

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА—СТИЛТЬЕСА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПИКОВОГО ВОЗРАСТА ИНФОРМАЦИИ В МНОГОКАНАЛЬНОЙ ГРУППЕ ПЕРЕДАЧИ

© 2024 С.И. Матюшенко

*Российский университет дружбы народов
(117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6)*

E-mail: matyushenko-si@rudn.ru

Поступила в редакцию: 12.12.2023

Данная статья продолжает цикл работ автора, посвященных проблеме возраста информации (Age of Information, AoI) — метрики, используемой в информационных системах для мониторинга и управления удаленными источниками информации со стороны центра управления. Теоретический анализ систем передачи информации требует количественной оценки «свежести» информации, доставляемой в центр управления. В данной работе рассматривается модель двухузловой группы передачи, состоящей из источника информации (узла-отправителя), центра управления (узла-получателя) и нескольких каналов связи между ними. Предполагается, что пропускные способности каналов могут быть различными. При этом, сетевой протокол требует, чтобы информация, поступающая в узел-получатель считывалась в той же последовательности, в какой она была передана из узла-отправителя. В результате пакеты, нарушившие установленный порядок, задерживаются в узле-отправителе на время, требуемое для восстановления порядка. В данной работе процесс передачи информации моделируется с помощью многоканальной системы массового обслуживания с ограниченным накопителем, пуассоновским потоком заявок, экспоненциальным обслуживанием и переупорядочиванием заявок. При этом заявки моделируют пакеты передаваемой информации, накопитель системы — очередь пакетов на передачу, обслуживание заявок на приборах различной интенсивности — процесс передачи пакетов по каналам связи. Данная модель для оценки возраста информации использовалась впервые. В результате проведенного исследования получены выражения для преобразования Лапласа—Стилтьеса стационарной функции распределения и начальных моментов максимального значения возраста информации, называемого пиковым возрастом. Проведено численное исследование показателей производительности системы, включающее анализ пикового возраста информации при различных загрузках системы. Корректность аналитических результатов подтверждена результатами имитационного моделирования.

Ключевые слова: возраст информации, пиковый возраст информации, многоканальная система массового обслуживания, переупорядочивание заявок.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Матюшенко С.И. Преобразование Лапласа—Стилтьеса функции распределения пикового возраста информации в многоканальной группе передачи // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2024. Т. 13, № 1. С. 57–73. DOI: 10.14529/cmse240104.

Введение

Одним из важных сценариев использования приложений сверхнадежной связи является обмен информацией между удаленными системами и центром управления, который обеспечивает контроль и повышает их безопасность за счет своевременного принятия верных управленческих решений [1]. Задачи своевременной доставки информации возникают в различных сферах человеческой деятельности: в энергетических системах, в промышленном интернете вещей, в сфере автономного транспорта, в системах видеонаблюдения

и т.д. [2–4]. В 2011 году для количественной оценки свежести информации, поступающей в центр управления, была предложена метрика Age of Information (AoI) [5], представляющая собой функцию времени между генерациями сообщений в узле-отправителе (УО) и доставкой их в узел-получатель (УП).

Наиболее удобным аппаратом для исследования проблемы возраста информации является аппарат систем и сетей массового обслуживания. Обзор работ, в которых анализ возраста информации предлагается проводить с использованием этого аппарата, можно найти, например, в [6].

В данной работе будем рассматривать системы передачи данных, в которых информация от источника к получателю передается одновременно по нескольким каналам связи [7–11]. В таких системах из-за возможного различия в пропускных способностях каналов, либо из-за случайности объемов информации, заключенной в каждом пакете, порядок, в котором были переданы пакеты, может быть нарушен. В этом случае для адекватного прочтения информации в узле-получателе производится переупорядочивание полученных пакетов. Процесс восстановления порядка требует определенных временных затрат, которые необходимо учитывать при оценке возраста информации.

Цель данной работы состоит в оценке возраста информации, передаваемой от периферийного источника к центру обработки и принятия решений, включающей в себя затраты времени на переупорядочивание пакетов. Для решения данной задачи в качестве математической модели будем использовать многоканальную систему массового обслуживания с переупорядочиванием заявок [12, 13]. Заметим, что задача оценки возраста информации в системе с переупорядочиванием заявок рассматривается впервые.

Работа состоит из шести основных разделов. В первом разделе приводится техническое описание рассматриваемой системы и строится ее математическая модель в виде системы массового обслуживания (СМО). Стохастическое поведение СМО описывается с помощью однородного марковского процесса. В разделах 2–5 на основе стационарного распределения состояний марковского процесса определяются выражения для функций распределений следующих случайных величин: времени ожидания обслуживания (раздел 2); задержки переупорядочивания (раздел 3); времени обслуживания (раздел 4); пикового возраста информации (раздел 5). В разделе 6 приводятся результаты численного исследования основных показателей производительности рассматриваемой системы при различных значениях исходных параметров. В заключении подводятся итоги и намечаются планы дальнейшего исследования.

1. Описание модели

Рассмотрим группу передачи информации, состоящую из узла-отправителя, узла получателя и m каналов связи между ними (рис. 1).

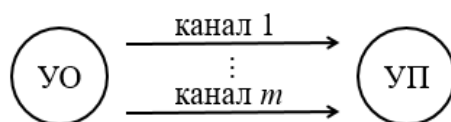


Рис. 1. m -канальная группа передачи

Пропускные способности каналов могут быть различными. Если в момент отправки из УО очередного пакета информации свободны несколько каналов, то для передачи выбирается канал с наивысшей пропускной способностью.

Каждому пакету в момент отправки из УО присваивается порядковый номер. Предполагается, что информация в УП будет воспринята адекватно, если она будет считана в том же порядке, в котором была отправлена из УО. Поэтому, если какой-то пакет нарушит установленный порядок, то он будет задержан в УП до момента поступления пакетов, передача которых началась раньше передачи данного пакета.

Процесс передачи информации из УО в УП будем моделировать с помощью многоканальной системы массового обслуживания (СМО) с m обслуживающими приборами, $2 \leq m < \infty$, общим накопителем ограниченной емкости и буфером переупорядочивания (БП). При этом заявка будет моделировать пакет информации, накопитель — очередь пакетов на передачу, обслуживание на приборе j — передачу пакета по j -му каналу связи, буфер переупорядочивания — место в УП, занимаемое пакетами, задержанными для восстановления порядка.

Далее будем полагать, что на систему поступает пуассоновский поток заявок с параметром λ . Заявки имеют случайную длину и при этом предполагается, что все длины заявок независимы в совокупности и имеют общую функцию распределения (ФР) $G(x) = 1 - e^{-\gamma x}$, $x \geq 0$. Времена обслуживания на приборе j независимы между собой, а также не зависят от времени обслуживания на других приборах и распределены по экспоненциальному закону с параметром μ_j , $j = \overline{1, m}$.

Емкость накопителя системы характеризуется двумя параметрами: максимальным числом r мест для ожидания, $r < \infty$, и числом v , $v > 0$, ограничивающим суммарный объем заявок в очереди. Заявка, поступающая в систему, когда в ней находится $m + r$ заявок или же когда суммарный объем ожидающих в очереди заявок и данной заявки превышает v , теряется и в дальнейшем не влияет на функционирование системы.

Далее, без ограничения общности примем, что $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_m$ и будем предполагать, что заявка, имеющая возможность выбора прибора, выбирает прибор с наименьшим порядковым номером. Выбор заявки из очереди на обслуживание происходит в порядке их прибытия в систему, т.е. согласно дисциплине FCFS — первый пришел, первый обслужился.

Предполагается, что всем заявкам в момент поступления в систему присваивается порядковый номер. При этом, если в момент окончания обслуживания заявки с номером n (n -заявки) продолжается обслуживание заявки с номером меньшим n , то заявка n помещается в буфер переупорядочивания (БП) (рис. 2). В противном случае n -заявка покидает систему и вслед за ней из БП уходят все заявки с номерами, отличающимися друг от друга на единицу, начиная с номера $n + 1$ (если таковые в этом буфере имеются). Данное предположение позволяет моделировать механизм сохранения порядка на выходе из системы, в соответствии с которым заявки поступали в нее.

В соответствии с обозначениями Кенделла рассматриваемую СМО будем кодировать как $M/M/m/(r, v)/res$, где (r, v) означает, что емкость накопителя ограничивается двумя параметрами: числом мест для ожидания r и ограничением на суммарный объем заявок в очереди v , а res (сокращение от *res*equence) означает, что в системе предусмотрен механизм переупорядочивания заявок.

Как уже было замечено выше, данная система уже рассматривалась в работе [12, 13]. В [12] функционирование системы было описано однородным марковским процессом $X(t)$,

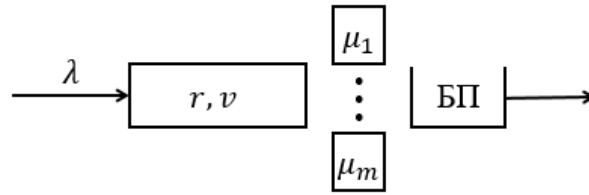


Рис. 2. m -канальная экспоненциальная СМО конечной емкости с буфером переупорядочивания

$t \geq 0$, над множеством состояний

$$\mathcal{X}^m = \bigcup_{k=0}^{m+r} \mathcal{X}_k^m, \quad (1)$$

$$\mathcal{X}_k^m = \begin{cases} \{(k, i_1, \dots, i_m), i_j = \overline{0, k}, \sum_{j=1}^m u(i_j) = k, \text{ при этом,} \\ \text{если } i_j i_s > 0, \text{ то } i_j \neq i_s, j, s = \overline{1, m}\}, k = \overline{0, m-1}, \\ \{(k, i_1, \dots, i_m), i_j = \overline{1, m}, i_j \neq i_s, j, s = \overline{1, m}\}, k = \overline{m, m+r}. \end{cases}$$

где $u(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$ — функция Хевисайда.

Здесь для некоторого момента времени t : $X(t) = (k, i_1, \dots, i_m)$, если в системе находится k заявок, $k = \overline{0, m+r}$, $i_j = 0$ означает, что прибор j пуст, в противном случае i_j есть номер заявки, обслуживаемой прибором j , $j = \overline{1, m}$.

В [12] был разработан алгоритм для определения стационарных вероятностей $p(k, i_1, \dots, i_m)$ состояний $(k, i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{X}^m$ МП $X(t)$. Цель данного исследования состоит в определении стационарной ФР пикового возраста информации, передаваемой заявками СМО $M/M/m/(r, v)/res$. Очевидно, что в этой системе пиковый возраст Z_{n-1} заявки $n-1$ определяется выражением:

$$Z_{n-1} = G_n + W_n + Q_n + R_n, \quad (2)$$

где G_n — время генерации; W_n — время ожидания обслуживания; Q_n — длительность обслуживания; R_n — время переупорядочивания заявки n . Поэтому задача состоит в том, чтобы найти ФР для каждой из перечисленных выше случайных величин (с.в.).

2. Стационарная функция распределения времени ожидания обслуживания

Рассмотрим множество S различных векторов длины m , координаты которых могут принимать лишь два значения: ноль или единица. Очевидно, что множество S представимо в виде:

$$S = \bigcup_{k=0}^m S_k,$$

где S_k — множество, состоящее из всех возможных векторов из S , у которых ровно k координат равны единице.

Далее, обозначим через (\mathbf{s}_k) макросостояние рассматриваемой СМО, $\mathbf{s}_k \in S_k$, означающее, что в системе k заявок, $k = \overline{0, m}$, и при этом прибор j занят обслуживанием, если j -я

координата s_k^j вектора \mathbf{s}_k равна единице, в противном случае прибор j свободен, $j = \overline{1, m}$. Кроме этого, обозначим через (k) макросостояние, означающее, что в системе k заявок, $k = \overline{m+1, m+r}$.

Заметим, что (\mathbf{s}_k) и (k) являются макросостояниями по отношению к состояниям МП $X(t)$. Они учитывают лишь количество заявок в системе и то, занят ли прибор или нет, но не учитывают порядок, в котором занимались приборы.

Очевидно, что стационарное распределение вероятностей $p(\mathbf{s}_k)$, $\mathbf{s}_k \in S_k$, $k = \overline{0, m}$ и $p(k)$, $k = \overline{m+1, m+r}$, несложно подсчитать, суммируя вероятности соответствующих микросостояний системы и определяемые в соответствии с [12].

Далее обозначим через $\pi_A^-(\mathbf{s}_k)$ и $\pi_A^-(k)$ стационарные вероятности макросостояний (\mathbf{s}_k) , $\mathbf{s}_k \in S_k$, $k = \overline{0, m}$ и (k) , $k = \overline{m+1, m+r}$, в момент $t = 0$ поступления в СМО очередной заявки. Для определения вероятностей $\pi_A^-(\mathbf{s}_k)$ и $\pi_A^-(k)$ воспользуемся результатами работы [14], согласно которым:

$$\pi_A^-(\mathbf{s}_k) = p(\mathbf{s}_k), \quad \mathbf{s}_k \in S_k, \quad k = \overline{0, m}, \quad (3)$$

$$\pi_A^-(k) = p(k), \quad k = \overline{m+1, m+r}. \quad (4)$$

Кроме этого, введем следующие обозначения:

- $W(t)$ — ФР времени ожидания обслуживания для заявки, принятой в систему в стационарном режиме ее работы;
- $W_k(t)$ — условная стационарная ФР времени ожидания обслуживания для заявки, принятой в систему, при условии, что в момент $t = 0$ ее поступления в системе уже имелось k заявок;
- $w(s)$ — преобразование Лапласа—Стилтьеса (ПЛС) ФР $W(t)$
- $w_k(s)$ — ПЛС ФР $W_k(t)$.

Теорема 1. ФР времени ожидания обслуживания для заявок, принятых в СМО $M/M/m/(r, v)/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражениями:

$$W(t) = \frac{1}{1 - \pi} \left[\sum_{k=0}^m \sum_{\mathbf{s}_k \in S_k} p(\mathbf{s}_k) W_k(t) + \sum_{k=m+1}^{m+r-1} p(k) W_k(t) \right], \quad (5)$$

$$W_k(t) = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, m-1}, \\ f_k F_\xi^{*(k-m+1)}(t), & k = \overline{m, m+r-1}, \end{cases} \quad (6)$$

где $F_\xi(t)$ — ФР с.в. $\xi = \min\{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, ξ_j — с.в. — длительность обслуживания на приборе j , $j = \overline{0, m}$, запись $F_\xi^{*(k-m+1)}(t)$ означает $(k - m + 1)$ -кратную свертку ФР $F_\xi(t)$, π — вероятность потери заявки.

Доказательство. Заявка, поступающая в систему, и застающая хотя бы один прибор свободным, сразу направляется на обслуживание и время ожидания для нее равно нулю. Если же в момент $t = 0$ поступления очередной заявки в очереди имеется $k - m$ заявок, $k = \overline{m, m+r-1}$, то заявка с вероятностью f_k присоединяется к очереди, где f_k соглас-

но [12], определяется по формуле:

$$f_k = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, m-1} \\ G_{k-m+1}(v) / G_{k-m}(v), & k = \overline{m, m+r-1} \\ 0, & k = m+k \end{cases}, \quad (7)$$

$$G_0(v) = 1, \quad G_s(v) = 1 - e^{-\gamma v} \sum_{j=0}^{s-1} \frac{(\gamma v)^j}{j!}, \quad s = \overline{1, r}.$$

В этом случае время ожидания для нее будет складываться из минимума времен обслуживания заявок, находящихся в момент $t = 0$ на приборах и времени обслуживания любых $k - m$ заявок, пришедших в систему раньше данной заявки. Учитывая, что времена обслуживания заявок на приборе j , $j = \overline{1, m}$, независимы между собой, а также не зависят от времени обслуживания на других приборах, приходим к выражению (6).

Нетрудно видеть, что с.в. ξ распределена по экспоненциальному закону с параметром $\mu = \sum_{j=1}^m \mu_j$, следовательно выражение (6) можно записать в следующем виде:

$$W_k(t) = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, m-1}, \\ f_k \left[1 - e^{-\mu t} \sum_{j=0}^{k-m} \frac{(\mu t)^j}{j!} \right], & k = \overline{m, m+r-1}, \end{cases} \quad (8)$$

Далее применяя формулы полной и условной вероятностей, а также учитывая формулы (3)–(4), получаем (5). Тем самым, теорема доказана.

Заметим, что выражение для вероятности потерь было получено в [12] и имеет следующий вид:

$$\pi = \sum_{k=0}^m \sum_{\mathbf{s}_k \in S_k} p(\mathbf{s}_k)(1 - f_k) + \sum_{k=m+1}^{m+r} p(k)(1 - f_k). \quad (9)$$

□

Из теоремы 1 вытекают два следствия.

Следствие 1. Начальные моменты v_ϑ порядка ϑ , $\vartheta = 1, 2, \dots$ времени ожидания обслуживания для заявок, принятых в СМО $M/M/m/(r, v)/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражением:

$$v_\vartheta = \frac{1}{1 - \pi} \left[f_m p(\mathbf{s}_m) \frac{\vartheta!}{\mu^\vartheta} + \sum_{k=m+1}^{m+r-1} f_k p(k) \frac{(k - m + 1) \cdot \dots \cdot (k - m + \vartheta)}{\mu^\vartheta} \right]. \quad (10)$$

В частности, для $\vartheta = 1$ получим:

$$v_1 = \frac{1}{1 - \pi} \left[f_m p(\mathbf{s}_m) \frac{1}{\mu} + \sum_{k=m+1}^{m+r-1} f_k p(k) \frac{k - m + 1}{\mu} \right]. \quad (11)$$

Доказательство следствия 1 вытекает непосредственно из определения начальных моментов порядка ϑ .

Следствие 2. ПЛС ФР времени ожидания обслуживания для заявок, принятых в систему $M/M/m/(r, v)/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражениями:

$$w(s) = \frac{1}{1 - \pi} \left[\sum_{k=0}^m \sum_{\mathbf{s}_k \in S_k} p(\mathbf{s}_k) w_k(s) + \sum_{k=m+1}^{m+r-1} p(k) w_k(s) \right] \quad (12)$$

$$w_k(s) = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, m-1}, \\ f_k \left(\frac{\mu}{s+\mu} \right)^{k-m+1}, & k = \overline{m, m+r-1}. \end{cases} \quad (13)$$

Доказательство. Дифференцируя (8) по t , а затем домножая на e^{-st} и интегрируя по t на интервале $(0; \infty)$, получаем выражение для ПЛС $w_k(s)$:

$$w_k(s) = \begin{cases} 1, & k = \overline{0, m-1}, \\ f_k \left(\frac{\mu}{s+\mu} \right)^{k-m+1}, & k = \overline{m, m+r-1}, \end{cases} \quad (14)$$

Далее, применяя формулы полной и условной вероятностей, получаем (12). \square

3. Стационарная функция распределения задержки переупорядочивания

Теперь обозначим через $\pi_{D,j}^-(k, i_1, \dots, i_m)$ стационарную вероятность состояния (k, i_1, \dots, i_m) в момент $t = 0$ окончания обслуживания заявки на приборе j , а через $\lambda_{D,j}$ — интенсивность выхода заявок, обслуженных прибором j , $j = \overline{1, m}$. Нетрудно видеть, что

$$\lambda_{D,j} = \sum_{(k, i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{X}^m} p(k, i_1, \dots, i_m) u(i_j) \mu_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (15)$$

На основании результатов работы [14] получаем:

$$\pi_{D,j}(k, i_1, \dots, i_m) = \frac{1}{\lambda_{D,j}} p(k, i_1, \dots, i_m) u(i_j) \mu_j. \quad (16)$$

Далее введем обозначения:

- $R(t)$ — стационарная ФР времени пребывания заявки в буфере переупорядочивания, которое в дальнейшем будем называть задержкой переупорядочивания;
- $R_{(k, i_1, \dots, i_m), j}(t)$ — условная стационарная ФР задержки переупорядочивания заявки, обслуженной на приборе j , при условии, что в момент $t = 0$ окончания обслуживания этой заявки системы находилась в состоянии (k, i_1, \dots, i_m) ;
- S_ν — начальный момент порядка ν задержки переупорядочивания, $\nu = 1, 2, \dots$;
- $S_{(k, i_1, \dots, i_m), j, \nu}$ — условный начальный момент порядка ν , $\nu = 1, 2, \dots$ задержки переупорядочивания заявки, обслуженной на приборе j , при условии, что в момент $t = 0$ окончания ее обслуживания заявка находилась в состоянии (k, i_1, \dots, i_m) ;
- $r(s)$ — ПЛС ФР $R(t)$;
- $r_{(k, i_1, \dots, i_m), j}(s)$ — ПЛС ФР $R_{(k, i_1, \dots, i_m), j}(t)$.

Теорема 2. ФР задержки переупорядочивания в СМО $M/M/m/(r, v)/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражением:

$$R(t) = \frac{1}{\lambda_D} \sum_{(k, i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{X}^m} p(k, i_1, \dots, i_m) \sum_{j=1}^m u(i_j) \mu_j \prod_{s_n \in Y_{(k, i_1, \dots, i_m)}} (1 - e^{-\mu_{s_n} t}), \quad (17)$$

где $\lambda_D = \sum_{j=1}^m \lambda_{D,j}$.

Доказательство. Ясно, что если непосредственно перед окончанием обслуживания заявки на приборе j система находилась в состоянии (k, i_1, \dots, i_m) , то задержка переупорядочивания этой заявки будет равна максимуму из времени дообслуживания заявок, пришедших в СМО раньше данной заявки, т.е. заявок, обслуживаемых на приборах с номерами из множества

$$Y_{(k, i_1, \dots, i_m), j} = \{s_n : 0 < i_{s_n} < i_j\}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (k, i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{X}^m.$$

Так как обслуживание заявки на приборе j распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_j , $j = \overline{1, m}$, то

$$R_{(k, i_1, \dots, i_m), j}(t) = \prod_{s_n \in Y_{(k, i_1, \dots, i_m), j}} (1 - e^{-\mu_{s_n} t}), \quad j = \overline{1, m}, \quad (k, i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{X}^m. \quad (18)$$

При этом, $R_{(k, i_1, \dots, i_m), j}(t) = 1$, если $Y_{(k, i_1, \dots, i_m), j}(t) = \emptyset$, т.к. заявка в этом случае не будет задержана.

Далее, применяя формулу полной вероятности и учитывая (16), а также тот факт, что вероятность выхода заявки с прибора j равна $\lambda_{D,j}/\lambda_D$, получаем формулу (17). Таким образом, теорема 2 доказана. \square

Из теоремы 2 вытекает два следствия.

Следствие 3. Начальный момент S_ϑ порядка ϑ задержки переупорядочивания в СМО $M/M/m/(r, v)/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражениями:

$$S_\vartheta = \frac{1}{\lambda_D} \sum_{(k, i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{X}^m} p(k, i_1, \dots, i_m) \sum_{j=1}^m u(i_j) \mu_j S_{(k, i_1, \dots, i_m), j, \vartheta}, \quad \vartheta = 1, 2, \dots \quad (19)$$

$$S_{(k, i_1, \dots, i_m), j, \vartheta} = \vartheta! \left[\sum_{n_1=1}^l \frac{1}{\mu_{s_{n_1}}^\vartheta} - \sum_{n_1, n_2=1, n_1 \neq n_2}^l \frac{1}{(\mu_{s_{n_1}} + \mu_{s_{n_2}})^\vartheta} + \dots + (-1)^{l+1} \frac{1}{(\mu_{s_{n_1}} + \dots + \mu_{s_{n_l}})^\vartheta} \right], \quad (20)$$

где $s_{n_i} \in Y_{(k, i_1, \dots, i_m), j}$, $i = \overline{1, l}$, $l = |Y_{(k, i_1, \dots, i_m), j}|$.

Доказательство.

$$S_{(k, i_1, \dots, i_m), j, \vartheta} = \int_0^\infty t^\vartheta dR_{(k, i_1, \dots, i_m), j}(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (k, i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{X}^m. \quad (21)$$

Из (21) с учетом (18) путем несложных вычислений приходим к (20). И, наконец, применяя формулы полной и условной вероятности и, учитывая (16) и тот факт, что вероятность выхода заявки с прибора j равна $\lambda_{D,j}/\lambda_D$, получаем (19). \square

Следствие 4. ПЛС ФР задержки переупорядочивания в СМО $M/M/m/(r, v)/res$ в стационарном режиме ее работы определяется выражением:

$$r(s) = \frac{1}{\lambda_D} \sum_{(k, i_1, \dots, i_m) \in \mathcal{X}^m} p(k, i_1, \dots, i_m) \sum_{j=1}^m u(i_j) \mu_j r_{(k, i_1, \dots, i_m), j}(s), \quad (22)$$

$$r_{(k,i_1,\dots,i_m),j}(s) = \sum_{n_1=1}^l \frac{\mu_{s_{n_1}}}{\mu_{s_{n_1}} + s} - \sum_{n_1, n_2=1, n_1 \neq n_2}^l \frac{\mu_{s_{n_1}} + \mu_{s_{n_2}}}{\mu_{s_{n_1}} + \mu_{s_{n_2}} + s} + \dots + (-1)^l \frac{\mu_{s_{n_1}} + \dots + \mu_{s_{n_l}}}{(\mu_{s_{n_1}} + \dots + \mu_{s_{n_l}} + s)}. \quad (23)$$

Доказательство. Используя определение ПЛС ФР, из формулы (18) путем несложных вычислений приходим к формуле (23). Применяя формулы полной и условной вероятностей, а также равенства (16) и тот факт, что вероятность выхода заявки с прибора j равна $\lambda_{D,j}/\lambda_D$, получаем выражение (22). \square

4. Стационарная функция распределения времени обслуживания

Теперь определим ФР $Q(t)$ времени обслуживания заявки в системе в стационарном режиме ее работы. Для этого рассмотрим условные стационарные ФР $Q_{s_k}(t)$, $s_k \in S_k$, $k = \overline{0, m}$ и $Q_k(t)$, $k = \overline{m+1, m+r-1}$, времени обслуживания заявки в системе при условии, что в момент $t = 0$ поступления данной заявки в систему, система находилась в состоянии (s_k) либо (k) соответственно.

Очевидно, что при наличии свободных приборов заявка, поступающая в систему, сразу направляется на прибор с минимальным порядковым номером. Следовательно,

$$Q_{s_{k-1_j}}(t) = \delta\left(\sum_{i=1}^j s_k^i, j\right) (1 - e^{-\mu_j t}), \quad j = \overline{1, m}, \quad (24)$$

где $\mathbf{1}_j$ — вектор длины m с j -й координатой, равной единице и остальными координатами равными нулю; $\delta(x, y)$ — дельта-функция, принимающая значение 1 при $x = y$ и 0 в противном случае; s_k^i — i -я координата s_k .

Если же в момент $t = 0$ поступления очередной заявки в очереди уже имеется $k - m$ заявок, $k = \overline{m, m+r-1}$, то данная заявка с вероятностью f_k присоединяется к очереди и через некоторое время перемещается на первое место в ней. Далее с вероятностью μ_j/μ раньше других освободится прибор j и далее заявка с указанной вероятностью поступит на этот прибор. Следовательно,

$$Q_{s_m}(t) = \sum_{j=1}^m f_m \mu_j / \mu (1 - e^{-\mu_j t}), \quad (25)$$

$$Q_k(t) = \sum_{j=1}^m f_k \mu_j / \mu (1 - e^{-\mu_j t}). \quad (26)$$

Далее, применяя формулы условной и полной вероятности, а также учитывая соотношения (3) и (4), приходим к следующему результату

Теорема 3. ФР времени обслуживания заявок, принятых в СМО $M/M/m/(r, v)/res$ в стационарном режиме ее работы, определяется выражением:

$$Q(t) = \frac{1}{1 - \pi} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{s_k \in S_k} \sum_{j=1}^m p(s_k - \mathbf{1}_j) Q_{s_k - \mathbf{1}_j}(t) + p(s_m) Q_{s_m}(t) + \sum_{k=m+1}^{m+r-1} p(k) Q_k(t) \right], \quad (27)$$

где $Q_{\mathbf{s}_k}(t)$, $\mathbf{s}_k \in S_k$, $k = \overline{0, m}$, $Q_k(t)$, $k = \overline{m+1, m+r-1}$ определяются по формулам (24)–(26).

Из теоремы 3 вытекает очевидное следствие.

Следствие 5. Начальные моменты q_ϑ порядка ϑ , $\vartheta = 1, 2, \dots$, времени обслуживания заявок, принятых в СМО $M/M/m/(r, v)/res$ в стационарном режиме ее работы, определяется выражением:

$$q_\vartheta = \frac{1}{1-\pi} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{\mathbf{s}_k \in S_k} \sum_{j=1}^m p(\mathbf{s}_k - \mathbf{1}_k) \delta \left(\sum_{i=1}^j s_k^i, j \right) \frac{\vartheta!}{\mu_j^\vartheta} + \left(\sum_{k=m+1}^{m+r-1} p(k) f_k + p(\mathbf{s}_m) f_m \right) \sum_{j=1}^m \frac{\vartheta!}{\mu_j \mu_j^{\vartheta-1}} \right]. \quad (28)$$

В частности для $\vartheta = 1$ получаем

$$q_1 = \frac{1}{1-\pi} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{\mathbf{s}_k \in S_k} \sum_{j=1}^m p(\mathbf{s}_k - \mathbf{1}_k) \delta \left(\sum_{i=1}^j s_k^i, j \right) \frac{1}{\mu_j} + \left(\sum_{k=m+1}^{m+r-1} p(k) f_k + p(\mathbf{s}_m) f_m \right) \frac{m}{\mu} \right]. \quad (29)$$

Обозначим через $q(s)$ — ПЛС ФР $Q(t)$, а через $q_{\mathbf{s}_k}(s)$ и $q_k(s)$ — ПЛС условных ФР $Q_{\mathbf{s}_k}(t)$ и $Q_k(t)$ соответственно.

Из (24)–(26) очевидным образом следует

$$q_{\mathbf{s}_k - \mathbf{1}_j}(s) = \delta \left(\sum_{i=1}^j s_k^i, j \right) \frac{\mu_j}{\mu_j + s}, \quad (30)$$

$$q_{\mathbf{s}_m}(s) = \sum_{j=1}^m f_m \frac{\mu_j}{\mu} \frac{\mu_j}{\mu_j + s}, \quad (31)$$

$$q_k(s) = \sum_{j=1}^m f_k \frac{\mu_j}{\mu} \frac{\mu_j}{\mu_j + s}, \quad (32)$$

что позволяет нам сформулировать еще одно очевидное следствие из теоремы 3.

Следствие 6. ПЛС ФР времени обслуживания для заявок, принятых в систему $M/M/m/(r, v)/res$ в стационарном режиме ее работы, определяется выражением:

$$q(s) = \frac{1}{1-\pi} \left[\sum_{k=1}^m \sum_{\mathbf{s}_k \in S_k} \sum_{j=1}^m p(\mathbf{s}_k - \mathbf{1}_k) q_{\mathbf{s}_k - \mathbf{1}_j}(s) + p(\mathbf{s}_m) q_{\mathbf{s}_m}(s) + \sum_{k=m+1}^{m+r-1} p(k) q_k(s) \right], \quad (33)$$

где $q_{\mathbf{s}_k - \mathbf{1}_j}(s)$, $q_{\mathbf{s}_m}(s)$ и $q_k(s)$ вычисляются по формулам (30)–(32).

5. Стационарное распределение пикового возраста информации

Возвращаясь к формуле (2) и учитывая ее справедливость для любого n , а также принимая во внимание факт независимости слагаемых в правой части этой формулы, можем

утверждать, что ФР пикового возраста информации определяется выражением:

$$Z(t) = G(t) * W(t) * Q(t) * R(t), \quad (34)$$

где $G(t)$ – ФР длительности генерации заявок, принятых в систему, т.е.

$$G(t) = \frac{1}{1 - \pi}(1 - e^{-\lambda t}), \quad t \geq 0, \quad (35)$$

а ФР $W(t)$, $R(t)$ и $Q(t)$ определяются выражениями (5), (17) и (27).

Однако применение формулы (34) может быть связано с определенными вычислительными трудностями. Поэтому основной результат мы сформулируем в терминах ПЛС, учитывая, что ПЛС ФР $G(t)$ определяется выражением:

$$g(s) = \frac{1}{1 - \pi} \frac{\lambda}{\lambda + s}. \quad (36)$$

Теорема 4. ПЛС пикового возраста информации, передаваемой заявками системы $M/M/m/(r, v)/res$, определяется выражением:

$$z(s) = g(s)w(s)q(s)r(s), \quad (37)$$

где $w(s)$, $r(s)$, $q(s)$ и $g(s)$ вычисляются по формулам (12), (22), (33) и (36) соответственно.

Из теоремы 4 вытекает очевидное следствие.

Следствие 7. Начальные моменты z_{ϑ} порядка ϑ возраста информации, передаваемой заявками системы $M/M/m/(r, v)/res$, определяются выражением:

$$z_{\vartheta} = g_{\vartheta} + v_{\vartheta} + \delta_{\vartheta} + q_{\vartheta}, \quad \vartheta = 1, 2, \dots,$$

где $g_{\vartheta} = \frac{\vartheta!}{(1-\pi)\lambda^{\vartheta}}$, а v_{ϑ} , δ_{ϑ} и q_{ϑ} вычисляются по формулам (10), (19) и (28).

6. Результаты численного исследования

В работе было проведено численное исследование средних значений показателей, характеризующих процесс передачи информации с помощью заявок СМО $M/M/m/(r, v)/res$ в зависимости от интенсивности входящего потока λ . Один из примеров такого исследования представлен ниже:

- количество приборов $m = 3$;
- емкость накопителя $r = 5$;
- интенсивность обслуживания на приборах: $\mu_1 = 3$, $\mu_2 = 2$ и $\mu_3 = 1$;
- длина заявки задавалась рядом распределения:

значение	1	2	3
вероятность	0.33	0.33	0.34

Результаты проведенного исследования отражены в табл. 1 и на рис. 3–6.

Так на рис. 3 отражена зависимость среднего пикового возраста информации от интенсивности входящего потока λ , а, следовательно, и от величины загрузки $\rho = \lambda/(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)$. Как видно из этого рисунка минимальные значения среднего пикового возраста соответствуют значениям λ из интервала от 1.5 до 2.5, что, в свою очередь, соответствует значениям ρ из интервала $0.25 \div 0.42$. Можно считать, что данная загрузка

Таблица 1. Среднее значение пикового возраста z , задержки переупорядочивания δ , времени ожидания v , времени обслуживания q при различных значениях λ и фиксированных значениям μ

λ	ρ	z	δ	v	q
0.25	0.04	4.376	0.013	0.000	0.349
0.50	0.08	2.403	0.030	0.000	0.366
0.75	0.13	1.775	0.054	0.001	0.382
1.00	0.17	1.488	0.083	0.002	0.399
1.50	0.25	1.253	0.151	0.007	0.426
2.00	0.33	1.199	0.230	0.019	0.449
2.50	0.42	1.209	0.305	0.036	0.465
3.00	0.50	1.258	0.381	0.062	0.478
3.50	0.58	1.319	0.446	0.093	0.489
4.00	0.67	1.390	0.505	0.133	0.493
4.50	0.75	1.466	0.562	0.173	0.498
5.00	0.83	1.533	0.597	0.219	0.500
5.50	0.92	1.601	0.633	0.263	0.500
6.00	1.00	1.667	0.662	0.308	0.500
6.50	1.08	1.713	0.677	0.347	0.500
7.00	1.17	1.761	0.691	0.385	0.500
7.50	1.25	1.810	0.710	0.419	0.500
8.00	1.33	1.850	0.721	0.450	0.500
8.50	1.42	1.899	0.743	0.479	0.500
9.00	1.50	1.919	0.745	0.506	0.500

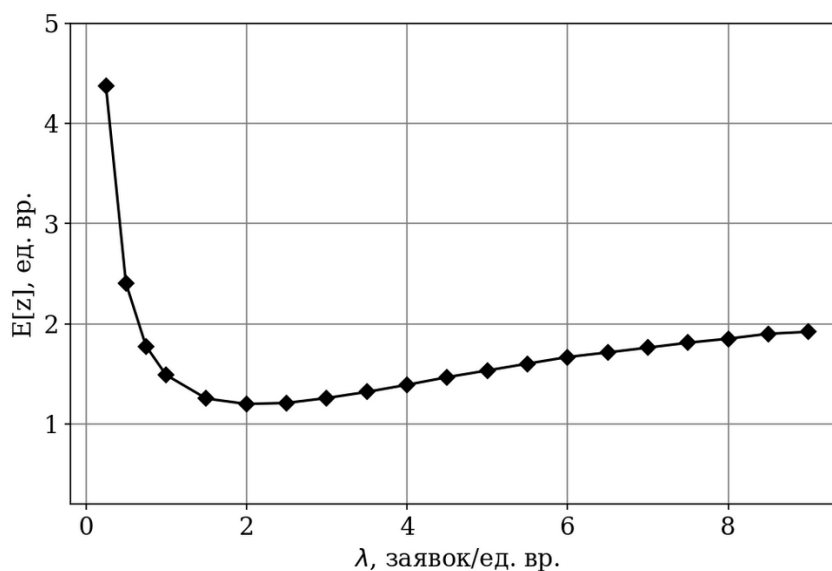


Рис. 3. График зависимости среднего пикового возраста информации от интенсивности входящего потока λ

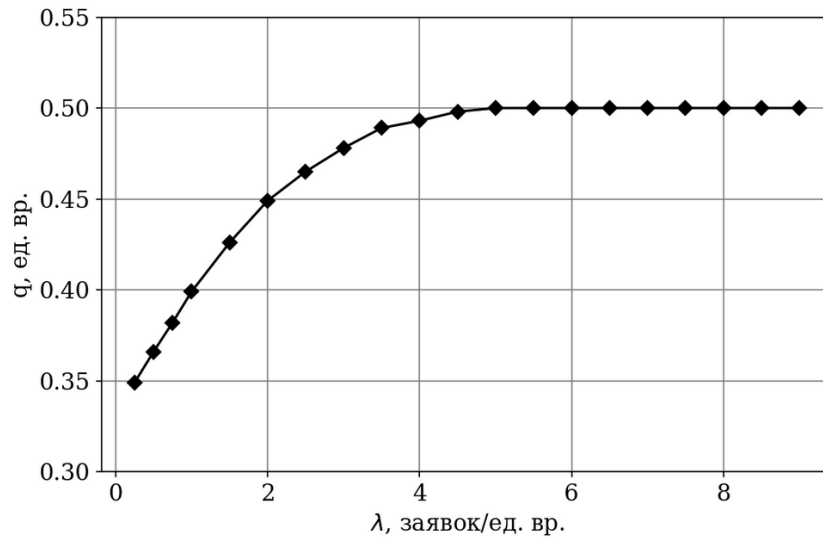


Рис. 4. График зависимости средней длительности обслуживания от интенсивности входящего потока λ

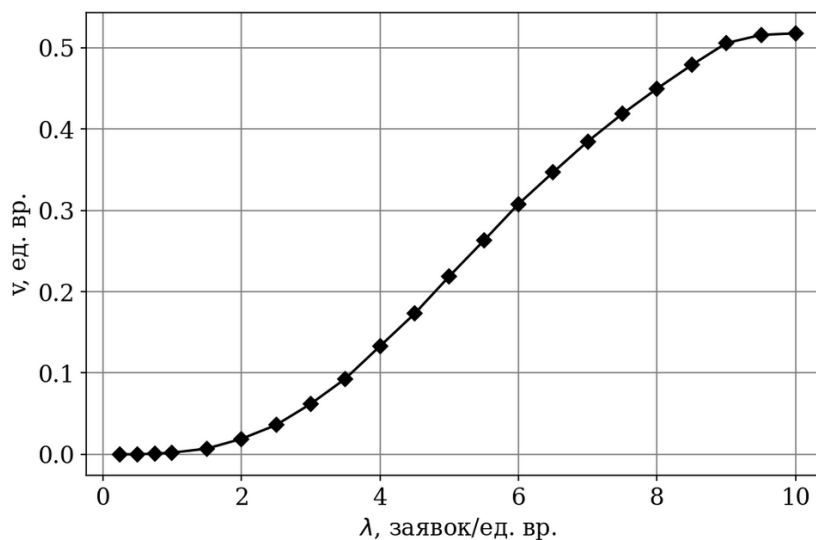


Рис. 5. График зависимости среднего времени ожидания от интенсивности входящего потока λ

является оптимальной с точки зрения частоты и скорости обновления информации. При этом мы наблюдаем значительный рост среднего пикового возраста при малых значениях интенсивности λ . Это связано с тем, что генерация пакетов происходит крайне редко. При больших значениях λ значительного роста пикового возраста не наблюдается. Связано это с тем, что в условиях большой загрузки система с ограниченным накопителем почти всегда полностью занята, что приводит к определенной стабилизации в ее работе.

На рис. 4 представлен график, отражающий зависимость средней длительности обслуживания от интенсивности λ . Как видно из рисунка, при больших значениях загрузки средняя длительность обслуживания стремится к предельному значению 0,5. Связано это с тем, что в условиях большой загрузки все приборы полностью заняты обслуживанием. При этом суммарная интенсивность обслуживания μ в нашем примере равна шести, т.е.

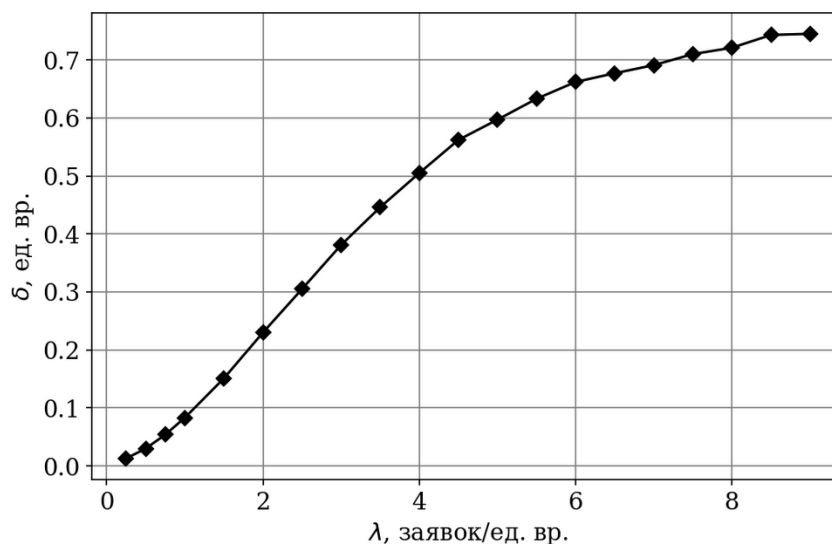


Рис. 6. График зависимости средней задержки переупорядочивания от интенсивности входящего потока λ

средняя интенсивность обслуживания одного прибора равняется двум, а, следовательно, средняя длительность обслуживания на одном приборе равна 0.5.

На рис. 5 и 6 отражена зависимость среднего времени ожидания обслуживания и средней задержки переупорядочивания от λ . На первый взгляд графики демонстрируют разное возрастание этих показателей с ростом λ по сравнению с графиком для средней длительности обслуживания. Это связано с тем, что при малых λ эти показатели фактически имеют нулевые средние значения. Однако с ростом λ и переходом системы в режим полной загрузки эти показатели тоже стабилизируются, что вполне соответствует реальности.

Заключение

Подводя итог проведенному исследованию, заметим, что в данной работе впервые исследована проблема возраста информации в многоканальной группе передачи в совокупности с проблемой переупорядочивания пакетов.

В результате проведенного исследования удалось получить выражения для преобразования Лапласа—Стилтьеса стационарной функции распределения и начальных моментов пикового возраста информации, передаваемой из периферийного источника в центр управления, моделируя процесс передачи с помощью многоканальной экспоненциальной системы массового обслуживания с переупорядочиванием заявок. Данное исследование позволило получить оценки возраста информации, учитывающие затраты времени на восстановление порядка переданных пакетов, установленного в узле-отправителе.

Результаты численного исследования показали, что не исключено существование такого набора исходных параметров рассматриваемой системы, при котором пиковый возраст информации достигает своих минимальных значений. Точное решение данного вопроса может стать предметом дальнейших исследований. Кроме этого, в своих будущих исследованиях автор предполагает обобщить полученные результаты на случай, когда процесс передачи информации моделируется посредством многоканальной системы обслуживания с распределениями длительностей генерации и обслуживания фазового типа. Неограниченный выбор параметров и фаз распределений этого типа позволит строить более точные математиче-

ские модели многоканальных систем передачи данных по сравнению с моделями в основе которых лежат однопараметрические семейства распределений.

Литература

1. Sultan A. Ultra Reliable and Low Latency Communications. 3GPP. 2023. URL: <https://www.3gpp.org/technologies/urllc-2022> (дата обращения: 15.09.2023).
2. Kaul S., Yates R., Gruteser M. Real-time status: How often should one update? // 2012 Proceedings IEEE INFOCOM, Orlando, FL, USA, 25–30 March. 2012. P. 2731–2735. DOI: 10.1109/INFOCOM.2012.6195689.
3. Costa M., Codreanu M., Ephremides A. On the Age of Information in Status Update Systems With Packet Management // IEEE Transactions on Information Theory. 2016. Vol. 62, no. 4. P. 1897–1910. DOI: 10.1109/TIT.2016.2533395.
4. Kaul S.K., Yates R.D., Gruteser M. Status updates through queues // 2012 46th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS), Princeton, NJ, USA, 21–23 March. 2012. P. 1–6. DOI: 10.1109/CISS.2012.6310931.
5. Kaul S., Gruteser M., Rai V., Kenney J. Minimizing age of information in vehicular networks // 2011 8th Annual IEEE Communications Society Conference on Sensor, Mesh and Ad Hoc Communications and Networks, Salt Lake City, UT, USA, 27–30 June. 2011. P. 350–358. DOI: 10.1109/SAHCN.2011.5984917.
6. Kosta A., Pappas N., Angelakis V. Angelakis. Age of Information: A New Concept, Metric and Tools // Foundations and Trends in Networking. 2017. Vol. 12, no. 3. P. 162–259.
7. Chiariotti F., Soret B., Popovski P. Peak Age of Information Distribution Bounds for Multi-Connectivity Transmissions // 2021 IEEE 22nd International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC), Lucca, Italy, 27–30 September. 2021. P. 321–325. DOI: 10.1109/SPAWC51858.2021.9593271.
8. Liu Q., Zeng H., Chen M. Minimizing AoI With Throughput Requirements in Multi-Path Network Communication // IEEE/ACM Transactions on Networking. 2022. Vol. 30, no. 3. P. 1203–1216. DOI: 10.1109/TNET.2021.3135494.
9. Qian Z., Wu F., Pan J., *et al.* Minimizing Age of Information in Multi-channel Time-sensitive Information Update Systems // IEEE INFOCOM 2020 — IEEE Conference on Computer Communications, Toronto, ON, Canada, 6–9 July. 2020. P. 446–455. DOI: 10.1109/INFOCOM41043.2020.9155420.
10. Beytur H.B., Uysal-Biyikoglu E. Minimizing age of information on multi-flow networks // 2018 26th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU), Izmir, Turkey, 2–5 May. 2018. P. 1–4. DOI: 10.1109/SIU.2018.8404772.
11. Liu Q., Zeng H., Chen M. Minimizing Age-of-Information with Throughput Requirements in Multi-Path Network Communication // Proceedings of the Twentieth ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing, New York, NY, USA, July. 2019. P. 41–50. DOI: 10.1145/3323679.3326502.
12. Матюшенко С.И. Анализ многоканальной системы обслуживания с ограниченным накопителем и переупорядочиванием заявок // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2010. № 19. С. 55–70.
13. Matyushenko S., Ermolayeva A. On stationary characteristics of a multiserver exponential queuing system with reordering of requests // 2021 13th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), Brno, Czech Republic, 25–27 October. 2021. P. 98–103. DOI: 10.1109/ICUMT54235.2021.9631709.

14. Наумов В.А. О предельных вероятностях полумарковского процесса // Современные задачи в точных науках. М.: Университет дружбы народов, 1975. С. 35–39.

Матюшенко Сергей Иванович, к.ф.-м.н., кафедра теории вероятностей и кибербезопасности, Российский университет дружбы народов (Москва, Российская Федерация, matyushenko-si@rudn.ru)

DOI: 10.14529/cmse240104

THE LAPLACE–STIELTJES TRANSFORMATION OF THE PEAK AGE DISTRIBUTION FUNCTION OF INFORMATION IN A MULTICHANNEL TRANSMISSION GROUP

© 2024 S.I. Matyushenko

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

(Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198 Russia)

E-mail: matyushenko-si@rudn.ru

Received: 12.12.2023

This article continues the author's cycle of works devoted to the problem of the Age of Information (AoI), a metric used in information systems for monitoring and managing remote sources of information from the control center. The theoretical analysis of information transmission systems requires a quantitative assessment of the “freshness” of information delivered to the control center. In this paper, we consider a model of a two-node transmission group consisting of an information source (sender node), a control center (recipient node) and several communication channels between them. It is assumed that the channel capacities may be different. At the same time, the network protocol requires that the information received by the recipient node be read in the same sequence as it was transmitted from the sending node. As a result, packets that violate the established order are delayed at the sending node for the time required to restore order. In this paper, the information transfer process is modeled using a multichannel queuing system with a limited storage, Poisson flow of applications, exponential maintenance and reordering of applications. At the same time, applications simulate packets of transmitted information, the system storage is a queue of packets for transmission, the service of applications on devices of varying intensity is the process of transmitting packets over communication channels. This model was used for the first time to estimate the age of information. As a result of the conducted research, expressions for the Laplace–Stieltjes transformation of the stationary distribution function and the initial moments of the maximum value of the information age, called the peak age, were obtained. A numerical study of system performance indicators has been conducted, including an analysis of the peak age of information at various system loads. The correctness of the analytical results is confirmed by the results of simulation modeling.

Keywords: age of information, peak age of information, multi-channel queuing system, reordering of applications.

FOR CITATION

Matyushenko S.I. The Laplace–Stieltjes Transformation of the Distribution Function of the Peak Age of Information in a Multichannel Transmission Group. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2024. Vol. 13, no. 1. P. 57–73. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse240104.

This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 License which permits non-commercial use, reproduction and distribution of the work without further permission provided the original work is properly cited.

References

1. Sultan A. Ultra Reliable and Low Latency Communications. 3GPP. 2023. URL: <https://www.3gpp.org/technologies/urllc-2022> (accessed: 15.09.2023).
2. Kaul S., Yates R., Gruteser M. Real-time status: How often should one update?. 2012 Proceedings IEEE INFOCOM. 2012. P. 2731–2735. DOI: 10.1109/INFOCOM.2012.6195689.
3. Costa M., Codreanu M., Ephremides A. On the Age of Information in Status Update Systems With Packet Management. IEEE Transactions on Information Theory. 2016. Vol. 62, no. 4. P. 1897–1910. DOI: 10.1109/TIT.2016.2533395.
4. Kaul S.K., Yates R.D., Gruteser M. Status updates through queues. 2012 46th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS). 2012. P. 1–6. DOI: 10.1109/CISS.2012.6310931.
5. Kaul S., Gruteser M., Rai V., Kenney J. Minimizing age of information in vehicular networks. 2011 8th Annual IEEE Communications Society Conference on Sensor, Mesh and Ad Hoc Communications and Networks. 2011. P. 350–358. DOI: 10.1109/SAHCN.2011.5984917.
6. Kosta A., Pappas N., Angelakis V. Angelakis. Age of Information: A New Concept, Metric and Tools. Foundations and Trends in Networking. 2017. Vol. 12, no. 3. P. 162–259.
7. Chiariotti F., Soret B., Popovski P. Peak Age of Information Distribution Bounds for Multi-Connectivity Transmissions. 2021 IEEE 22nd International Workshop on Signal Processing Advances in Wireless Communications (SPAWC). 2021. P. 321–325. DOI: 10.1109/SPAWC51858.2021.9593271.
8. Liu Q., Zeng H., Chen M. Minimizing AoI With Throughput Requirements in Multi-Path Network Communication. IEEE/ACM Transactions on Networking. 2022. Vol. 30, no. 3. P. 1203–1216. DOI: 10.1109/TNET.2021.3135494.
9. Qian Z., Wu F., Pan J., *et al.* Minimizing Age of Information in Multi-channel Time-sensitive Information Update Systems. IEEE INFOCOM 2020 — IEEE Conference on Computer Communications. 2020. P. 446–455. DOI: 10.1109/INFOCOM41043.2020.9155420.
10. Beytur H.B., Uysal-Biyikoglu E. Minimizing age of information on multi-flow networks. 2018 26th Signal Processing and Communications Applications Conference (SIU). 2018. P. 1–4. DOI: 10.1109/SIU.2018.8404772.
11. Liu Q., Zeng H., Chen M. Minimizing Age-of-Information with Throughput Requirements in Multi-Path Network Communication. Proceedings of the Twentieth ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2019. P. 41–50. DOI: 10.1145/3323679.3326502.
12. Matyushenko S.I. Analysis of a multichannel service system with limited storage and re-ordering of applications. Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika. 2010. No. 19. P. 55–70. (in Russian).
13. Matyushenko S., Ermolayeva A. On stationary characteristics of a multiserver exponential queuing system with reordering of requests. 2021 13th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). 2021. P. 98–103. DOI: 10.1109/ICUMT54235.2021.9631709.
14. Naumov V.A. On the limiting probabilities of a semi-Markov process. Sovremennye zadachi v tochnih naukah. M.: Universitet drugbi narodov, 1975. P. 35–39. (in Russian).