

# СГЛАЖИВАНИЕ ЛОМАНЫХ ЛИНИЙ СОСТАВНЫМИ СПЛАЙНАМИ БЕЗЬЕ

© 2022 В.А. Ромакин

*Институт проблем управления им. В.А.Трапезникова РАН*

*(117997 Москва, ул. Профсоюзная, д. 65)*

*E-mail: insight.ru@gmail.com*

Поступила в редакцию: 08.08.2022

В работе рассматривается новый итеративный метод построения на плоскости гладкого сплайна, состоящего из кубических кривых Безье и повторяющего форму заданной ломаной линии с требуемой точностью. На каждой итерации метода выполняются следующие операции: выбор количества узлов интерполяции сплайна, размещение их на заданной ломаной линии по определенному правилу, построение гладкого составного сплайна Безье, проходящего через эти узлы, и оценка точности аппроксимации, то есть, близости построенного сплайна и заданной ломаной линии. Выбор положения узлов интерполяции сплайна на заданной ломаной линии выполняется с помощью сопоставления мер близости смежных кривых Безье, из которых состоит сплайн, и участков ломаной линии, которые аппроксимируют эти кривые. Приводятся примеры сглаживания ломаных линий различной сложности, в том числе ломаных линий с самопересечениями, подтверждающие эффективность предложенного метода. Результаты работы можно использовать в различных приложениях, например, при построении траектории движения автоматических транспортных средств и мобильных роботов, при проектировании технических объектов в системах автоматизированного проектирования, при картографической генерализации линейных картографических объектов, при проектировании шрифтов и др.

*Ключевые слова: сглаживание ломаных линий, составные сплайны, кривые Безье, мера близости, интерполяция, аппроксимация.*

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Ромакин В.А. Сглаживание ломаных линий составными сплайнами Безье // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2022. Т. 11, № 4. С. 37–50. DOI: 10.14529/cmse220403.

## Введение

Задача сглаживания ломаных линий возникает в различных приложениях, например, при построении траектории движения автоматических транспортных средств и мобильных роботов [1–3], при проектировании технических объектов в системах автоматизированного проектирования [4], при картографической генерализации линейных картографических объектов [5, 6], при проектировании шрифтов [7], при распознавании образов [8], при обработке результатов вычислительных или натуральных экспериментов [9] и др.

В настоящей работе под сглаживанием ломаной линии подразумевается построение гладкой кривой, которая достаточно точно повторяет форму этой ломаной линии. В качестве гладкой кривой рассматривается составной сплайн, состоящий из нескольких кубических кривых Безье. Порядок кривых Безье выбран таким, чтобы, с одной стороны, обеспечить гладкость сплайна, а с другой — снизить вычислительную сложность алгоритмов при программной реализации.

Один из важных вопросов при построении составного сплайна заключается в том, сколько кривых Безье должен содержать сплайн и как именно расположить на плоско-

сти опорные точки этих кривых, чтобы обеспечить достаточную точность сглаживания ломаной линии.

В известных методах сглаживания ломаных линий с помощью сплайнов сначала проводится предварительное упрощение ломаной линии, т.е. удаление из ломаной линии части вершин, затем в оставшихся вершинах размещаются узлы интерполяции и контрольные точки кривых, и далее по этим узлам строится сплайн. Например, в [7] в заданной ломаной линии определяются особые, так называемые угловые вершины, используемые в дальнейшем для построения составного кубического сплайна Безье. В [1] из заданной ломаной линии удаляются вершины, не попадающие в заданный линейный допуск, после чего через оставшиеся вершины проводится составной кубический сплайн Безье. В [3, 10] перед построением составного сплайна Безье из заданной ломаной линии вместо каждого подмножества близко расположенных вершин ломаной линии оставляется только одна вершина. В [5] предлагается предварительно упрощать заданную ломаную линию с использованием алгоритма Свентека с оценкой значимости исходных вершин и удалением вершин с низкой значимостью. В [9] заданная ломаная линия упрощается с использованием модифицированного алгоритма упрощения линейных данных Дугласа—Пейкера с адаптивной шириной коридора. В [8] вдобавок к наиболее значимым вершинам ломаной линии добавляются дополнительные вершины ломаной линии, которые служат для снижения неравномерности расстояний между соседними значимыми вершинами.

В перечисленных методах предлагается проводить сплайн через некоторое множество вершин исходной ломаной линии. В настоящей работе предлагается метод, в котором решается размещать узлы интерполяции сплайна не только на вершинах исходной ломаной линии, но и в любой точке ломаной линии. Отличительная особенность метода состоит в том, что он автоматически выбирает количество узлов интерполяции и их положение на ломаной линии таким образом, чтобы составной сплайн проходил как можно ближе к этой линии. Поскольку узлы интерполяции сплайна могут быть размещены в любой точке ломаной линии, то предварительного упрощения или разбиения ломаной линии не требуется.

Дальнейшее изложение статьи построено следующим образом. В разделе 1 описан предлагаемый метод сглаживания ломаных линий. В разделе 2 рассмотрены особенности программной реализации метода. В разделе 3 приведены примеры сглаживания ломаных линий с использованием предложенного метода. В заключении содержатся основные полученные результаты.

## 1. Итеративный метод сглаживания ломаных линий

В настоящей работе предлагается новый итеративный метод построения гладкого сплайна, состоящего из кубических кривых Безье и аппроксимирующего заданную ломаную линию с требуемой точностью. На каждой итерации выполняются следующие операции: выбор количества узлов интерполяции сплайна, размещение их на заданной ломаной линии, построение проходящего через них гладкого составного сплайна Безье и оценка точности аппроксимации.

Пусть задана ломаная линия  $P_1P_2 \dots P_M$ , см. рис. 1а. Зафиксируем количество узлов интерполяции сплайна  $N \geq 3$  и равномерно расположим узлы интерполяции  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  на ломаной линии, так чтобы два крайних узла  $Q_1$  и  $Q_N$  совпадали соответственно с начальной и конечной вершинами ломаной линии  $P_1$  и  $P_M$ , а длины участков ломаной линии между соседними узлами  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$  были равны друг другу ( $i = 1, \dots, N-1$ ). Построим гладкий

сплайн, проходящий через выбранные узлы интерполяции. Для этого воспользуемся известным способом построения гладкого сплайна, проходящего через  $N$  заданных точек (узлов интерполяции) и состоящего из  $N - 1$  кубической кривой Безье  $B_i$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ) [11]. Исходными данными в этом способе являются узлы интерполяции  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ , а координаты контрольных точек кривых Безье вычисляются с помощью системы из  $2N - 2$  линейных уравнений, решение которой обеспечивает непрерывность первой и второй производной сплайна в узлах интерполяции. На рис. 1б показано исходное размещение узлов интерполяции (обозначены красными точками) для заданной ломаной линии при  $N = 5$  и сплайн, проходящий через эти узлы и состоящий из четырех кривых Безье (обозначен коричневым цветом).

Вычислим  $\Delta$  — меру близости построенного сплайна и заданной ломаной линии. Обозначим через  $L_i$  участок ломаной линии между узлами интерполяции  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ). Будем вычислять  $\Delta$  как сумму  $\Delta_1 + \dots + \Delta_{N-1}$ , где  $\Delta_i$  — мера близости кривой Безье  $B_i$  и участка ломаной линии  $L_i$ , который аппроксимируется кривой  $B_i$ . В качестве  $\Delta_i$  можно использовать, например, площадь области, ограниченной кривой Безье  $B_i$  и участком ломаной линии  $L_i$  (далее в работе используется именно эта мера), или расстояние Фреше между  $B_i$  и  $L_i$  ( $i = 1, \dots, N - 1$ ). Если вычисленное  $\Delta$  превышает допустимое значение, то будем считать точность аппроксимации недостаточной и попытаемся повысить ее, изменив расположение узлов интерполяции на ломаной линии. Для каждого промежуточного узла интерполяции  $Q_i$  ( $i = 2, \dots, N - 1$ ) сравним значения  $\Delta_{i-1}$  и  $\Delta_i$ , вычисленные для двух смежных с ним кривых  $B_{i-1}$  и  $B_i$ . Переместим узел интерполяции  $Q_i$  по ломаной линии в направлении узла  $Q_{i+1}$ , если  $\Delta_{i-1} < \Delta_i$ , или в направлении узла  $Q_{i-1}$ , если  $\Delta_{i-1} > \Delta_i$  (то есть, в сторону смежной области с большим значением площади), уменьшая тем самым площадь большей из двух смежных областей. Таким образом, значения  $\Delta_i$  используются, с одной стороны, для оценки точности аппроксимации, а с другой стороны — для итеративного перемещения узлов интерполяции. Расстояние, на которое перемещается узел интерполяции, следует выбирать таким образом, чтобы не нарушалась последовательность размещения промежуточных узлов на ломаной линии. На рис. 1б области между кривыми Безье и соответствующими им участками ломаной линии для наглядности закрашены разными цветами, а положения, в которые будут перемещены узлы интерполяции на следующей итерации, обозначены желтыми точками.

После перемещения всех промежуточных узлов интерполяции снова построим проходящий через них гладкий сплайн и оценим точность аппроксимации. На рис. 1в показан сплайн, построенный на второй итерации после перемещения промежуточных узлов, а желтыми точками обозначены положения, в которые будут перемещены узлы интерполяции на третьей итерации. Продолжим выполнять итерации, см. рис. 1г, д, до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность аппроксимации  $\Delta^*$  или заранее заданное максимальное число итераций  $K^*$ . При необходимости, обусловленной прикладной задачей, помимо оценки точности аппроксимации можно выполнять дополнительные проверки, например, что у построенного сплайна нет самопересечений, что его кривизна не превышает заданного значения, или что он не выходит за пределы заданного коридора.

По результатам итераций, выполненных с зафиксированным значением  $N$ , выберем сплайн с наименьшим значением  $\Delta$ , см. рис. 1е. Если не удастся достичь требуемой точности и выполнения дополнительных условий за максимальное число итераций  $K^*$ , тогда увеличим количество узлов интерполяции  $N$  и повторим всю процедуру заново, начиная

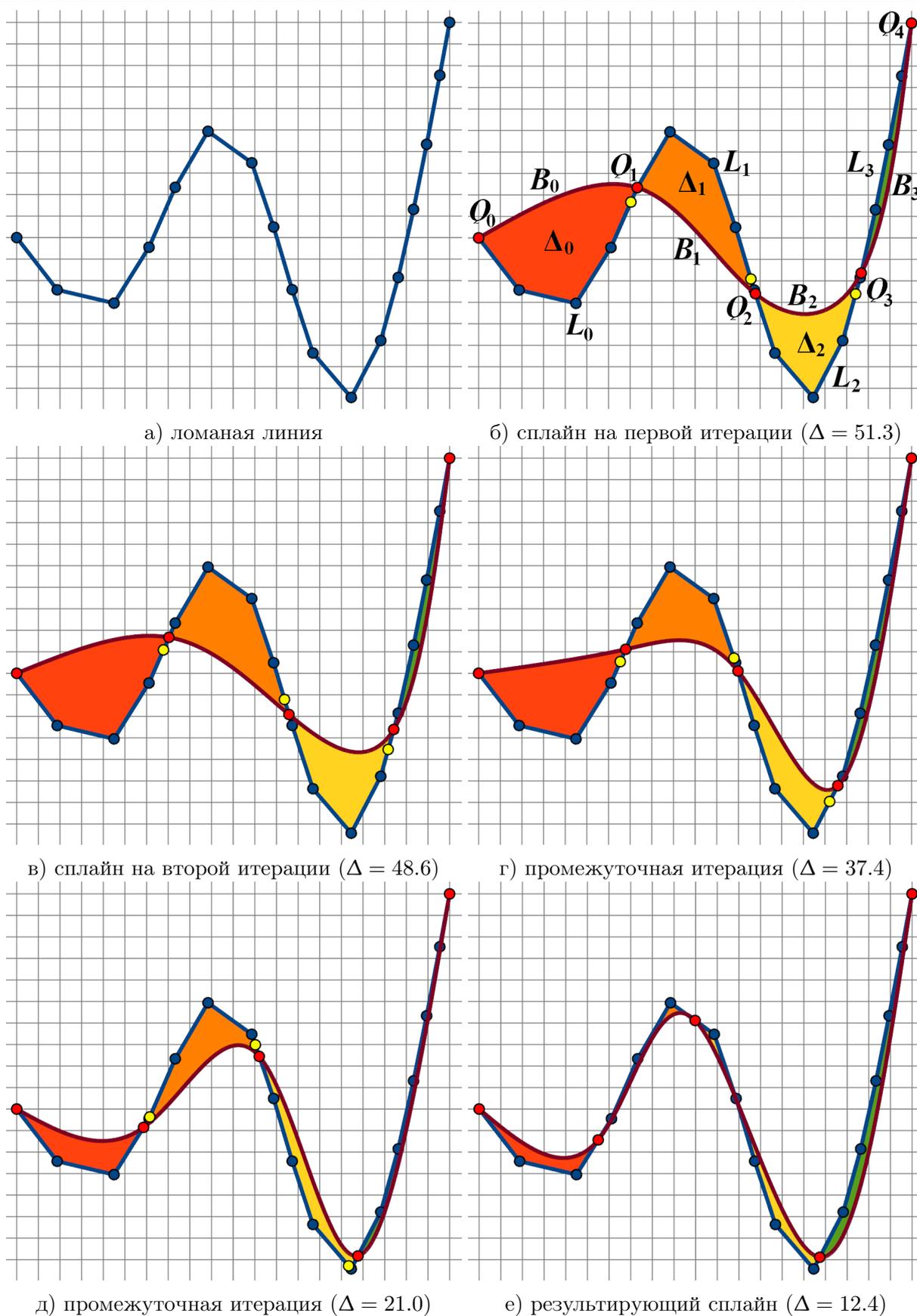


Рис. 1. Сглаживание ломаной линии при фиксированном значении  $N$

с равномерного размещения узлов интерполяции на ломаной линии [4]. Если количество узлов интерполяции  $N$  превысило заранее заданное максимальное количество узлов  $N_{max}$ , тогда будем считать, что при заданных параметрах исходную ломаную линию аппроксимировать предложенным методом невозможно; в этом случае следует изменить параметры метода  $\Delta^*$ ,  $K^*$ ,  $N_{max}$  и коэффициент  $s$ , который будет определен ниже.

Остановимся более подробно на правиле перемещения узлов интерполяции сплайна в сторону смежной области с большим значением меры близости. При  $N = 3$  составной сплайн состоит из двух кривых Безье. В этом случае разрешается перемещение только одного, среднего узла интерполяции. В результате итераций с применением предложенного правила, этот узел будет стремиться к положению, в котором меры близости двух смежных кривых равны. При  $N = 4$  составной сплайн состоит уже из трех кривых Безье. В этом случае разрешается перемещение двух средних узлов интерполяции. В результате итераций с применением предложенного правила, каждый из узлов будет стремиться к положению, в котором меры близости двух смежных с ним кривых равны. А значит, оба узла будут стремиться к такому совокупному положению, в котором меры близости всех кривых Безье, из которых состоит сплайн, равны. И так далее. Таким образом, предложенное правило формирует сплайн, у которого все составляющие кривые приблизительно одинаково близки к соответствующим им участкам ломаной линии. Если одна или несколько кривых менее близки к ломаной линии, то применение правила начинает «проталкивать» соответствующие им узлы интерполяции, а вслед за ними — и другие узлы интерполяции, к такому положению, в котором все кривые имеют приблизительно одинаковую близость к ломаной линии. Количество итераций, которые требуется выполнить для достижения необходимой точности сглаживания, зависит, в том числе, от расстояния, на которое перемещаются узлы интерполяции по ломаной линии на каждой итерации. В рассмотренном примере использовалась следующая формула для расстояния:

$$D_i = s C_i \frac{\max(\Delta_{i-1}, \Delta_i)}{\Delta_{i-1} + \Delta_i}, \quad (1)$$

где  $s$  — коэффициент, определяющий скорость перемещения узлов интерполяции,  $C_i$  — длина отрезка ломаной линии, по которой будет перемещаться узел интерполяции  $Q_i$ . Дробный множитель в правой части построен таким образом, чтобы увеличение разницы между значениями  $\Delta_{i-1}$  и  $\Delta_i$  приводило к увеличению расстояния  $D_i$ . Коэффициент  $s$  влияет на скорость и точность сходимости сплайна к исходной ломаной линии. На рис. 2 показаны графики темпа сходимости сплайна, показанного на рис. 1е, при  $s = 0.1$  и  $s = 0.01$ . Видно, что при большем значении  $s$  выше скорость сходимости, а при меньшем значении  $s$  выше точность аппроксимации. Выбор в пользу скорости или точности сходимости должен определяться прикладной задачей.

## 2. Программная реализация предложенного метода

Разработано программное обеспечение на языке C++, реализующее предложенный метод сглаживания ломаных линий составными сплайнами. На рис. 3 показана блок-схема алгоритма построения составного сплайна. Входными данными для алгоритма являются ломаная линия, заданная координатами своих вершин  $P_i$ , коэффициент  $s$ , определяющий скорость перемещения узлов интерполяции, требуемая точность аппроксимации  $\Delta^*$ , максимальное число итераций  $K^*$ , начальное и максимальное количество узлов сплайна  $N_0$  и  $N_{max}$ . Алгоритм включает два вложенных цикла: внешний цикл перебирает количество

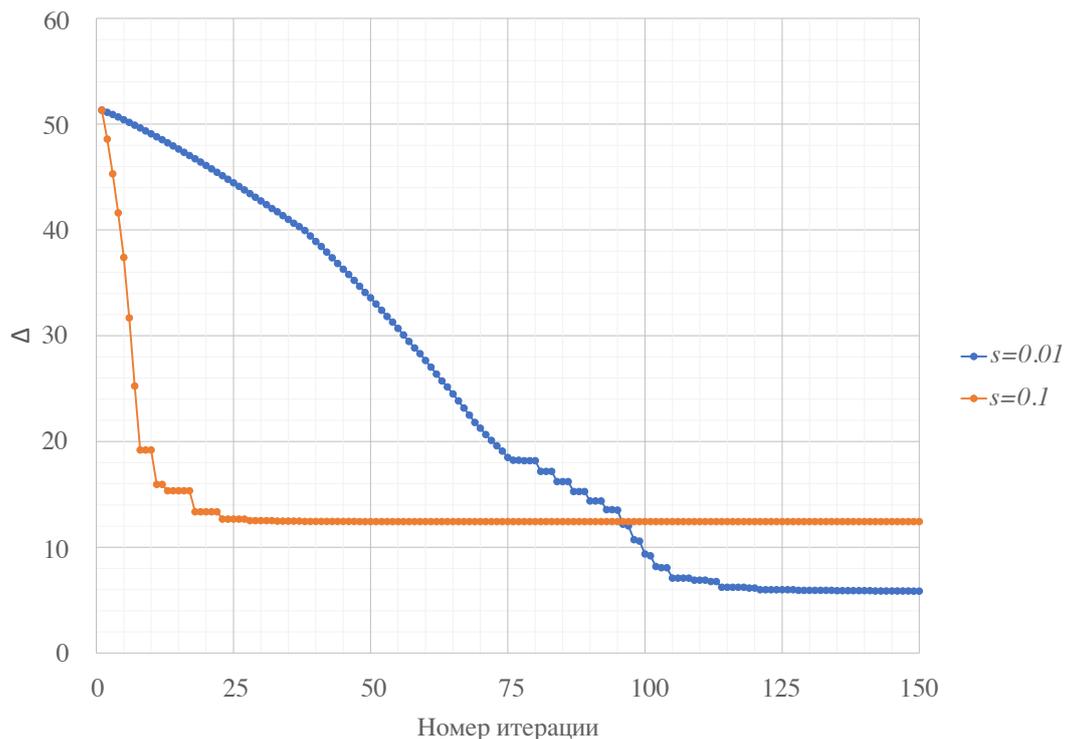


Рис. 2. Сходимость сплайна при различных значениях  $s$

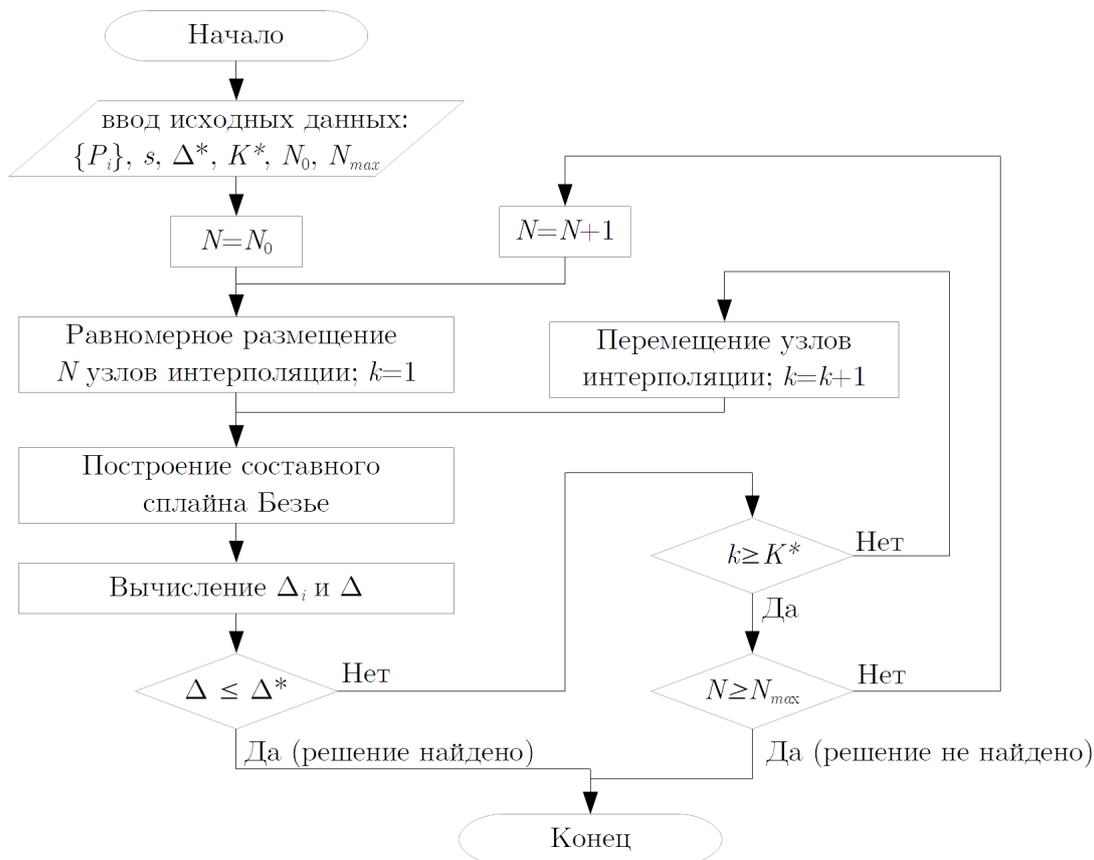


Рис. 3. Блок-схема алгоритма построения сплайна

узлов  $N$  от  $N_0$  до  $N_{max}$ , а внутренний цикл на каждой итерации перемещает  $N$  узлов интерполяции по ломаной линии, строит составной сплайн и вычисляет его меру близости с исходной ломаной линией. Критериями останова являются достижение требуемой точности аппроксимации  $\Delta^*$  или максимального количества узлов сплайна  $N_{max}$ . В первом случае задача считается решенной, во втором случае для получения решения следует изменить параметры метода.

В качестве меры близости  $\Delta_i$  выбрана площадь области между кривой Безье  $B_i$  и соответствующим ей участком ломаной линии  $L_i$ . Вычисление приблизительного значения этой площади выполняется следующим образом. На кривой Безье  $B_i$  равномерно располагается некоторое количество точек  $E_i^1, E_i^2, \dots, E_i^T$ , а на участке ломаной линии  $L_i$  — такое же количество точек  $F_i^1, F_i^2, \dots, F_i^T$  (см. рис. 4). Искомая площадь вычисляется как сумма площадей двух треугольников  $Q_i E_i^1 F_i^1$  и  $Q_{i+1} E_i^T F_i^T$  и  $T - 1$  четырехугольников  $E_i^j F_i^j F_i^{j+1} E_i^{j+1}$  ( $j = 1, \dots, T - 1$ ).

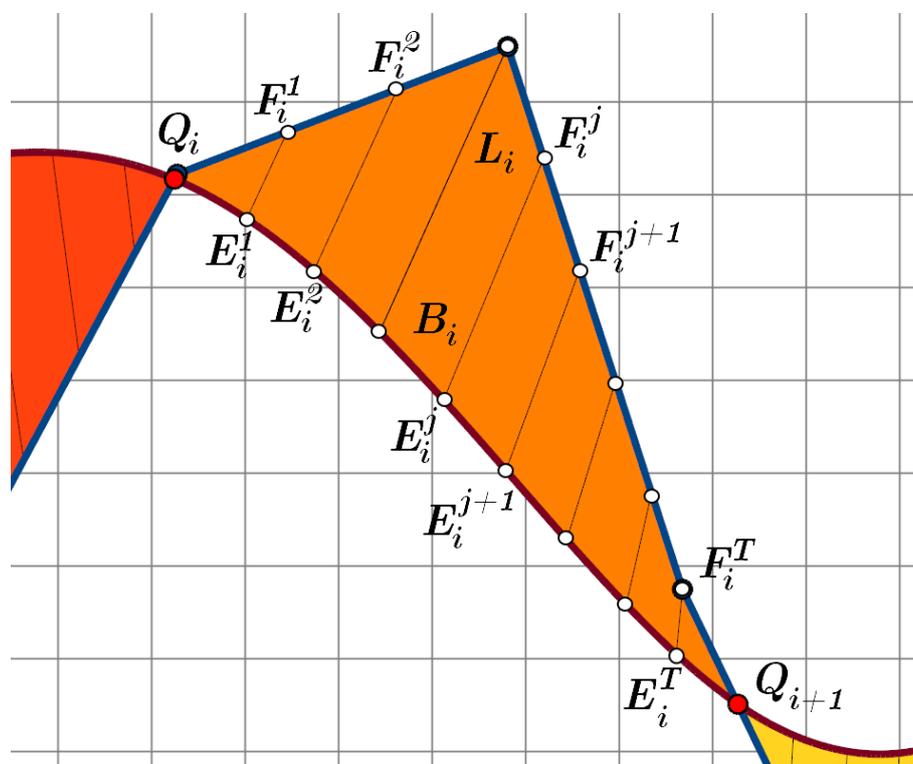


Рис. 4. Аппроксимация меры близости

### 3. Примеры сглаживания ломаных линий

Рассмотрим несколько примеров сглаживания ломаной линии с использованием предложенного метода. Для каждого примера приводится рисунок с исходной ломаной линией, которую требуется сгладить, и сплайнами, полученными в результате выполнения итераций с различным количеством узлов интерполяции. Для каждого сплайна в подписи к рисунку указано количество узлов  $N$  и значение площади  $\Delta$ , равной сумме площадей, ограниченных кривыми Безье и соответствующими им участками ломаной линии. Размер сетки на рисунках равен  $1 \times 1$ .

**Пример 1.** На рис. 5а изображен пример простой ломаной линии в форме буквы «П», а на рис. 5б, в — сплайны, полученные в результате выполнения итераций при фиксированном значении  $N = 5$  и  $6$  соответственно.

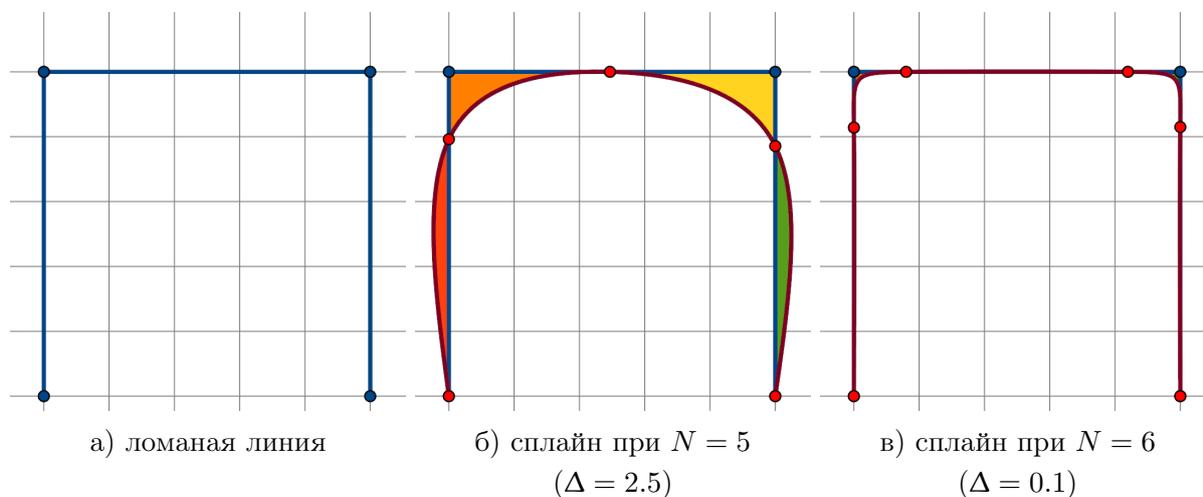


Рис. 5. Пример 1

**Пример 2.** На рис. 6а изображен пример более сложной ломаной линии в форме архимедовой спирали, а на рис. 6б, в — сплайны, полученные в результате выполнения итераций при фиксированном значении  $N = 7$  и  $10$  соответственно.

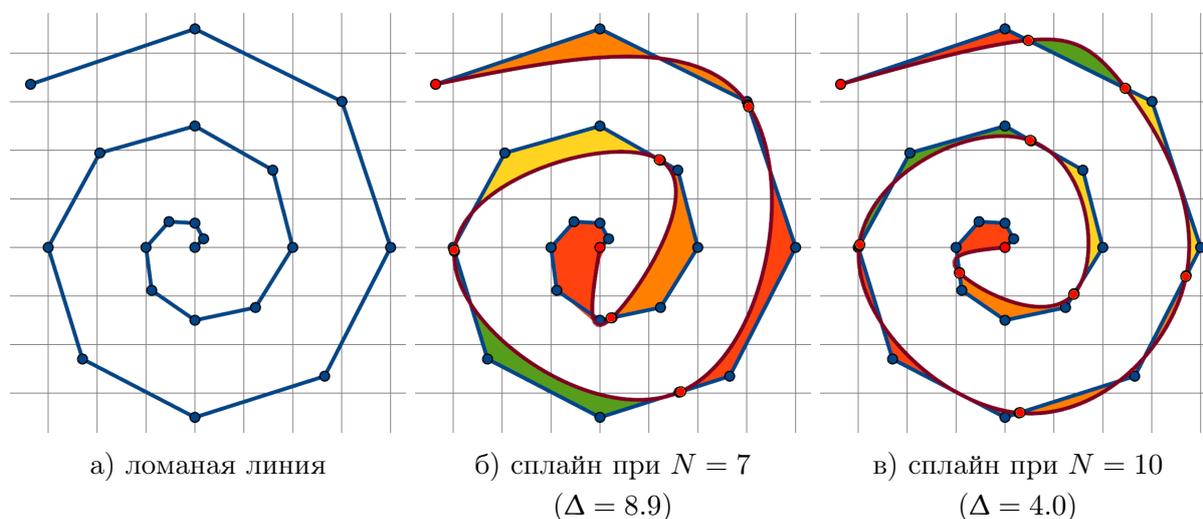


Рис. 6. Пример 2

**Пример 3.** На рис. 7а изображен пример ломаной линии в форме прямоугольной спирали, а на рис. 7б, в — сплайны, полученные в результате выполнения итераций при фиксированном значении  $N = 10$  и  $15$  соответственно.

**Пример 4.** На рис. 8а изображен пример ломаной линии в форме зигзага, а на рис. 8б, в — сплайны, полученные в результате выполнения итераций при фиксированном значении  $N = 9$  и  $14$  соответственно.

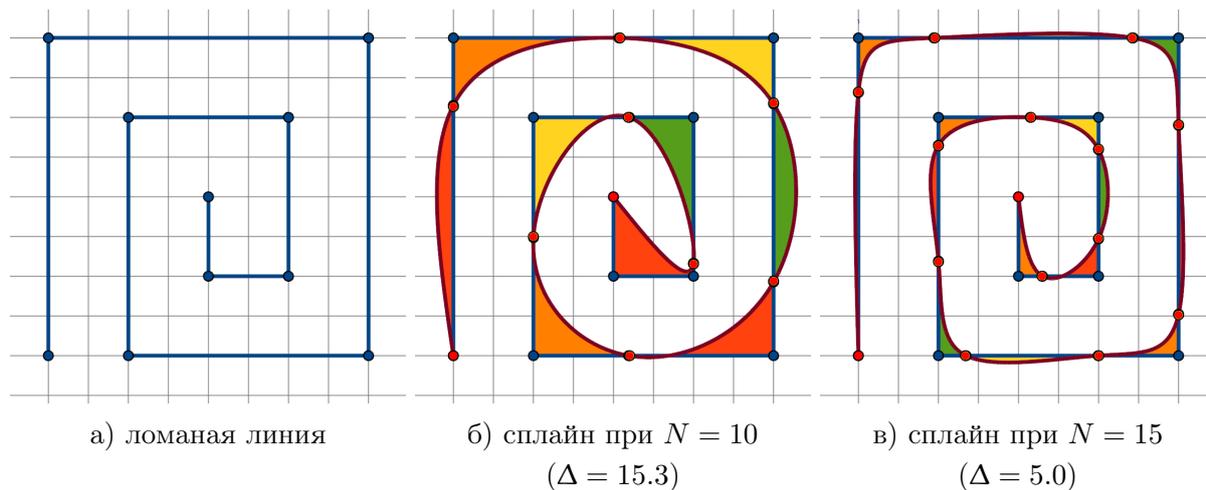


Рис. 7. Пример 3

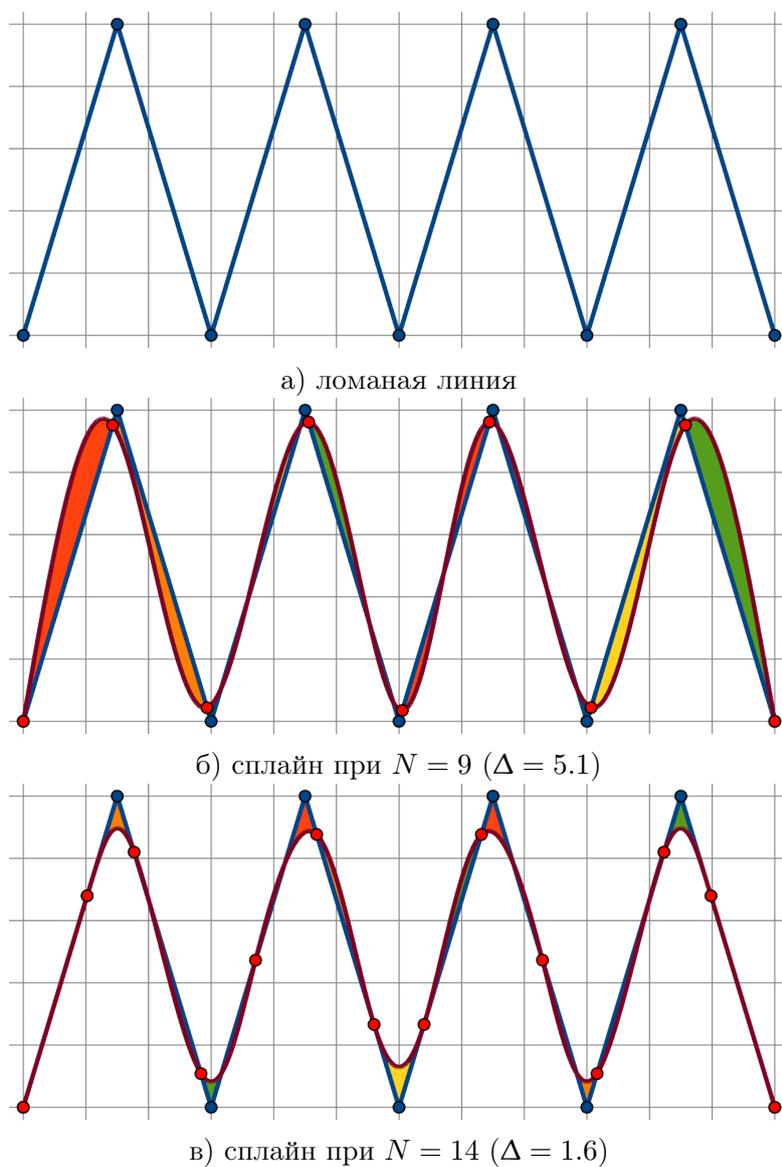
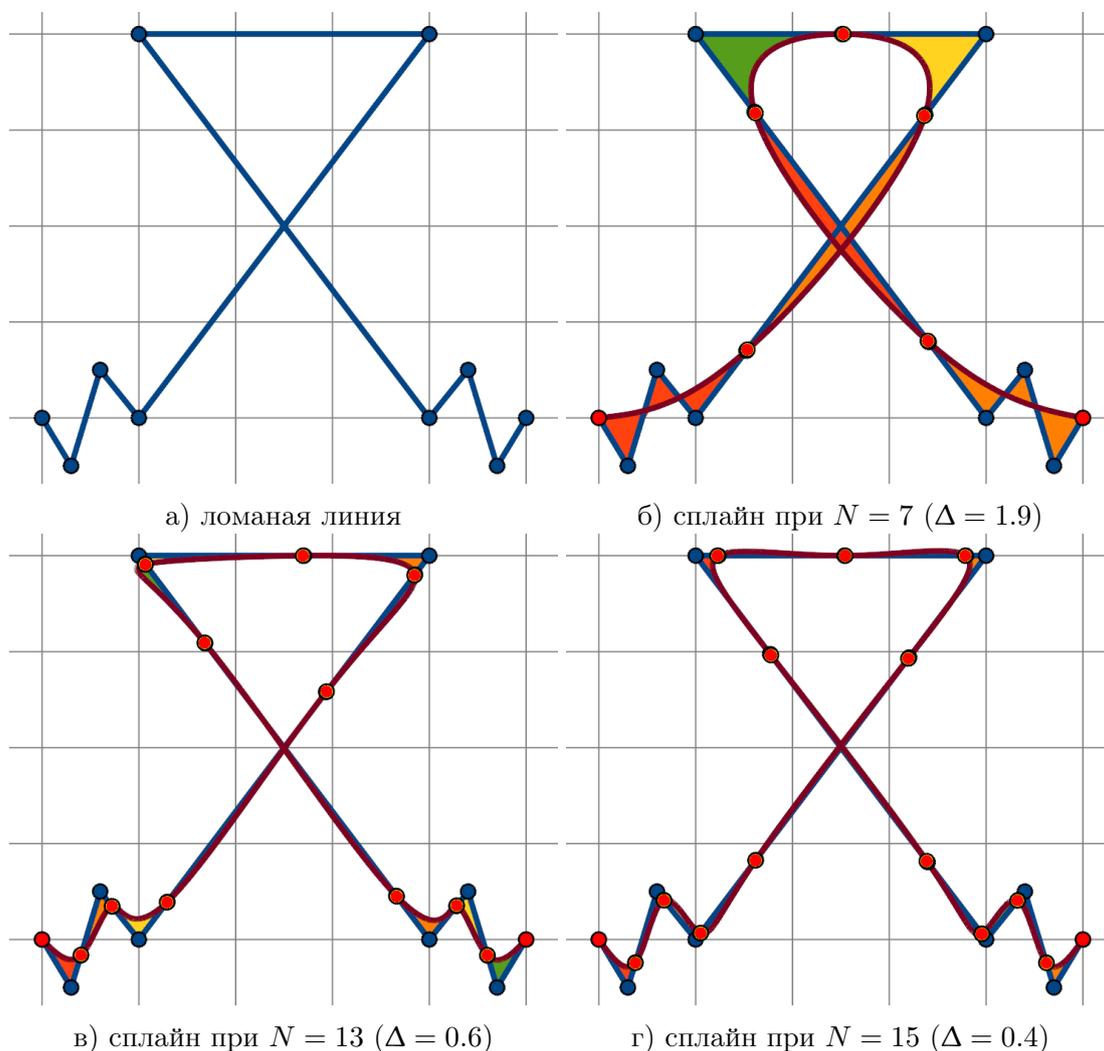


Рис. 8. Пример 4

**Пример 5.** На рис. 9а изображен пример ломаной линии с самопересечениями, а на рис. 9б, в, г — сплайны, полученные в результате выполнения итераций при фиксированном значении  $N = 7, 13$  и  $15$  соответственно.



**Рис. 9.** Пример 5

**Пример 6.** Рассмотрим ломаную линию, изображенную на рис. 10а. Эта ломаная линия взята из [1], где решалась аналогичная задача проведения составного сплайна Безье по возможности ближе к исходной ломаной линии. Для этого авторы предлагают определить наиболее важные вершины исходной ломаной линии и провести составной сплайн через них. На рис. 10б показан результат этого метода — составной сплайн, проведенный через значимые вершины исходной ломаной линии (на рисунке эти вершины отмечены оранжевыми точками). На рис. 10в показан составной кубический сплайн, построенный методом, предложенным в настоящей работе. Видно, что полученные разными методами сплайны практически идентичны. Сплайн, построенный предложенным методом имеет на одну вершину больше, но зато проходит ближе к ломаной линии.

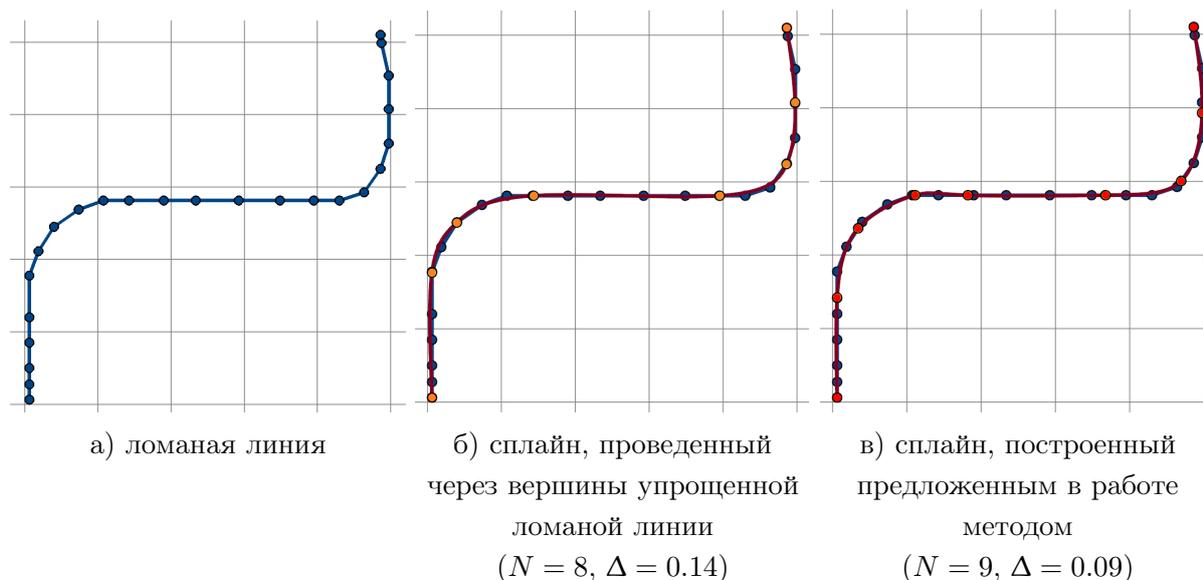


Рис. 10. Пример 6

## Заключение

Приведенные примеры сглаживания ломаных линий подтверждают эффективность предложенного метода применительно к ломаным линиям различной сложности, в том числе к ломаным линиям с самопересечениями. Показано, что в отличие от существующих методов сглаживания ломаных линий, предложенный метод не требует предварительного упрощения или разбиения исходной ломаной линии. Практический пример использования разработанного метода описан в [4], где решалась задача трассировки соединений струйных устройств, то есть построение на плоскости платы струйного устройства гладких каналов между входами и выходами струйных элементов. Модель струйного устройства задавалась с помощью многоугольной фигуры, у которой внешняя граница описывала границу платы струйного устройства, а «дыры» — контуры струйных элементов, размещенных на плате. Затем строился прямолинейный скелет многоугольной фигуры и на графе прямолинейного скелета для каждого соединения между струйными элементами находился путь, соединяющий выход одного элемента со входом другого элемента. Полученные ломаные линии, представляющие найденные пути на графе, сглаживались с помощью предложенного метода. Затем для каждого сплайна строились границы канала, так чтобы сплайн проходил по центру канала, а ширина канала линейно менялась от ширины выхода струйного элемента до ширины входа приемного струйного элемента.

Таким образом, разработан метод сглаживания ломаных линий составными сплайнами Безье, автоматически выбирающий количество узлов интерполяции сплайна и их положение на заданной ломаной линии таким образом, чтобы результирующий сплайн проходил достаточно близко к заданной ломаной линии и повторял ее форму с заданной точностью. Разработано программное обеспечение, реализующее предложенный метод. Возможные области применения метода: задачи построения траекторий движения роботов, проектирование технических объектов, обработка результатов вычислительных или натуральных экспериментов и прочие сферы, где требуется построение гладких линий на основе предварительно построенных ломаных линий.

## Литература

1. Hwang J.H., Arkin R., Kwon D. Mobile robots at your fingertip: Bezier curve on-line trajectory generation for supervisory control // Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2003). Vol. 2. IEEE, 2003. P. 1444–1449. DOI: 10.1109/IROS.2003.1248847.
2. Ravankar A., Ravankar A.A., Kobayashi Y., *et al.* Path Smoothing Techniques in Robot Navigation: State-of-the-Art, Current and Future Challenges // Sensors. 2018. Vol. 18, no. 9. Article number 3170. DOI: 10.3390/s18093170.
3. Zhou F., Song B., Tian G. Bezier curve based smooth path planning for mobile robot // Journal of Information and Computational Science. 2011. Vol. 8, no. 12. P. 2441–2450.
4. Romakin V.A. Routing of fluidic circuits using skeletons of polygonal figures and compound splines // International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and Equipment (ICMTMTE 2021). Vol. 346. 2021. Article number 03060. DOI: 10.1051/mateconf/202134603060.
5. Берлянт А.М., Мусин О.Р., Собчук Т.В. Картографическая генерализация и теория фракталов. Москва, 1998. 136 с.
6. Мусин О.Р., Ухалов А.Ю., Эдельсбруннер Г., Якимова О.П. Применение методов фрактальной и вычислительной геометрии для картографической генерализации линейных объектов // Моделирование и анализ информационных систем. 2012. Т. 19, № 6. С. 152–160.
7. Sarfraz M., Khan M.A. Automatic Outline capture of Arabic fonts // Information Sciences. 2002. Vol. 140. P. 269–281. DOI: 10.1016/S0020-0255(01)00176-1.
8. Soheli F.A., Karmakar G.C., Dooley L.S. A generic shape descriptor using Bezier curves // International Conference on Information Technology: Coding and Computing (ITCC'05). Vol. 2. IEEE, 2005. P. 95–100. DOI: 10.1109/ITCC.2005.11.
9. Коднянко В.А. Направленные сплайны и их использование для сглаживания выбросов и изломов интерполянта // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2021. Т. 10, № 1. С. 5–19. DOI: 10.14529/cmse210101.
10. Ho Y.J., Liu J.S. Collision-free curvature-bounded smooth path planning using composite Bezier curve based on Voronoi diagram // Proceedings of IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation. IEEE, 2009. P. 463–468. DOI: 10.1109/CIRA.2009.5423161.
11. Борисенко В.В. Построение оптимального сплайна Безье // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 3. С. 57–72.

Ромакин Владимир Александрович, к.т.н., лаборатория компьютерной графики, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва, Российская Федерация)

# POLYLINE SMOOTHING WITH COMPOUND BEZIER SPLINES

© 2022 V.A. Romakin

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences  
(Profsoyuznaya 65, Moscow, 117997 Russia)

E-mail: insight.ru@gmail.com

Received: 08.08.2022

The paper considers a new iterative method for constructing a smooth spline on a plane, consisting of cubic Bezier curves and repeating the shape of a given polyline with the required accuracy. At each iteration of the method, the following operations are performed: choosing the number of spline interpolation nodes, placing them on a given polyline according to certain rule, constructing a smooth compound Bezier spline passing through these nodes, and estimating the approximation accuracy, that is, the proximity of the constructed spline to a given polyline. The choice of the position of the spline interpolation nodes on a given polyline is performed by comparing the proximity measures of adjacent Bezier curves that make up the spline and the segments of the polyline that approximate these curves. The examples of smoothing polylines of varying complexity, including polylines with self-intersections, are given, confirming the effectiveness of the proposed method. The results of the work can be used in various applications, for example, when constructing the trajectory of automatic vehicles and mobile robots, when designing technical objects in computer-aided design systems, when performing cartographic generalization of linear cartographic objects, when designing fonts, etc.

*Keywords: polyline smoothing, compound splines, Bezier curves, measure of proximity, interpolation, approximation.*

## FOR CITATION

Romakin V.A. Polyline Smoothing with Compound Bezier Splines. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2022. Vol. 11, no. 4. P. 37–50. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse220403.

*This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 License which permits non-commercial use, reproduction and distribution of the work without further permission provided the original work is properly cited.*

## References

1. Hwang J.H., Arkin R., Kwon D. Mobile robots at your fingertip: Bezier curve on-line trajectory generation for supervisory control. Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2003). Vol. 2. IEEE, 2003. P. 1444–1449. DOI: 10.1109/IROS.2003.1248847.
2. Ravankar A., Ravankar A.A., Kobayashi Y., *et al.* Path Smoothing Techniques in Robot Navigation: State-of-the-Art, Current and Future Challenges. Sensors. 2018. Vol. 18, no. 9. Article number 3170. DOI: 10.3390/s18093170.
3. Zhou F., Song B., Tian G. Bezier curve based smooth path planning for mobile robot. Journal of Information and Computational Science. 2011. Vol. 8, no. 12. P. 2441–2450.
4. Romakin V.A. Routing of fluidic circuits using skeletons of polygonal figures and compound splines. International Conference on Modern Trends in Manufacturing Technologies and

- Equipment (ICMTMTE 2021). Vol. 346. 2021. Article number 03060. DOI: 10.1051/mateconf/202134603060.
5. Berlyant A.M., Musin O.R., Sobchuk T.V. Cartographic generalization and fractal theory. Moscow, 1998. 136 p. (in Russian).
  6. Musin O.R., Ukhalov A.Y., Edelsbrunner G., Yakimova O.P. Application of fractal and computational geometry methods for cartographic generalization of linear objects. Modeling and analysis of information systems. 2012. Vol. 19, no. 6. P. 152–160. (in Russian).
  7. Sarfraz M., Khan M.A. Automatic Outline capture of Arabic fonts. Information Sciences. 2002. Vol. 140. P. 269–281. DOI: 10.1016/S0020-0255(01)00176-1.
  8. Soheli F.A., Karmakar G.C., Dooley L.S. A generic shape descriptor using Bezier curves. International Conference on Information Technology: Coding and Computing (ITCC'05). Vol. 2. IEEE, 2005. P. 95–100. DOI: 10.1109/ITCC.2005.11.
  9. Kodnyanko V.A. Directional Splines and Their Use for Smoothing Ejections and Fractures of Interpolant. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2021. Vol. 10, no. 1. P. 5–19. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse210101.
  10. Ho Y.J., Liu J.S. Collision-free curvature-bounded smooth path planning using composite Bezier curve based on Voronoi diagram. Proceedings of IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation. IEEE, 2009. P. 463–468. DOI: 10.1109/CIRA.2009.5423161.
  11. Borisenko V.V. Construction of Optimal Bézier Splines. Journal of Mathematical Sciences. 2019. Vol. 237, no. 3. P. 375–386. DOI: 10.1007/s10958-019-04164-6.