УДК 681.5.015 DOI: 10.14529/cmse220202

СРАВНЕНИЕ ЦЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ ПРОНИ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИИ ДАННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

© 2022 А.А. Ломов[1,2] , Е.А. Русинова[2]

[1] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН*
(630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, д. 4),
[2] *Новосибирский государственный университет*
(630090 Новосибирск, ул. Пирогова, д. 1)
E-mail: lomov@math.nsc.ru, a.lomov@g.nsu.ru

Поступила в редакцию: 13.01.2022

В работе проводится сравнение двух целевых функций в задаче Прони аппроксимации данных измерений решениями линейного дифференциального уравнения заданного порядка с постоянными коэффициентами. Целевые функции различаются типом зависимости градиента от коэффициентов уравнения (линейная или со сложной нелинейностью) и являются 1) нормой невязки уравнения (линейный метод наименьших квадратов) или 2) нормой ошибки аппроксимации по А. Хаусхолдеру (вариационный метод идентификации). В последнем случае производится совместная оптимизация коэффициентов дифференциального уравнения и начальных условий решения. Для рассмотренных целевых функций вычислены константы локальной устойчивости решения задачи Прони с использованием локальных разложений зависимостей оптимальных коэффициентов уравнения как неявных функций от данных из условия равенства градиента целевой функции нулю. На этой основе предложен способ определения допустимой погрешности в данных задачи для обеспечения заданного уровня отклонения решения от истинного значения. На примере К. Ланцоша вычисления показателей экспонент по наблюдениям суммы трех экспонент с ошибками округления показано существенное преимущество (с точки зрения допустимой погрешности в данных) использования вариационной целевой функции. Адекватность используемых локальных показателей устойчивости для немалых возмущений проверяется численным экспериментом.

Ключевые слова: аппроксимация данных измерений, задача Прони, пример К. Ланцоша выделения показательных функций, локальная устойчивость, метод наименьших квадратов, вариационный метод.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Ломов А.А., Русинова Е.А. Сравнение целевых функций в задаче Прони для аппроксимации данных измерений // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2022. Т. 11, № 2. С. 18–29. DOI: 10.14529/cmse220202.

Введение

При аппроксимации данных измерений широко используется принцип минимизации невязки подбираемого уравнения. В задачах аппроксимации типа Прони этот подход приводит к переопределенной системе уравнений с решением в виде матричной формулы линейного метода наименьших квадратов [1, 2]. В отличие от целевой функции по невязке уравнения, целевые функции по ошибкам в переменных (невязке сигналов) не имеют явных формул для точек минимума, вследствие чего возникают вопросы сходимости вычислительных алгоритмов [1, 3, 4].

Интуитивные предположения (подтверждаемые асимптотической теорией [5]) состоят в том, что при случайных аддитивных возмущениях в аппроксимируемых данных предпочтительны целевые функции по ошибкам в переменных. В статье предлагается обоснование этого факта в неасимптотическом случае произвольных конечных выборок путем сравнения целевых функций по количественным показателям локальной устойчивости решений [6, 7].

В пределе больших объемов выборок предлагаемые показатели совпадают с известными асимптотическими критериями, основанными на информационной матрице [6]. В качестве примера применения методики рассматривается задача К. Ланцоша восстановления экспоненциальных слагаемых из возмущенных наблюдений суммы трех экспонент [8]. Теоретические расчеты показывают, что в задаче К. Ланцоша более сложная целевая функция (по ошибкам в переменных) приводит к решениям, которые на порядок более точны, чем решения, полученные по невязке уравнения. Результаты подтверждаются вычислительным экспериментом.

Заметим, что в настоящее время, учитывая мощность доступных вычислительных устройств, вопросы трудоемкости решения отходят на второй план, и поэтому в статье они не рассматриваются. Главным становится вопрос о гарантиях сходимости алгоритма. Если имеет место сходимость «почти наверное» за конечное число шагов [9], то вычислительный алгоритм, если пренебречь трудоемкостью, приближается по эффективности к явной формуле.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 кратко описаны известные постановки задачи Прони, приведены соответствующие целевые функции, охарактеризованы методы решения. В разделе 2 предложена методика сравнения целевых функций через вычисление констант локальной устойчивости решений задачи Прони. В разделе 3 описан вычислительный эксперимент с приложением методики сравнения к задаче К. Ланцоша восстановления показателей экспонент по наблюдениям их суммы с возмущениями. В заключении приводится краткая сводка результатов, полученных в работе, и указаны направления дальнейших исследований.

1. Целевые функции в задаче Прони

Задача Прони [10] является исторически первой задачей аппроксимации наблюдений решениями линейного дифференциального или разностного уравнения заданного порядка с неопределенными коэффициентами. Задачи такого типа возникают во многих областях: в геологии [11], радиоэлектронике, спектральном анализе, медицине и биоинформатике [12] и др. Гаспар Риш де Прони[1] предложил метод построения разностного уравнения, описывающего наблюдения процесса испарения смеси жидкостей [10]. Он использовал предположение о малости возмущений в наблюдениях; тем не менее, в предложенном им решении были заложены идеи, позволившие впоследствии решить задачу в общем случае немалых возмущений с использованием метода наименьших квадратов, опубликованного немного позже в работах К. Гаусса и П. Лежандра [13].

В литературе нет устоявшейся традиции употребления словосочетаний «задача Прони», «метод Прони». Мы предпочитаем говорить о «задачах типа Прони». Использование различных целевых функций для нахождения коэффициентов аппроксимирующего уравнения формально приводит к разным оптимизационным задачам, или, в другой терминологии, к разным методам решения «задачи Прони».

Классическая задача и метод Прони для малых возмущений. Введем вектор наблюдений $f = \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_N \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{R}^N$, где N — число моментов времени (длина процесса), и f_i — значения некоторой функции на равномерной временной сетке (неравномерная сетка сводится к равномерной аффинными преобразованиями [2]). Классическая задача Прони

[1]Сам Г. Р. де Прони подписал свою работу как «Par R. Prony» («Автор Р. Прони») [10]

состоит в аппроксимации f линейной комбинацией $z = \begin{pmatrix} z_1 & \dots & z_N \end{pmatrix}^\top$ синусоид или экспонент:

$$z_k \doteq \sum_{i=1}^{l} (C_i e^{\lambda_i k} + \overline{C_i} e^{\overline{\lambda_i} k}) \approx f_k, \tag{1}$$

где $k = \overline{1, N}$, $l = \left[\frac{N}{2}\right]$, $\lambda_i, C_i \in \mathbb{C}$, $\forall i = \overline{1, l}$, черта в $\overline{\lambda_i}, \overline{C_i}$ означает комплексное сопряжение. Коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_l$, $C_1, \dots, C_l$ подлежат определению, их найденные значения вместе с $z_1, \dots, z_N$ считаются решением задачи Прони.

Решение достигается за два шага. Сначала определяются показатели $\lambda_1, \dots, \lambda_l$. Ключевая идея Прони состоит в том, чтобы сумму (1) рассматривать как решение некоторого разностного уравнения:

$$\alpha_n z_{k+n} + \alpha_{n-1} z_{k+n-1} + \dots + \alpha_0 z_k = 0, \tag{2}$$

где $n = 2l$, $k = \overline{1, N - n}$, $\alpha_n = 1$. Коэффициенты $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ находятся из предположения, что измерения f_k близки к точному процессу z_k. Составляется система из n уравнений для n неизвестных:

$$\begin{cases} f_{n+1} + \alpha_{n-1} f_n + \dots + \alpha_0 f_1 \approx 0, \\ f_{n+2} + \alpha_{n-1} f_{n+1} + \dots + \alpha_0 f_2 \approx 0, \\ \qquad \vdots \\ f_{2n} + \alpha_{n-1} f_{2n-1} + \dots + \alpha_0 f_n \approx 0. \end{cases} \tag{3}$$

Определив коэффициенты $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}$ из последней системы уравнений, можно найти значения $\lambda_1 = \ln \zeta_1, \dots, \lambda_l = \ln \zeta_l$ через корни $\zeta_1, \dots, \zeta_l$, $\overline{\zeta_1}, \dots, \overline{\zeta_l}$ характеристического многочлена $\alpha(\zeta) = \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \dots + \alpha_0$.

На втором шаге вычисляются коэффициенты $C_1, \dots, C_l$, исходя из полученных на первом шаге значений $\lambda_1, \dots, \lambda_l$. Составляется представление, устанавливающее взаимно-однозначное соответствие между комплексными $C_1, \dots, C_l$ и вещественными коэффициентами $A_{11}, \dots, A_{1l}$, $A_{21}, \dots, A_{2l}$:

$$C_i e^{\lambda_i k} + \overline{C}_i e^{\overline{\lambda}_i k} = (A_{1i} \sin(\omega_i k) + A_{2i} \cos(\omega_i k)) e^{\tau_i k},$$
$$\omega = \arg(\lambda), \quad \tau = \mathrm{mod}\ (\lambda).$$

Для нахождения A_{1i}, A_{2i}, $i = \overline{1, l}$, используется система из $n = 2l$ уравнений:

$$\begin{cases} f_1 \approx \sum_{i=1}^{l} e^{\tau_i} (A_{1i} \sin(\omega_i) + A_{2i} \cos(\omega_i)), \\ f_2 \approx \sum_{i=1}^{l} e^{2\tau_i} (A_{1i} \sin(2\omega_i) + A_{2i} \cos(2\omega_i)), \\ \qquad \vdots \\ f_n \approx \sum_{i=1}^{l} e^{n\tau_i} (A_{1i} \sin(n\omega_i) + A_{2i} \cos(n\omega_i)). \end{cases} \tag{4}$$

Найдя решение A_{1i}, A_{2i}, восстанавливаем коэффициенты C_i, $i = \overline{1, l}$.

«Обобщенный» метод Прони [1] (раздел 11.5), [3]. Для нахождения коэффициентов $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ вместо (3) используется переопределенная система уравнений

$$\left(\begin{array}{ccc|c} f_1 & \ldots & f_n & f_{n+1} \\ f_2 & \ldots & f_{n+1} & f_{n+2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{N-n} & \ldots & f_{N-1} & f_N \end{array}\right) \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} \doteq \tag{5}$$

$$\doteq \left(V_1 \mid V_2 \right) \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix} \doteq e.$$

Из условия минимума целевой функции метода наименьших квадратов

$$J = \|e\|^2 \to \min_{\alpha} \tag{6}$$

следует решение

$$\hat{\alpha} = -\left(V_1^\top V_1\right)^{-1} \left(V_1^\top V_2\right). \tag{7}$$

Для нахождения A_{1i}, A_{2i}, $i = \overline{1, l}$, вместо (4) используется система уравнений

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{\tau_1} \sin(\omega_1) & \ldots & e^{\tau_l} \cos(\omega_l) \\ \vdots & & \vdots \\ e^{N\tau_1} \sin(N\omega_1) & \ldots & e^{N\tau_l} \cos(N\omega_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ \vdots \\ A_{2l} \end{pmatrix} \doteq$$

$$\doteq f - H\theta \doteq \varepsilon,$$

По методу наименьших квадратов из условия минимума $\|\varepsilon\|^2 \to \min_\theta$ получаем

$$\hat{\theta} = \left(H^\top H\right)^{-1} H^\top f, \quad z = H\hat{\theta}.$$

Если нужно найти только аппроксимирующую функцию z, можно обойтись без поиска корней многочлена $\alpha(\zeta)$ и вычисления матрицы H:

$$z = \left[I - G^\top \left(GG^\top\right)^{-1} G\right] f, \tag{8}$$

$$G \doteq \begin{pmatrix} \alpha_0 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 & & & 0 \\ & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & \alpha_0 & \ldots & \alpha_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Полная задача и «модифицированный» метод Прони. Из постановки задачи аппроксимации (1) вытекает целевая функция [3]

$$J_\Pi \doteq \|f - z\|^2 \to \min_{Gz=0}, \tag{9}$$

которую можно использовать для поиска коэффициентов α вместо целевой функции МНК (5), (6). Соответствующая задача минимизации уже не имеет решения в виде явных формул [1] (раздел 11.3), [3]. А. Хаусхолдер [3] использовал алгоритм типа Ньютона в пространстве переменных z, α и множителей Лагранжа. Задачу (9) будем называть полной задачей

Прони (ПП) («вариационная задача идентификации», «вариационный метод» в [4], «модифицированный метод Прони» в [14]), а целевую функцию J_Π — вариационной. Задача (9) была исследована М. Осборном [15] и А. О. Егоршиным [16], предложившими независимо друг от друга[2] эффективные вычислительные алгоритмы решения ПП с гарантированной при малых возмущениях сходимостью из «почти любого» начального приближения [9]. Для алгоритмов, основанных на локальных оценках производных, в частности, алгоритма А. Хаусхолдера [3], насколько известно, такого рода гарантий не существует.

2. Устойчивость решений и вычисление допустимой погрешности

Рассмотрим оценку параметров $\hat{\alpha}(f) = \arg\min_\alpha J(\alpha, f)$ как функцию наблюдений f. Целевая функция $J(\alpha, f)$ может иметь вид МНК (6), ПП (9). Предположим, что $f = z + \Delta z$, где Δz — малое возмущение, и выполнено условие единственности[3] $\hat{\alpha}(z) = \alpha$. Тогда $\hat{\alpha}(f) = \alpha + \Delta\alpha$, где $\Delta\alpha$ — отклонение оценки параметров. Определим матрицу производных (см. [17, формула (1.2.5)])

$$S^\top = \frac{d\hat{\alpha}}{df} = -\left(J''_{\alpha\alpha}\right)^{-1} J''_{\alpha f}\Big|_{f=z} \in \mathbb{R}^{n\times N}.$$

Пусть $B_\sigma \doteq \{\|\Delta z\| \leqslant \sigma\}$ — шар возмущений. Для малых σ множеству наблюдений $f = z + B_\sigma$ при отображении $f \mapsto \hat{\alpha}(f)$ соответствует эллипсоид E_σ значений оценки $\hat{\alpha}(f) = \alpha + E_\sigma$, который определяется с помощью матрицы $S^\top$:

$$E_\sigma = S^\top B_\sigma = \left\{\Delta\alpha : \Delta\alpha^\top \left(S^\top S\right)^{-1} \Delta\alpha \ \leqslant \sigma^2\right\}.$$

Матрицу $S^\top S$ будем называть *матрицей эллипсоида рассеяния*. Наибольшее отклонение оценки $\|\Delta\alpha\|_{\max}$ определяется вдоль наибольшей полуоси эллипсоида E_σ, откуда следует соотношение

$$\|\Delta z\|_{\max} = \sigma = \frac{\|\Delta\alpha\|_{\max}}{\sqrt{\lambda_{\max}(S^\top S)}}. \tag{10}$$

Как следствие, для нахождения допустимого значения погрешности наблюдений $\|\Delta z\| \leqslant \|\Delta z\|_{\max}$ необходимо задать желаемый относительный уровень $p = \frac{\|\Delta\alpha\|_{\max}}{\|\alpha\|}$ погрешности вычисления коэффициентов и найти наибольшее собственное значение матрицы эллипсоида рассеяния $S^\top S$, которое и определяет искомую константу устойчивости решения.

Утверждение 1. [7] Для целевых функций МНК (6) и ПП (9) верны следующие формулы нахождения матриц эллипсоидов рассеяния.

$$S^\top S\Big|_{\text{МНК}} = \left(V_1^\top V_1\right)^{-1} V_1^\top G G^\top V_1 \left(V_1^\top V_1\right)^{-1}, \tag{11}$$

$$S^\top S\Big|_{\text{ПП}} = \left[V_1^\top \left(G G^\top\right)^{-1} V_1\right]^{-1}. \tag{12}$$

Доказательство. Из формул (19)–(21) статьи [7] прямо следуют выражения

$$\Delta\hat{\alpha}|_{\text{МНК}} = -\left(V_1^\top V_1\right)^{-1} V_1^\top \left(\ \Delta V_1 \mid \Delta V_2\ \right)\begin{pmatrix}\alpha\\ 1\end{pmatrix} = -\left(V_1^\top V_1\right)^{-1} V_1^\top G \Delta z,$$

[2] Работы [3, 15] были практически недоступны в СССР в 1970-е гг.

[3] Это условие равносильно линейной независимости столбцов матрицы наблюдений V_1.

$$\Delta\hat{\alpha}|_{\text{ПП}} = -\left(V_1^\top C V_1\right)^{-1} V_1^\top C G \Delta z, \quad C = \left(GG^\top\right)^{-1},$$

из которых получаем

$$S^\top\Big|_{\text{МНК}} = -\left(V_1^\top V_1\right)^{-1} V_1^\top G, \quad S^\top\Big|_{\text{ПП}} = -\left(V_1^\top C V_1\right)^{-1} V_1^\top C G.$$

Отсюда сразу следуют формулы (11), (12). □

Замечание 1. Пусть вектор коэффициентов $\tilde{\alpha} \doteq \begin{pmatrix}\alpha_0 & \dots & \alpha_{n-1} & \alpha_n\end{pmatrix}^\top$ зависит аффинным образом от некоторого векторного параметра

$$a \doteq \begin{pmatrix}a_0 & \dots & a_{n-1}\end{pmatrix}^\top, \quad \tilde{\alpha} = Da + d, \tag{13}$$

где матрица $D \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$ и столбец $d \in \mathbb{R}^{(n+1)\times 1}$ заданы, $\operatorname{rank}\begin{pmatrix}D & d\end{pmatrix} = n+1$. Тогда в формулах (7), (11), (12) следует заменить α на a, матрицу V_1 и столбец V_2 соответствено на матрицу $W_1 \doteq \left(\begin{array}{c|c} V_1 & V_2\end{array}\right) D$ и столбец $W_2 \doteq \left(\begin{array}{c|c} V_1 & V_2\end{array}\right) d$ [7].

Линейное соотношение (10) применимо в предельном случае малых возмущений $\sigma \to 0$. Остается открытым вопрос, для каких величин σ линейное приближение $\Delta\hat{\alpha} = S^\top \Delta z$ зависимости $\Delta\hat{\alpha}(\Delta z)$ и соответствующая оценка (10) сохраняют актуальность. Известные теоретические оценки допустимых σ крайне малы [7]. В рассматриваемом ниже примере адекватность соотношения (10) проверяется вычислительным экспериментом.

3. Пример К. Ланцоша

Рассмотрим пример К. Ланцоша ([8], гл. IV, раздел 23) неустойчивости задачи восстановления трех экспонент при погрешности в третьем разряде наблюдений f. Дан точный процесс

$$z(t) = 0.0951e^{-t} + 0.8607e^{-3t} + 1.5576e^{-5t}, \tag{14}$$

описываемый дифференциальным уравнением

$$z''' + a_2 z'' + a_1 z' + a_0 z = 0 \tag{15}$$

с «истинными» значениями коэффициентов

$$a_2 = 9, \quad a_1 = 23, \quad a_0 = 15. \tag{16}$$

Для восстановления показателей и амплитуд экспонент используются наблюдения $f_k = z_k + \Delta z_k$, $k = 1,\dots,24$ процесса $z(t)$ в равноотстоящие с шагом $h = 0.05$ моменты времени с ошибками округления Δz_k (табл. 1).

Решая задачу, К. Ланцош получил аппроксимацию $\hat{z}$:

$$\hat{z}_k = 2.202\, e^{-4.45\, kh} + 0.305\, e^{-1.58\, kh}, \quad k = \overline{1,24}. \tag{17}$$

Простая проверка показывает, что расхождения между найденным решением $\hat{z}$ и наблюдениями f нигде не превышают 0.006, а среднее отклонение равно 0.0026, что не превышает пределов ошибок данных, при этом в полученной функции (17) не просто утеряна третья экспонента с показателем $-5t$, но ее отсутствие оказало влияние на показатели двух других экспонент. Отношение амплитуд экспонент также искажено.

Таблица 1. Данные наблюдений

k	f_k	k	f_k	k	f_k	k	f_k
1	2.51	7	0.77	13	0.27	19	0.11
2	2.04	8	0.64	14	0.23	20	0.10
3	1.67	9	0.53	15	0.20	21	0.09
4	1.37	10	0.45	16	0.17	22	0.08
5	1.12	11	0.38	17	0.15	23	0.07
6	0.93	12	0.32	18	0.13	24	0.06

Рассмотрение случая, когда заранее известно число экспонент в искомой функции, также не дает решения, близкого к истинному; полученная К. Ланцошем функция из трех экспонент имеет вид

$$\hat{z}_k = 0.041\, e^{-0.50\, kh} + 0.79\, e^{-2.73\, kh} + 1.68\, e^{-4.96\, kh},$$

также с отличием от наблюдений в пределах ошибок данных.

Анализируя полученные решения, К. Ланцош делает вывод, что никакие математические методы не смогут привести к лучшим результатам, т. к. проблема сокрыта именно в округлениях наблюдений.

Далее обоснуем этот вывод К. Ланцоша на основе соотношения (10) и вычислим погрешности наблюдений, при которых можно получить приемлемые по точности значения коэффициентов дифференциального уравнения (15) и показателей экспонент в выражении (14).

Будем использовать аффинное приближение вида (13) для связи коэффициентов разностного (2) и дифференциального (15) уравнений (следствие формул (21), (23), (25) из [18]):

$$\tilde{\alpha} = T^{-\top}\tilde{a}, \quad \tilde{a} = \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \doteq D_a a + d_a, \tag{18}$$

$$T \doteq \|t_{ij}\|_{i,j\in\overline{1,n+1}}\,, \quad t_{ij} = \frac{\left(-\frac{n}{2}h + (i-1)\,h\right)^{j-1}}{(j-1)!},$$

$$D = T^{-\top}D_a, \quad d = T^{-\top}d_a.$$

Заметим, что ввиду приближенности дискретизации (18) никакое решение разностного уравнения (2) с коэффициентами $\tilde{\alpha}$ (18) точно не совпадает с функцией $z(t)$ (14) в узлах сетки $t_k = kh$. Поэтому выберем решение $\hat{z}_*$, ближайшее к точному z_* (14), и назовем $\hat{z}_*$ эталоном, прибавляя в вычислительных экспериментах возмущения к эталону. Этим будет обеспечено, что при уменьшении возмущений до нуля получаемое в результате решения обратной задачи разностное уравнение будет иметь решение, совпадающее с эталоном, и коэффициенты a из формул (18) будут совпадать при нулевых возмущениях с «истинными» значениями (16).

Эталонное решение $\hat{z}_*$ вычисляем из точного z_*, взятого в узлах сетки $t_k = kh$ (14), путем проецирования z_* на множество решений разностного уравнения (2) с коэффициентами $\tilde{\alpha}_* = T^{-\top}\begin{pmatrix} 15 & 23 & 9 & 1 \end{pmatrix}^{\top}$. Эта операция соответствует второму шагу решения задачи Прони, см. (8):

$$\hat{z}_* = \left[I - G^\top \left(GG^\top \right)^{-1} G \right] z_*, \quad G = G(\tilde{\alpha}_*).$$

Для расчетов допустимой погрешности в наблюдениях f при идентификации коэффициентов a (18) дифференциального уравнения (15) с заданной точностью $p = \frac{\|\Delta a\|_{\max}}{\|a\|} = 0.1$ использовались формулы (10) – (12) с учетом замечания 1. В результате получено, что допустимая погрешность наблюдений при решении полной задачи Прони ограничена величиной

$$\|\Delta z\|_{\max}^{\text{ПП}} \simeq 3.2 \cdot 10^{-5}. \tag{19}$$

Если использовать метод наименьших квадратов, то получится на порядок менее выгодное значение

$$\|\Delta z\|_{\max}^{\text{МНК}} \simeq 3.6 \cdot 10^{-6}. \tag{20}$$

Теоретические расчеты подтверждаются результатами моделирования. Для минимизации ЦФ ПП использовался вычислительный алгоритм E73-HP [9]. В табл. 2 приведены средние значения для норм относительных отклонений вектора параметров a (13) и показателей экспонент от истинных значений (16), $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = -5$. Усреднение проводилось по $M = 100$ экспериментам с независимыми случайными наблюдениями $f_{(i)} = \hat{z}_* + \Delta z_{(i)}$, $i \in \overline{1, M}$. Возмущения $\Delta z_{(i)}$ были распределены равномерно на интервале $[-\sigma, \sigma]$. Относительные отклонения $|\Delta_{\text{отн}}\, x|$ оценок $x \in \left\{ \hat{a}, \hat{\lambda}_{1\div 3} \right\}$ вычислялись по формуле $|\Delta_{\text{отн}}\, x| \doteq \overline{\frac{\|x - x_*\|}{\|x_*\|}}$, где x_* — истинное значение, а черта означает усреднение по M экспериментам. В теле таблицы в числителях приведены результаты расчетов с ЦФ ПП, в знаменателях — с ЦФ МНК. Если относительное смещение $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|}$ превышало единицу, то данные заменялись звездочками $***$. Для уровней возмущений вблизи теоретических границ (19), (20) отличия относительных смещений оценок с ЦФ ПП, МНК от расчетной величины $p = 0.1$ оказываются несущественными.

В аналогичных расчетах для разностного уравнения (когда в (18) заменяется T на I и, соответственно, a на α) для разбросов оценок корней $\lambda_{1\div 3}$ в показателях экспонент (14) получаются качественно те же результаты, что и в табл. 2. Разбросы оценок коэффициентов α разностного уравнения получаются на порядок меньше, чем разбросы оценок коэффициентов a дифференциального уравнения. Допустимые погрешности наблюдений (19) и (20) для оценок коэффициентов разностного уравнения получаются на порядок более выгодными, чем для коэффициентов дифференциального уравнения ($4.7 \cdot 10^{-4}$ в (19) и $5.5 \cdot 10^{-5}$ в (20)).

Заключение

Количественные показатели локальной устойчивости решения выступают как удобный инструмент для сравнения целевых функций в задаче аппроксимации данных измерений. В статье на основе линейных приближений получены выражения для констант локальной устойчивости решений задачи Прони при использовании целевой функции МНК по норме невязки уравнения и вариационной целевой функции по норме ошибки аппроксимации. Исходя из полученных выражений на примере задачи К. Ланцоша показано, что для восстановления коэффициентов и корней характеристического многочлена дифференциального уравнения, решения которого наилучшим образом аппроксимируют данные возмущенных

Таблица 2. Результаты оценивания коэффициентов и корней характеристического многочлена ДУ для целевых функций ПП (в числителе) и МНК (в знаменателе); $***$ — относительное смещение > 1

σ	$\lvert\Delta_{\text{отн}}\hat{a}\rvert$ $\frac{\text{ПП}}{\text{МНК}}$	$\lvert\Delta_{\text{отн}}\hat{\lambda}_3\rvert$ $\frac{\text{ПП}}{\text{МНК}}$	$\lvert\Delta_{\text{отн}}\hat{\lambda}_2\rvert$ $\frac{\text{ПП}}{\text{МНК}}$	$\lvert\Delta_{\text{отн}}\hat{\lambda}_1\rvert$ $\frac{\text{ПП}}{\text{МНК}}$
$3 \cdot 10^{-7}$	$\frac{4.1 \cdot 10^{-4}}{3.9 \cdot 10^{-3}}$	$\frac{5.8 \cdot 10^{-6}}{4.7 \cdot 10^{-5}}$	$\frac{1.3 \cdot 10^{-4}}{1.2 \cdot 10^{-3}}$	$\frac{5.3 \cdot 10^{-4}}{5.1 \cdot 10^{-3}}$
$3 \cdot 10^{-6}$	$\frac{4.6 \cdot 10^{-3}}{3.6 \cdot 10^{-2}}$	$\frac{7.2 \cdot 10^{-5}}{4.9 \cdot 10^{-4}}$	$\frac{1.5 \cdot 10^{-3}}{1.1 \cdot 10^{-2}}$	$\frac{5.9 \cdot 10^{-3}}{4.7 \cdot 10^{-2}}$
$3 \cdot 10^{-5}$	$\frac{0.043}{0.47}$	$\frac{5.8 \cdot 10^{-4}}{1.5 \cdot 10^{-2}}$	$\frac{0.013}{0.20}$	$\frac{0.055}{0.45}$
$3 \cdot 10^{-4}$	$\frac{0.37}{***}$	$\frac{0.0091}{***}$	$\frac{0.12}{0.71}$	$\frac{0.44}{***}$

наблюдений, предпочтительней использовать вариационную целевую функцию. Дальнейшие исследования направлены на изучение допустимых уровней возмущений в данных, при которых полученные по линейным приближениям оценки констант устойчивости сохраняют актуальность.

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Литература

1. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 265 с.

2. Бердышев В.И., Петрак Л.В. Аппроксимация функций, сжатие численной информации, приложения. Екатеринбург: Уро РАН, 1999. 296 с.

3. Householder A.S. On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival curves. Oak Ridge National Lab. Report ORNL–455. 1950. Oak Ridge, Tennessee. URL: `http://www.technicalreports.org/trail/detail/11105` (дата обращения: 15.12.2021).

4. Егоршин А.О. Метод наименьших квадратов и «быстрые» алгоритмы в вариационных задачах идентификации и фильтрации (метод ВИ) // Автометрия. 1988. № 1. С. 30–42. URL: `http://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/1988/1/30-42.pdf` (дата обращения: 15.12.2021).

5. Fuller W.A. Measurement Error Models. New York: Wiley, 1987. 440 p. DOI: 10.1002/9780470316665.

6. Ломов А.А. О количественных априорных показателях идентифицируемости коэффициентов линейных динамических систем // Известия РАН ТСУ. 2011. № 1. С. 3–15. DOI: 10.1134/S106423071101014X.

7. Ломов А.А., Федосеев А.В. Сравнение методов параметрической идентификации линейных динамических систем в условиях смешанных возмущений // Сибирский журнал чистой и прикладной математики. 2018. Т. 18, № 3. С. 45–59. DOI: 10.17377/PAM.2018.18.6.

8. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. Справочное руководство. М.: Физматгиз, 1961. 524 с.

9. Ломов А.А. О сходимости вычислительных алгоритмов в вариационной задаче идентификации коэффициентов разностных уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2020. Т. 83, № 3. С. 77–90. DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.307.

10. de Prony G. Essai éxperimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures // Journal de l'école Polytechnique. 1795. Vol. 1, no. 22. P. 24–76. URL: `http://users.polytech.unice.fr/~leroux/PRONY.pdf` (дата обращения: 15.12.2021).

11. Mitrofanov G., Priimenko V. Prony Filtering of Seismic Data // Acta Geophysica. 2015. Vol. 63, no. 3. P. 652–678. DOI: 10.1515/acgeo-2015-0012.

12. Коломейцева А.В., Мишугова Г.В., Мул А.П., Рябых Г.Ю. Применение вейвлет-преобразования и метода Прони для идентификации биогенных сигналов // Вестник ДГТУ. 2010. Т. 10, № 4. С. 455–465.

13. Bjorck A. Numerical methods for least squares problems. USA: SIAM, 1996. 425 p. DOI: 10.1137/1.9781611971484.ch1.

14. Keller I., Plonka G. Modifications of Prony's Method for the Recovery and Sparse Approximation with Generalized Exponential Sums // Approximation Theory XVI / ed. by G.E. Fasshauer, M. Neamtu, L.L. Schumaker. Cham: Springer International Publishing, 2021. P. 123–152. DOI: 10.1007/978-3-030-57464-2_7.

15. Osborne M.R. A class of nonlinear regression problems // Data representation / ed. by R.S. Anderssen, M.R. Osborne. St. Lucia: University of Queensland Press, 1970. P. 94–101.

16. Егоршин А.О., Будянов В.П. Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ // Автометрия. 1973. № 1. С. 78–82. URL: `https://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/1973/1/78-82.pdf` (дата обращения: 15.12.2021).

17. Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления: оптимизация, оценка и управление. М.: Мир, 1972. 544 с.

18. Егоршин А.О. О дискретизации линейных дифференциальных уравнений // Вестник ЮУрГУ. Серия: Матем. моделирование и программирование. 2012. Т. 40(299), № 14. С. 59–72. URL: `https://mmp.susu.ru/article/en/179` (дата обращения: 15.12.2021).

Ломов Андрей Александрович, д.ф.-м.н., доцент, с.н.с. Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, профессор кафедры теоретической кибернетики механико-математического факультета и кафедры компьютерных систем факультета информационных технологий Новосибирского государственного университета (национальный исследовательский университет) (Новосибирск, Российская Федерация)

Русинова Елизавета Александровна, магистрант кафедры теоретической кибернетики механико-математического факультета Новосибирского государственного университета (национальный исследовательский университет) (Новосибирск, Российская Федерация)

DOI: 10.14529/cmse220202

COMPARISON OF THE TARGET FUNCTIONS IN THE PRONY'S PROBLEM OF MEASUREMENT DATA APPROXIMATION

© 2022 A.A. Lomov[1,2] , E.A. Rusinova[2]

[1]*Sobolev Institute of Mathematics (pr. Acad. Koptyuga 4, Novosibirsk, 630090 Russia),*

[2]*Novosibirsk State University (Pirogova str. 1, Novosibirsk, 630090 Russia)*

E-mail: lomov@math.nsc.ru, a.lomov@g.nsu.ru

Received: 13.01.2022

In the article, we compare two objective functions in the Prony's problem of approximation of measurement data by solutions of a linear differential equation of a given order with constant coefficients. The target functions differ in the type of dependence of the gradient on the coefficients of the equation (linear or with complex nonlinearity) and are 1) the norm of the residual of the equation (linear least squares method) or 2) the norm of the approximation error according to A. Householder (variational identification method). In the latter case, the coefficients of the differential equation and the initial conditions of the solution are jointly optimized. For the considered objective functions, the local stability constants of the solution to the Prony's problem are calculated using local expansions of the dependencies of the optimal coefficients of the equation as implicit functions of the data with the condition that the gradient of the objective function is identically equal to zero. On this basis, a method is proposed for determining the permissible error in the data to ensure a given level of deviation of the solution from the true value. We use the example of K. Lanczos of calculating the exponents given observations of the sum of three exponents with rounding errors to confirm a significant advantage (in terms of the allowable errors in the data) of using the variational objective function. The adequacy of the used local stability indices for considerable perturbations is verified by numerical experiment.

Keywords: measurement data approximation, Prony's problem, C. Lanczos example of separation of exponentials, local stability, least squares method, variational method.

FOR CITATION

Lomov A.A., Rusinova E.A. Comparison of the Target Functions in the Prony's Problem of Measurement Data Approximation. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2022. Vol. 11, no. 2. P. 18–29. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse220202.

References

1. Marple S.L. Digital spectral analysis: with applications. USA: Prentice-Hall, 1986. 492 p.

2. Berdyshev V.I., Petrak L.V. Function approximation, compression of numerical information, applications. Ekaterinburg: UB RAN, 1999. 296 p. (in Russian)

3. Householder A.S. On Prony's method of fitting exponential decay curves and multiple-hit survival curves. Oak Ridge National Lab. Report ORNL–455. 1950. Oak Ridge, Tennessee. URL: `http://www.technicalreports.org/trail/detail/11105` (accessed: 15.12.2021).

4. Egorshin A.O. Least squares method and the "fast" algorithms in variational problems of identification and filtration (VI method). Avtometriya. 1988. No. 1. P. 30–42.

(in Russian). URL: http://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/1988/1/30-42.pdf (accessed: 15.12.2021).

5. Fuller W.A. Measurement Error Models. New York: Wiley, 1987. 440 p.
6. Lomov A.A. On Quantitative A Priori Measures of Identifiability of Coefficients of Linear Dynamic Systems. Journal of Computer and System Sciences International. 2011. Vol. 50, no. 1. P. 1–13. DOI: 10.1134/S106423071101014X.
7. Lomov A.A., Fedoseev A.V. Comparison of Parameter Identification Methods for Linear Dynamic Systems Under Mixed Noise. Springer Journal of Mathematical Sciences. 2021. Vol. 253, no. 3. P. 407–418. DOI: 10.1007/s10958-021-05238-0.
8. Lanczos C. Applied analysis. USA: Prentice Hall, 1956. 539 p.
9. Lomov A.A. On Convergence of Computational Algorithms for a Variational Problem of Identifying the Coefficients of Difference Equations. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2020. Vol. 14, no. 3. P. 541–554. DOI: 10.1134/S1990478920030138.
10. de Prony G. Essai éxperimental et analytique: sur les lois de la dilatabilité de fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l'alkool, à différentes températures. Journal de l'école Polytechnique. 1795. Vol. 1, no. 22. P. 24–76. URL: http://users.polytech.unice.fr/~leroux/PRONY.pdf (accessed: 15.12.2021).
11. Mitrofanov G.M., Priimenko V.I. Basics and Applications of the Prony filtering. Tehnologii seismorazvedki. 2011. No. 3. P. 93–108. (in Russian)
12. Kolomeytseva A.V., Mishugova G.V., Mool A.P., Ryabykh G.Yu. Application of the wavelet transform and the Prony method for the identification of biogenic signals. Vestnik DGTU. 2010. Vol. 10, no. 4. P. 455–465. (in Russian)
13. Bjorck A. Numerical methods for least squares problems. USA: SIAM, 1996. 425 p. DOI: 10.1137/1.9781611971484.ch1.
14. Keller I., Plonka G. Modifications of Prony's Method for the Recovery and Sparse Approximation with Generalized Exponential Sums. Approximation Theory XVI / ed. by G.E. Fasshauer, M. Neamtu, L.L. Schumaker. Cham: Springer International Publishing, 2021. P. 123–152. DOI: 10.1007/978-3-030-57464-2_7.
15. Osborne M.R. A class of nonlinear regression problems. Data representation / ed. by R.S. Anderssen, M.R. Osborne. St. Lucia: University of Queensland Press, 1970. P. 94–101.
16. Egorshin A.O., Budyanov V.P. Smoothing of signals and estimation of dynamic parameters in automatic systems using a digital computer. Avtometriya. 1973. No. 1. P. 78–82. (in Russian) URL: https://www.iae.nsk.su/images/stories/5_Autometria/5_Archives/1973/1/78-82.pdf (accessed: 15.12.2021).
17. Bryson A.E., Ho Y.-C. Applied Optimal Control: Optimization, Estimation and Control. Waltham, MA: Blaisdell. 1969. 481 p.
18. Egorshin A.O. On discretization of linear differential equations. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 2012. Vol. 40(299), no. 14. P. 59–72. (in Russian) URL: https://mmp.susu.ru/article/en/179 (accessed: 15.12.2021).