j^*$. Тогда процесс управления (10) можно записать в виде (1).

Обозначим множества

$$U_1 = \left\{u \in \mathbb{R}^2 : u = (-u^1; 0)\right\},$$

$$U_2 = \left\{u \in \mathbb{R}^2 : u = (0; -u^2)\right\},$$

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : c_1 x^1 + c_2 x^2 \leq \epsilon, x^1 \geq 0, x^2 \geq 0\right\}.$$

Цель процесса управления запишется в виде

$$x(p) \in X.$$

Из неравенства $a(k) \geq b_j(k),\ j = 1, \ldots, M$ следует, что

$$y_j(k) = \sum_{s=k}^{p} a(s), k = 0, ..., p-1,\ y_j(p) = 0,\ \forall j = 1, \ldots M$$

удовлетворяет условиям (6).

Тогда, подставляя $y_j(k)$ в (5), получим

$$W(k) = \left(X + \sum_{s=k}^{p} a(s)(U_1 + U_2) \right) \overset{*}{-} \sum_{j=1}^{M} \sum_{s=k}^{p} a(s)V_j + \sum_{j=1}^{M} \sum_{s=k}^{p} \left(a(s) - b_j(s)\right) V_j.$$

Таким образом, чтобы к концу заданного периода времени ограничения на ёмкость склада были выполнены, в начальный момент времени запас товаров на складе должен удовлетворять условию $x(0) = \left(x^1(0), x^2(0)\right) \in W(0)$.

3. Дискретная задача управления с помехой с однотипными вектограммами и выпуклой целью

3.1. Постановка задачи

Пусть задан управляемый процесс

$$z(k+1) = z(k) - a(k)u + b(k)v, \tag{11}$$

где $z \in \mathbb{R}^n, a(k) \geq 0, b(k) \geq 0, k = 0, \ldots, p$.

Здесь $u \in X$ — значение управления, $v \in X$ — значение помехи, $X \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым и замкнутым. Считаем, что $p \geq 1$ — длительность процесса управления задана.

Приведем правила, описывающие управление дискретной системой. В начальный момент времени, исходя из начального положения $z(0)$, происходит реализация помехи $v(0)$ из множества X. Зная начальное положение и реализацию помехи, выбирается управление $u(0)$ из множества X. Для начального условия $z(0)$ и для выбранной допустимой пары u и v реализуется $z(1)$ по правилу (11). В следующий момент $t = 1$, исходя из значения $z(1)$, происходит реализация $v(1)$ из множества X. Зная $z(1)$ и $v(1)$, строится управление $u(1)$ из множества X и т.д.

Задано выпуклое замкнутое множество $Z \subset \mathbb{R}^n$.

Цель выбора управления $u \in X$ заключается в осуществлении включения

$$z(p) \in Z \tag{12}$$

при любой допустимой реализации помехи.

Требуется определить множество начальных положений $z(0)$, откуда возможно осуществить (12) при любых допустимых реализациях помехи.

3.2. Решение

Введем оператор T_k который каждому числу $k = 0, \ldots, p$ и каждому множеству $Y \in \mathbb{R}^n$ ставит в соответствие множество $T_k(Y)$, определяемое следующим образом. Точка $z \in T_k(Y)$ тогда и только тогда, когда для любой реализации помехи $v \in X$ существует управление $u \in X$ такое, что $z(k+1) = z(k) - a(k)u + b(k)v \in Y$.

Отсюда получим, что

$$T_k(Y) = (Y + a(k)X) \overset{*}{-} b(k)X. \tag{13}$$

Обозначим

$$\Omega_m = T_m\left(T_{m+1}\left(\ldots T_{p-1}(Z)\ldots\right)\right),\ m = 0, \ldots, p-1. \tag{14}$$

Используя введенные обозначения получим, что множество начальных положений, откуда возможно осуществить включение (12), запишется в виде Ω_0.

Известно [6], что для любого выпуклого замкнутого множества $M \in \mathbb{R}^n$ и для любого выпуклого компакта $X \in \mathbb{R}^n$ выполнены следующие свойства

$$(M + \epsilon X) \overset{*}{-} \epsilon X = M; \tag{15}$$

$$\left(M \overset{*}{-} \epsilon X\right) \overset{*}{-} \delta X = M \overset{*}{-} (\epsilon + \delta) X. \tag{16}$$

Здесь ϵ и δ — произвольные неотрицательные числа.

В работе [10] доказана следующая лемма.

Лемма 2. Пусть Q — выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$, $a \geq 0, b \geq 0$ — заданные числа. Тогда

$$(Q + aX) \overset{*}{-} bX = Q \overset{*}{-} b_* X + a_* X,$$

где $a_* = \max\{0; a - b\}$, $b_* = \max\{0; b - a\}$.

Теорема 2. Для любого числа $0 \leq m \leq p-1$ выполнено

$$\Omega_m = Z \overset{*}{-} \beta(m) X + \alpha(m) X,$$

где

$$\alpha(m) = \alpha(p-1) + \sum_{i=m}^{p-2} (a(i) - b(i)) \geq 0,\ m = 0, \ldots, p-2,$$

$$\alpha(p-1) = \max\{0; a(p-1) - b(p-1)\},$$

$$\beta(m) = \beta(p-1) \geq 0,\ m = 0, \ldots, p-2,$$

$$\beta(p-1) = \max\{0; b(p-1) - a(p-1)\}.$$

Доказательство. Согласно (13) и (14) множество $\Omega_{p-1} = T_{p-1}(Z) = (Z + \alpha(p-1)X) \overset{*}{-} \beta(p-1)X$.

Обозначим

$$\alpha(p-1) = \max\{0; a(p-1) - b(p-1)\} \geq 0,$$

$$\beta(p-1) = \max\{0; b(p-1) - a(p-1)\} \geq 0.$$

Покажем, что $T_{p-1} = Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + \alpha(p-1)X$.

Пусть $a(p-1) \geq b(p-1)$. В этом случае $\alpha(p-1) = a(p-1) - b(p-1) \geq 0, \beta(p-1) = 0$. Тогда, применяя (15), получим, что

$$(Z + a(p-1)X) \overset{*}{-} b(p-1)X =$$

$$= (Z + (a(p-1) - b(p-1))X + b(p-1)X) \overset{*}{-} b(p-1)X =$$

$$= Z + (a(p-1) - b(p-1))X = Z + \alpha(p-1)X.$$

Показали, что в рассматриваемом случае множество $T_{p-1}(Z) = Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + \alpha(p-1)X$.

Пусть теперь $a(p-1) < b(p-1)$. В этом случае $\alpha(p-1) = 0, \beta(p-1) = b(p-1) - a(p-1)$. Тогда, используя (16), найдем, что

$$(Z + a(p-1)X) \overset{*}{-} b(p-1)X =$$

$$= \Big((Z + a(p-1)X) \overset{*}{-} a(p-1)X\Big) \overset{*}{-} (b(p-1) - a(p-1))X =$$

$$= Z \overset{*}{-} (b(p-1) - a(p-1))X = Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X.$$

И в этом случае показали, что множество $\Omega_{p-1} = T_{p-1}(Z) = Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + \alpha(p-1)X$.

Далее, рассмотрим множество

$$\Omega_{p-2} = T_{p-2}(T_{p-1}(Z)) = T_{p-2}\Big(Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + \alpha(p-1)X\Big) =$$

$$= \Big(Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + \alpha(p-1)X + a(p-2)X\Big) \overset{*}{-} b(p-2)X.$$

Обозначим $\alpha(p-2) = \alpha(p-1) + a(p-2) - b(p-2)$.

Снова рассмотрим два случая. Пусть сначала $a(p-2) \geq b(p-2)$. В этом случае $\alpha(p-2) \geq 0$. Значит

$$\Omega_{p-2} = (T_{p-1}(Z) + a(p-2)X) \overset{*}{-} b(p-2)X =$$

$$= (T_{p-1}(Z) + (a(p-2) - b(p-2))X + b(p-2)X) \overset{*}{-} b(p-2)X =$$

$$= T_{p-1}(Z) + (a(p-2) - b(p-2))X =$$

$$= Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + \alpha(p-1)X + (a(p-2) - b(p-2))X =$$

$$= Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + (\alpha(p-1) + a(p-2) - b(p-2))X =$$

$$= Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + (\alpha(p-2)X.$$

Пусть теперь $a(p-2) < b(p-2)$. Тогда $\alpha(p-2) - a(p-2) + b(p-2) \geq 0$. Найдем

$$\Omega_{p-2} = (T_{p-1}(Z) + a(p-2)X) \overset{*}{-} b(p-2)X =$$

$$= \Big((T_{p-1}(Z) + a(p-2)X) \overset{*}{-} a(p-2)X\Big) \overset{*}{-} (b(p-2) - a(p-2))X =$$

$$= T_{p-1}(Z) \overset{*}{-} (b(p-2) - a(p-2))X =$$

$$= \left(Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + \alpha(p-1)X\right) \overset{*}{-} (b(p-2) - a(p-2))X =$$

$$= \left(Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + (\alpha(p-2) - a(p-2) + b(p-2))X\right) \overset{*}{-} (b(p-2) - a(p-2))X =$$

$$= \left(Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + \alpha(p-2)X + (b(p-2) - a(p-2))X\right) \overset{*}{-} (b(p-2) - a(p-2))X =$$

$$= Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + \alpha(p-2)X.$$

Показали, что множество $\Omega_{p-2} = Z \overset{*}{-} \beta(p-2)X + \alpha(p-2)X$.
Рассуждая аналогично, получим, что

$$\Omega_m = Z \overset{*}{-} \beta(m)X + \alpha(m)X,$$

$$\alpha(m) = \alpha(p-1) + \sum_{i=m}^{p-2} (a(i) - b(i)) \geq 0, \; m = 0, \dots, p-2,$$

$$\alpha(p-1) = \max\{0; a(p-1) - b(p-1)\},$$

$$\beta(m) = \beta(p-1) \geq 0, \; m = 0, \dots, p-2,$$

$$\beta(p-1) = \max\{0; b(p-1) - a(p-1)\}.$$

Теорема доказана.

□

Следствие 1. Пусть $a(k) = a, b(k) = b$ для всех $k = 0, 1, \dots, p$, тогда

$$\Omega_0 = Z \overset{*}{-} \beta(p-1)X + (\alpha(p-1) + (p-1)(a-b))\, X.$$

Если при этом выполнено условие $a > b$, то $\Omega_0 = Z + p(a-b)X$.

Построенное семейство множеств $\Omega_m, m = 0, \dots, p-1$ позволяет определить условия на множество начальных положений, при которых гарантируется выполнение включения (12) в момент окончания процесса управления (11).

3.3. Пример

Рассмотрим задачу управления запасами [7]

$$z(k+1) = z(k) + a(k)\widetilde{u} - b(k)\widetilde{v}, k = 0, 1, 2, 3. \tag{17}$$

Здесь $z(k) = \left(z^1(k); z^2(k)\right)$, где $z^1(k), z^2(k)$ — количество товаров первого и второго вида, имеющихся в наличии на складе в k-ый период времени, $z^1(k) \geq 0, z^2(k) \geq 0$;

$a(k)$ — максимально возможный выпуск продукции каждого вида в k-ый период времени (определяется особенностями технологического процесса);

$b(k)$ — максимально возможный спрос на продукцию каждого вида в k-ый период времени.

Предполагаем, что известны значения $a(0) = 4, a(1) = 2, a(2) = 3, b(0) = 3, b(1) = 3, b(2) = 2$. Пусть $\widetilde{u}(k) = \left(\widetilde{u}^1(k); \widetilde{u}^2(k)\right)$, где $\widetilde{u}^1(k), \widetilde{u}^2(k)$ — доля товара первого и второго вида, произведенного за период k, $\widetilde{u}^1(k) \in [0; 1], \widetilde{u}^2(k) \in [0; 1]$;

$a(k)u^1(k), a(k)u^2(k)$ — количество товара первого и второго вида, произведенного за период k;

$\widetilde{v}(k) = \left(\widetilde{v}^1(k); \widetilde{v}^2(k)\right)$, где $\widetilde{v}^1(k), \widetilde{v}^2(k)$ — доля товара первого и второго вида, отгруженного со склада за период k, определяется спросом на продукцию в k-й период, $\widetilde{v}^1(k) \in [0; 1], \widetilde{v}^2(k) \in [0; 1]$.

Информация о спросе на товар считается известной. Предприятие получает эту информацию и на ее основании строит управление, то есть принимает решение об объеме производимой продукции в текущий момент времени.

Сделаем замену переменных

$$u^1(k) = -\widetilde{u}^1(k), u^2(k) = -\widetilde{u}^2(k), v^1(k) = -\widetilde{v}^1(k), v^2(k) = -\widetilde{v}^2(k),$$

после которой задачу (17) можно записать в виде (11).

Пусть к концу периода $p = 3$ требуется, чтобы выполнялось условие

$$1 \leq z^1(3) \leq 2,\ 1 \leq z^2(3) \leq 3.$$

Обозначим множества

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x^1 \leq 0,\ -1 \leq x^2 \leq 0\right\},$$

$$Z = \left\{z \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq z^1 \leq 2,\ 1 \leq z^2 \leq 3\right\}.$$

Цель процесса управления запишется в виде $z(3) \in Z$.

Согласно теореме 2.1. множество Ω_0 запишется следующим образом

$$\Omega_0 = Z \overset{*}{-} \beta(0)X + \alpha(0)X,$$

где

$$\alpha(0) = \alpha(2) + \sum_{i=0}^{1} (a(i) - b(i)) =$$

$$= \max\{0; a(2) - b(2)\} + a(0) - b(0) + a(1) - b(1) = 1,$$

$$\beta(0) = \max\{0; b(2) - a(2)\} = 0.$$

Окончательно получаем, что

$$\Omega_0 = Z + X.$$

Таким образом, чтобы к концу заданного периода времени ограничения на объем продукции на складе были выполнены, в начальный момент времени запас товаров на складе должен удовлетворять условию $0 \le z^1(0) \le 2, 0 \le z^2(0) \le 3$.

Заключение

Рассмотрены две модели дискретных динамических управляемых систем с помехой. В одной из них представлена дискретная задача управления, в которой вектограмма управления линейно зависит от заданных множеств. Во второй предполагается, что вектограммы управления и помехи являются однотипными множествами. В каждом случае требуется, чтобы в конечный момент времени фазовая точка содержалась в заданном множестве. При построении управления используется информация о реализации помехи. Записан оператор программного поглощения, с помощью которого сформулированы условия на множество начальных положений, при которых гарантируется выполнение требуемого включения в заданный момент времени. В качестве примера приведено решение задачи управления запасами.

Полученные результаты могут быть применены для случая, когда помеха задается в виде нечеткого числа. Как известно [11], нечеткое число полностью определяется его множеством уровня α. Рассматривая задачу для каждого множества уровня и применяя подход, предложенный в данной статье, можно построить множество начальных положений, при которых гарантируется выполнение требуемого включения, в зависимости от параметра α. Затем в виде нечеткого числа можно записать множество начальных позиций, из который возможно осуществить цель в конечный момент времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Челябинской области в рамках научного проекта № 20-41-740027.

Литература

1. Изместьев И.В. Дискретная игровая задача с терминальным множеством в форме кольца // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2020. Т. 30, № 1. С. 18–30. DOI: 10.35634/vm200102.

2. Никитина С.А., Скорынин А.С., Ухоботов В.И. Об одной задаче управления дискретной системой // Челябинский физико-математический журнал. 2018. Т. 3, № 3. С. 311–318. DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13304.

3. Никитина С.А., Ухоботов В.И. Дискретная динамическая задача управления с терминальным множеством в форме кольца // Вестник РАЕН. 2019. Т. 19, № 2. С. 120–121.

4. Никитина С.А., Ухоботов В.И. Об одной задаче управления запасами при наличии помехи // Челябинский физико-математический журнал. 2020. Т. 5, № 3. С. 306–315. DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15305.

5. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры, II // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 4. С. 764–766.
6. Понтрягин, Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Новая серия. 1980. Т. 112, № 3. С. 307–330.
7. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука, 1973. 256 с.
8. Ухоботов В.И. К вопросу об окончании игры за первый момент поглощения // Прикладная математика и механика. 1984. Т. 48, № 6. С. 892–897.
9. Ухоботов В.И. Стабильный мост в игре с вектограммами, зависящими линейно от заданных множеств // Известия высших учебных заведений. 1988. Т. 2. С. 63–65.
10. Ухоботов В.И. Однотипные дифференциальные игры с выпуклой целью // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5. С. 196–204.
11. Ухоботов В.И. Избранные главы теории нечетких множеств: учеб. пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. 245 с.
12. Ухоботов В.И., Никитина С.А. Управление дискретной динамической системой с помехой // Итоги науки и техники. Серия: Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 168. С. 105–113. DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-105-113.
13. Bernardo M., Montanaro U., Olm J. M., Santini S. Model reference adaptive control of discrete-time piecewise linear systems // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2012. Vol. 23, no. 7. P. 709–730. DOI: 10.1002/rnc.2786.
14. Li X., Liu D., Li J., Ding D. Robust Adaptive Control for Nonlinear Discrete-Time Systems by Using Multiple Models // Mathematical Problems in Engineering. 2013. Vol. 2013. P. 1–10. DOI: 10.1155/2013/679039.
15. Li Y-M., Li Y. Fuzzy-Model-Based Adaptive Control for a Kind of Discrete-Time Systems with Time-Delay and Disturbances // International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 2014. Vol. 22, no. 3. P. 453–468. DOI: 10.1142/S0218488514500226.
16. Wang Y., Xu L. Dynamics and Control on a Discrete Multi-Inventory System // Journal of Control Science and Engineering. 2019. Vol. 2019. P. 1–7. DOI: 10.1155/2019/6926342.
17. Yongchang W., Fangyu C., Hongwei W. Inventory and Production Dynamics in a Discrete-Time Vendor-Managed Inventory Supply Chain System // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2018. Vol. 2018. P. 1–15. DOI: 10.1155/2018/6091946.

Никитина Светлана Анатольевна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация)

Ухоботов Виктор Иванович, д.ф.-м.н., профессор, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация)

DOI: 10.14529/cmse210201

DISCRETE DYNAMIC SYSTEMS WITH INTERFERENCE AND THEIR APPLICATIONS TO THE SOLUTION OF THE PROBLEM OF RESERVE CONTROL

© 2021 S.A. Nikitina, V.I. Ukhobotov

Chelyabinsk State University (st. Brat'ev Kashirinyh 129, Chelyabinsk, 454001 Russia)

E-mail: nikitina@csu.ru, ukh@csu.ru

Received: 12.03.2021

Two models of discrete dynamic controlled systems with noise are considered. In one of them a discrete control problem is presented, in which the control vectogram linearly depends on the given sets. In the second problem, it is assumed that the control and noise vectograms are of the same type. In both cases, the purpose of the choice of control is that at the moment of the end of the control process the phase point is contained in the given set. When constructing the control, it is assumed that at each discrete moment of time, information about the implementation of the interference arrives. The operator of programmed absorption is written down, with the help of which conditions are formulated for the set of initial positions under which the fulfillment of the required inclusion at a given moment of time is guaranteed. In the practical part of the work, the application of the results obtained is shown by the example of solving the problem of managing the inventory of goods in the warehouse. Replenishment of goods occurs due to its production, and the amount of shipment of goods is determined by demand. It is assumed that only the set of its values is known about the amount of demand for a product. The goal of control is that at a given moment in time, the quantity of goods satisfies certain restrictions. A lot of initial stocks of goods have been obtained, for which it is possible to fulfill the set goal for any realization of demand.

Keywords: discrete system, reserve control problem, vectograms, linearly dependent on given sets, the same type of control problem.

FOR CITATION

Nikitina S.A., Ukhobotov V.I. Discrete Dynamic Systems with Interference and Their Applications to the Solution of the Problem of Reserve Control. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering.* 2021. Vol. 10, no. 2. P. 5–19. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse210201.

This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 License which permits non-commercial use, reproduction and distribution of the work without further permission provided the original work is properly cited.

References

1. Izmest'ev I.V. Discrete game problem with a terminal set in the form of a ring. Bulletin of Udmurt University. Series: Maths. Mechanics. Computer science. 2020. Vol. 30, no. 1. P. 18–30. (in Russian) DOI: 10.35634/vm200102.

2. Nikitina S.A., Skorynin A.S., Ukhobotov V.I. On a control problem for a discrete system. Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2018. Vol. 3, no. 3. P. 311–318. (in Russian) DOI: 10.24411/2500-0101-2018-13304.

3. Nikitina S.A., Ukhobotov V.I. Discrete dynamic control problem with a terminal set in the form of a ring. Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. 2019. Vol. 19, no. 2. P. 120–121. (in Russian)

4. Nikitina S.A., Ukhobotov V.I. On one problem of reserves control in the presence of

interference. Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2020. Vol. 5, no. 3. P. 306–315. (in Russian) DOI: 10.47475/2500-0101-2020-15305.

5. Pontrjagin L.S. Linear differential games, II. Reports of the USSR Academy of Sciences. 1967. Vol. 175, no. 4. P. 764–766. (in Russian)
6. Pontrjagin L.S. Linear differential pursuit games. Mathematical collection. New series. 1980. Vol. 112, no. 3. P. 307–330. (in Russian)
7. Propoj A.I. Elements of the theory of optimal discrete processes. Moscow, Nauka, 1973. 256 p.
8. Ukhobotov V.I. On the question of ending the game in the first moment of absorption. Applied Mathematics and Mechanics. 1984. Vol. 48, no. 6. P. 892–897. (in Russian)
9. Ukhobotov V.I. Stable bridge in a game with vectorograms depending linearly on given sets. Bulletin of higher educational institutions. 1988. Vol. 2. P. 63–65. (in Russian)
10. Ukhobotov V.I. The same type of differential games with a convex goal. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS. 2010. Vol. 16, no. 5. P. 196–204. (in Russian)
11. Ukhobotov V.I. Selected chapters of fuzzy set theory. Chelyabinsk, Chelyabinsk State University, 2011. 245 p.
12. Ukhobotov V.I., Nikitina S.A. Controlling a discrete dynamic system with interference. Results of Science and Technology. Series: Contemporary mathematics and its applications. Thematic reviews. 2019. Vol. 168. P. 105–113. (in Russian) DOI: 10.36535/0233-6723-2019-168-105-113.
13. Bernardo M., Montanaro U., Olm J. M., Santini S. Model reference adaptive control of discrete-time piecewise linear systems. International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2012. Vol. 23, no. 7. P. 709–730. DOI: 10.1002/rnc.2786.
14. Li X., Liu D., Li J., Ding D. Robust Adaptive Control for Nonlinear Discrete-Time Systems by Using Multiple Models. Mathematical Problems in Engineering. 2013. Vol. 2013. P. 1–10. DOI: 10.1155/2013/679039.
15. Li Y-M., Li Y. Fuzzy-Model-Based Adaptive Control for a Kind of Discrete-Time Systems with Time-Delay and Disturbances. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. 2014. Vol. 22, no. 3. P. 453–468. DOI: 10.1142/S0218488514500226.
16. Wang Y., Xu L. Dynamics and Control on a Discrete Multi-Inventory System. Journal of Control Science and Engineering. 2019. Vol. 2019. P. 1–7. DOI: 10.1155/2019/6926342.
17. Yongchang W., Fangyu C., Hongwei W. Inventory and Production Dynamics in a Discrete-Time Vendor-Managed Inventory Supply Chain System. Discrete Dynamics in Nature and Society. 2018. Vol. 2018. P. 1–15. DOI: 10.1155/2018/6091946.