

О ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ДЛЯ ЗАДАЧИ СТОКСА С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НЕЙМАНА В НЕВЫПУКЛОЙ ОБЛАСТИ

© 2024 А.В. Рукавишников

Хабаровское отделение Института прикладной математики ДВО РАН

(680030 Хабаровск, ул. Серышева, д. 60)

E-mail: 78321a@mail.ru

Поступила в редакцию: 15.11.2024

Рассмотрена задача Стокса с граничными условиями Неймана с входящим углом на границе двумерной области. Введено понятие R_ν -обобщенного решения в множествах весовых пространств Соболева. Построен весовой метод конечных элементов на равномерной сетке, основанный на конечно-элементной паре Тейлора–Худа второго порядка и введения в базис весовой функции в некоторых степенях ν^* и μ^* для компонент поля скоростей и скалярной функции давления соответственно. Весовая функция в области совпадает с функцией расстояния от точки до вершины входящего угла в некоторой δ -окрестности и константе δ вне ее. Проведены численные эксперименты в невыпуклой области. Получен порядок сходимости приближенного решения к точному решению задачи, независящий от величины входящего угла и превышающий порядок сходимости для классического МКЭ. Результат о сходимости достигается без геометрического сгущения сетки в окрестности точки сингулярности. Проведена серия численных экспериментов для различных величин входящего угла и найдена область подходящих свободных параметров предложенного подхода. Для любой точки построенной области достигается оптимальный, с точки зрения сходимости, результат. Область выбора подходящих свободных параметров отличается от области для рассматриваемой задачи с граничными условиями Дирихле.

Ключевые слова: угловая сингулярность, задача Стокса с граничными условиями Неймана, R_ν -обобщенное решение, весовой МКЭ.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Рукавишников А.В. О численном методе для задачи Стокса с граничными условиями Неймана в невыпуклой области // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2024. Т. 13, № 4. С. 5–18. DOI: 10.14529/cmse240401.

Введение

Многие математические модели природных процессов описываются краевыми задачами с помощью систем уравнений с частными производными, имеющие ту или иную особенность. Особенность решения таких систем в двумерной замкнутой области Ω может быть связана с вырождением исходных данных или наличием входящих углов на границе области. Будем говорить, что краевая задача имеет сильную сингулярность, если ее решение не принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\Omega)$. Другими словами, интеграл Дирихле от ее решения расходится. В случае, когда решение принадлежит пространству Соболева $W_2^1(\Omega)$, но не принадлежит пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ краевая задача называется задачей со слабой сингулярностью или просто с сингулярностью. Например, обобщенное решение краевой эллиптической задачи с граничными условиями Дирихле в двумерной области, содержащей входящий угол на границе, т.е. угол из диапазона $(\pi, 2\pi]$, принадлежит лишь пространству $W_2^{1+\beta-\varepsilon}(\Omega)$, $\beta \in [0.25, 1)$, где ε — произвольное положительное действительное число. Поэтому приближенное решение, полученное классическими методами

конечных разностей или конечных элементов, сходится к точному решению не быстрее чем со скоростью $\mathcal{O}(h^\beta)$ [1].

Для краевых задач с сингулярностью существуют различные численные подходы, основанные на выделении сингулярных компонент обобщенного решения и сгущения сетки к точке сингулярности (см., например, [2, 3]). Эти методы существенно усложняют схему метода конечных элементов (МКЭ), что влияет на скорость вычислительного процесса и точность результата.

В [4] для эллиптических задач с граничными условиями Дирихле было предложено определять решение как R_ν -обобщенное в весовых пространствах Соболева. Теоретические результаты, связанные со существованием, единственностью и дифференциальными свойствами R_ν -обобщенного решения различных задач изучены в [5–9]. На основе этого подхода были созданы численные методы, позволяющие получать преимущество по порядку относительно шага сетки над классическими подходами (см., например, [10–12]).

В представленной работе рассмотрим задачу Стокса с граничными условиями Неймана, определим R_ν -обобщенное решение задачи в весовых множествах. Теоретический анализ обобщенного решения задачи Стокса (Навье—Стокса) с граничными условиями Неймана выполнен в работах [13–16]. В [13] изучена регулярность решения задачи в пространствах Соболева, существование и единственность слабых решений Навье—Стокса. В [14] показано как свойства оператора Стокса приводят к локальным или глобальным решениям для малых начальных данных. В [15] проведено теоретическое исследование решения нестационарной задачи, которая является линеаризацией модельной задачи со свободной границей. Доказаны оценки решения в нормах пространств Лебега и получено преимущество по сравнению со случаем граничного условия без проскальзывания. В [16] определяется связь свойств оператора Стокса—Неймана с оператором Стокса—Дирихле, в частности, связь их собственных значений. Здесь предложим численный метод решения задачи, основанный на определении R_ν -обобщенного решения и введении в базис весовой функции в некоторых степенях. Проведен ряд численных экспериментов задачи в невыпуклой области. Экспериментально получим, что порядок сходимости приближенного решения к точному решению задачи не зависит от величины входящего угла.

Статья организована следующим образом. Раздел 1 содержит необходимые обозначения, определения пространств и множеств. Раздел 2 посвящен определению классического и R_ν -обобщенного решений задачи Стокса с граничными условиями Неймана. В разделе 3 построена схема весового метода конечных элементов. В разделе 4 представлены результаты численных экспериментов и определены области выбора свободных параметров подхода. В заключении приведены выводы и намечены направления дальнейших исследований.

1. Необходимые обозначения. Определения пространств и множеств

Область Ω есть невыпуклый многоугольник с границей Γ , содержащий входящий угол на границе в двумерном евклидовом пространстве \mathcal{R}^2 , где $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ его элемент, $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2$ его мера и $\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ его норма. Пусть вершина входящего угла совпадает с началом координат $\mathcal{O} = (0, 0)$. Вершину входящего угла будем называть точкой сингулярности. Пусть $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ — замыкание области Ω .

Введем необходимые обозначения. Пусть заданы векторные поля $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2)$ и скалярное поле b , тогда

$$\Delta \mathbf{a} = \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_2^2} \right)^T - \text{оператор Лапласа поля } \mathbf{a},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} - \text{дивергенция поля } \mathbf{a}, \nabla b = \left(\frac{\partial b}{\partial x_1}, \frac{\partial b}{\partial x_2} \right)^T - \text{градиент поля } b.$$

Кроме того,

$$\mathbf{a} \cdot \nabla b = \sum_{i=1}^2 a_i \frac{\partial b}{\partial x_i}, \quad \nabla \mathbf{a} : \nabla \mathbf{c} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial c_i}{\partial x_j},$$

$$\nabla \mathbf{a} : (\mathbf{c} \nabla b) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial a_i}{\partial x_j} c_i \frac{\partial b}{\partial x_j}, \quad (\mathbf{a} \nabla b) : (\mathbf{c} \nabla b) = \sum_{i,j=1}^2 a_i \frac{\partial b}{\partial x_j} c_i \frac{\partial b}{\partial x_j},$$

$$[\mathbf{a}(\mathbf{d} \cdot \nabla b)] : \mathbf{c} = \sum_{i,j=1}^2 a_j (d_i \frac{\partial b}{\partial x_i}) c_j, \quad (\nabla \mathbf{a} \mathbf{d}) : \mathbf{c} = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial a_j}{\partial x_i} d_i c_j.$$

Через Ω_δ обозначим область, образованную пересечением круга с центром в начале координат \mathcal{O} и радиусом δ с $\bar{\Omega}$, т.е. $\Omega_\delta = \{\mathbf{x} \in \bar{\Omega} : \|\mathbf{x}\| \leq \delta \ll 1, \delta > 0\}$. Определим функцию $\rho(\mathbf{x})$ в $\bar{\Omega}$, которую назовем весовой, имеющую следующий вид:

$$\rho(\mathbf{x}) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_\delta, \\ \delta, & \text{если } \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \setminus \Omega_\delta. \end{cases}$$

Определим необходимые нам весовые пространства и множества обобщенных функций. Через $L_{2,\alpha}(\Omega)$ обозначим весовое пространство функций $v(\mathbf{x})$ с ограниченной нормой

$$\|v\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \rho^{2\alpha}(\mathbf{x}) v^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \quad (1)$$

Причем, если $\alpha = 0$, то $L_{2,0}(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$. Обозначим через $W_{2,\alpha}^1(\Omega)$ пространство функций $v(\mathbf{x})$ таких, что $v(\mathbf{x}) \in W_{2,\alpha}^1(\Omega)$, если ограничена интегральная норма

$$\|v\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega)} = \left(\|v\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)}^2 + \sum_{|l|=1} \|\rho^\alpha |D^l v(\mathbf{x})|\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad (2)$$

где $D^l v(\mathbf{x}) = \frac{\partial^{|l|} v(\mathbf{x})}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}}$ — l -я обобщенная производная функции $v(\mathbf{x})$: $|l| = l_1 + l_2$, l_i — неотрицательные целые числа, $i = 1, 2$.

Введем следующие условия для функции $v(\mathbf{x})$:

$$|v(\mathbf{x})| \leq C_1 \delta^{\alpha-\tau} \rho^{\tau-\alpha}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\delta, \quad (3)$$

$$|D^1 v(\mathbf{x})| \leq C_1 \delta^{\alpha-\tau} \rho^{\tau-\alpha-1}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_\delta, \quad (4)$$

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} \rho^{2\alpha}(\mathbf{x}) v^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \geq (C_2)^2 > 0, \quad (5)$$

где C_1 — положительная константа, τ — малый положительный параметр, независимый от δ, α и $v(\mathbf{x})$. Далее определим множества в введенных весовых пространствах. Через

$L_{2,\alpha}(\Omega, \delta)$ обозначим множество функций $v(\mathbf{x})$ из пространства $L_{2,\alpha}(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (3) и (5) с ограниченной нормой (1). Определим множество $L_{2,\alpha}^0(\Omega, \delta)$ функций $v(\mathbf{x})$ таких, что $v(\mathbf{x}) \in L_{2,\alpha}^0(\Omega, \delta)$, если $v(\mathbf{x}) \in L_{2,\alpha}(\Omega, \delta)$ и $\int_{\Omega} \rho^{\alpha}(\mathbf{x})v(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$ с ограниченной нормой (1). Если $\alpha = 0$, то $L_2^0 := L_{2,0}^0(\Omega, \delta)$. Через $W_{2,\alpha}^1(\Omega, \delta)$ обозначим множество функций $v(\mathbf{x})$ из весового пространства $W_{2,\alpha}^1(\Omega)$, удовлетворяющих условиям (3)–(5) с ограниченной нормой (2). Если $\alpha = 0$, то $W_2^1 := W_{2,0}^1(\Omega, \delta)$.

Для векторных полей, пространства и множества будем выделять жирным шрифтом, например, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) : \mathbf{v} \in \mathbf{L}_{2,\alpha}(\Omega, \delta)$, если $v_i \in L_{2,\alpha}(\Omega, \delta), i = 1, 2$, с ограниченной нормой $\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{L}_{2,\alpha}(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{L_{2,\alpha}(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$.

2. Определение классического и R_{ν} -обобщенного решений задачи Стокса с граничными условиями Неймана. Связь R_{ν} -обобщенного и обобщенного решений

Задача Стокса с граничными условиями Неймана состоит в том, что, зная функции $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ в Ω и \mathbf{r} на Γ необходимо найти поля скоростей $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ и давления p , которые удовлетворяют системе дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$-\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad (7)$$

$$\left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - p \right) \mathbf{n} = \mathbf{r} \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad (8)$$

где $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ единичный вектор внешней нормали к Γ .

Определим билинейные и линейную формы:

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w} : \nabla (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad (9)$$

$$b_1(\mathbf{w}, q) = - \int_{\Omega} q \operatorname{div} (\rho^{2\nu} \mathbf{w}) d\mathbf{x}, \quad b_2(\mathbf{w}, q) = - \int_{\Omega} (\rho^{2\nu} q) \operatorname{div} \mathbf{w} d\mathbf{x}, \quad (10)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot (\rho^{2\nu} \mathbf{v}) ds,$$

где ds — дифференциал по Γ .

Пусть

$$\mathbf{f} \in \mathbf{L}_{2,\beta}(\Omega), \mathbf{r} \in \mathbf{L}_{2,\nu}(\Gamma), 0 \leq \beta \leq \nu. \quad (11)$$

Введем понятие R_{ν} -обобщенного решения задачи Стокса (6)–(8) с граничными условиями Неймана в весовых множествах.

Определение 1 (R_{ν} -обобщенного решения). Пару функций $(\mathbf{u}_{\nu}, p_{\nu}) \in \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$ назовем R_{ν} -обобщенным решением задачи Стокса (6)–(8), если для всех пар функций $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega, \delta) \times L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$ справедливы интегральные тождества:

$$a(\mathbf{u}_{\nu}, \mathbf{v}) + b_1(\mathbf{v}, p_{\nu}) = l(\mathbf{v}), \quad (12)$$

$$b_2(\mathbf{u}_{\nu}, q) = 0, \quad (13)$$

где \mathbf{f} и \mathbf{r} удовлетворяют условиям (11) и $\mathbf{u}_\nu = (u_{1,\nu}, u_{2,\nu})$.

Определим связь между R_ν -обобщенным и обобщенным решениями задачи Стокса (6)–(8).

Во-первых, по аналогии с Леммой 4 [17] имеет место следующее утверждение: $z \in W_{2,\nu}^1(\Omega, \delta)$ тогда и только тогда, когда $\rho^\nu z \in W_2^1$. По определению нормы (1): $q \in L_{2,\nu}^0(\Omega, \delta)$ тогда и только тогда, когда $\rho^\nu q \in L_2^0$.

Во-вторых, справедливы следующие представления для $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ и $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$:

$$\frac{\partial(\rho^{2\nu} v_i)}{\partial x_j} = \rho^\nu \frac{\partial(\rho^\nu v_i)}{\partial x_j} + (\rho^\nu v_i) \frac{\partial \rho^\nu}{\partial x_j},$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \rho^{-\nu} \frac{\partial(\rho^\nu w_i)}{\partial x_j} - \rho^{-\nu} w_i \frac{\partial \rho^\nu}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2.$$

Согласно этому, билинейная форма $a(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ в (9) может быть представлена в следующем виде:

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \tilde{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{w}, \mathbf{v}),$$

где

$$\tilde{a}(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla(\rho^\nu \mathbf{w}) : \nabla(\rho^\nu \mathbf{v}) dx,$$

$$a_1(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_\delta} \left[\nabla(\rho^\nu \mathbf{w}) : (\mathbf{v} \nabla \rho^\nu) - (\mathbf{w} \nabla \rho^\nu) : \nabla(\rho^\nu \mathbf{v}) - (\mathbf{w} \nabla \rho^\nu) : (\mathbf{v} \nabla \rho^\nu) \right] dx.$$

Билинейные формы $b_1(\mathbf{w}, q)$ и $b_2(\mathbf{w}, q)$ в (8) могут быть представлены в таком виде:

$$b_1(\mathbf{w}, q) = \tilde{b}(\mathbf{w}, q) + d(\mathbf{w}, q) \quad \text{и} \quad b_2(\mathbf{w}, q) = \tilde{b}(\mathbf{w}, q) - d(\mathbf{w}, q),$$

где

$$\tilde{b}(\mathbf{w}, q) = - \int_{\Omega} (\rho^\nu q) \operatorname{div}(\rho^\nu \mathbf{w}) dx, \quad d(\mathbf{w}, q) = - \int_{\Omega_\delta} (\rho^\nu q) (\mathbf{w} \cdot \nabla \rho^\nu) dx.$$

Кроме того,

$$\tilde{l}(\tilde{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} dx + \int_{\Gamma} \tilde{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} ds = l(\mathbf{v}),$$

где $\tilde{\mathbf{f}} = \rho^\nu \mathbf{f}$, $\tilde{\mathbf{r}} = \rho^\nu \mathbf{r}$ и $\tilde{\mathbf{v}} = \rho^\nu \mathbf{v}$.

На основании вышеизложенного, определим обобщенное решение задачи (6)–(8).

Определение 2 (обобщенного решения). Пару функций $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) \in \mathbf{W}_2^1 \times L_2^0$ назовем обобщенным решением задачи Стокса (6)–(8), если для всех пар функций $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{q}) \in \mathbf{W}_2^1 \times L_2^0$ справедливы интегральные тождества:

$$\tilde{a}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) + \tilde{b}(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{p}) = \tilde{l}(\tilde{\mathbf{v}}), \quad (14)$$

$$\tilde{b}(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{q}) = 0, \quad (15)$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$.

Замечание 1. Вариационная постановка задачи (12), (13) при определении R_ν -обобщенного решения задачи (6)–(8), в отличие от вариационной задачи (14), (15) при определении обобщенного решения задачи (6)–(8), является несимметричной ввиду наличия формы $d(\cdot, \cdot)$, определенной в δ -окрестности точки сингулярности.

Замечание 2. Отличие определения решений имеет место в δ -окрестности входящего угла.

Замечание 3. Покажем, что приближенное решение, полученное на основании определенного R_ν -обобщенного решения имеет порядок сходимости к точному решению задачи, независящий от величины входящего угла, в отличие от приближенного обобщенного решения, порядок сходимости которого уменьшается с увеличением величины входящего угла. Результат достигается благодаря качественному учету погрешности в Ω_δ . При этом погрешность не распространяется из Ω_δ во внутреннюю часть расчетной области. Результат достигается без сгущения сетки к точке сингулярности.

3. Схема весового метода конечных элементов

Построим схему весового метода конечных элементов для задачи Стокса (6)–(8), основанную на определении R_ν -обобщенного решения. Для этой цели проведем квазиравномерную триангуляцию T_h области $\bar{\Omega}$ [1]. Пусть L_s — произвольный треугольник триангуляции со стороной порядка h , его назовем конечным элементом. Обозначим через $\Omega_h = \bigcup_{L_s \in T_h} L_s$ объединение всех конечных элементов. Для компонент вектора скоростей, в качестве узлов аппроксимации, будем использовать вершины и середины сторон L_s . Их множество обозначим через R^{vel} , а для скалярной функции давления вершины конечных элементов. Их множество обозначим через R^{pres} и определим конечно-элементную пару Тейлора–Худа 2-го порядка (см., например, [18]) $\mathbf{X}_h \times Z_h$, где $\mathbf{X}_h = X_h \times X_h$ и $X_h = \{v^h \in C(\Omega) : v^h|_{L_s} \in P_2(L_s) \forall L_s \in T_h\}$; $Z_h = \{z^h \in C(\Omega) : z^h|_{L_s} \in P_1(L_s) \forall L_s \in T_h\}$.

На основании вышеизложенного, представим особые базисные функции и построим схему весового МКЭ для приближенного решения задачи Стокса (6)–(8). Каждому узлу $N_k \in R^{vel}$ и $M_l \in R^{pres}$ соответствует базисная функция

$$\theta_k(\mathbf{x}) = \rho^{-\nu^*}(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x}) \text{ и } \chi_l(\mathbf{x}) = \rho^{-\mu^*}(\mathbf{x})\psi_l(\mathbf{x}), \quad k, l = 0, 1, \dots,$$

где $\varphi_k(\mathbf{x}) \in X_h$, $\varphi_k(N_i) = \delta_{ki}$ и $\psi_l(\mathbf{x}) \in Z_h$, $\psi_l(M_i) = \delta_{li}$, $i, k, l = 0, 1, \dots$, δ_{ij} — символ Кронекера, ν^* и μ^* свободные (положительные) параметры подхода.

Через V_h и Q_h обозначим множества для компонент вектора скоростей и функции давления как линейные оболочки систем базисных функций $\{\theta_k\}_k$ и $\{\chi_l\}_l$ соответственно

$$u_{\nu,1}^h(\mathbf{x}) = \sum_k d_{2k}\theta_k(\mathbf{x}), \quad u_{\nu,2}^h(\mathbf{x}) = \sum_k d_{2k+1}\theta_k(\mathbf{x}), \quad p_\nu^h(\mathbf{x}) = \sum_l e_l\chi_l(\mathbf{x}), \quad (16)$$

где $d_j = \rho^{\nu^*}(N_{[j/2]})\tilde{d}_j$, $e_i = \rho^{\mu^*}(M_i)\tilde{e}_i$. Коэффициенты d_j и e_i в (16) определяются как решение системы линейных алгебраических уравнений (см. (19)) ниже. Пусть $\mathbf{V}_h = V_h \times V_h$ и $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega_h, \delta)$ и $Q_h \subset L_{2,\nu}^0(\Omega_h, \delta)$.

Введем понятие приближенного R_ν -обобщенного решения задачи Стокса (6)–(8).

Определение 3. Приближенным R_ν -обобщенным решением задачи Стокса (6)–(8) по весовому методу конечных элементов назовем пару функций $(\mathbf{u}_\nu^h, p_\nu^h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ такую, что для произвольной пары функций $(\mathbf{v}^h, q^h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ справедливы интегральные тождества:

$$a(\mathbf{u}_\nu^h, \mathbf{v}^h) + b_1(\mathbf{v}^h, p_\nu^h) = l(\mathbf{v}^h), \quad (17)$$

$$b_2(\mathbf{u}_\nu^h, q^h) = 0, \quad (18)$$

где \mathbf{f} и \mathbf{g} удовлетворяют условиям (11) и $\mathbf{u}_\nu^h = (u_{1,\nu}^h, u_{2,\nu}^h)$.

Задача (17), (18) порождает систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где $\mathbf{y} = (d_0, d_2, d_4, \dots, d_1, d_3, d_5, \dots)^T$, $\mathbf{z} = (e_0, e_1, e_2, \dots)^T$, \mathbf{F} — вектор-столбец значений линейной формы $l(\theta_k)$.

Итерационный процесс с переобуславливанием матрицы системы вида (19) построен и реализован (см., например, [11]). В следующем параграфе проведем необходимые численные эксперименты и покажем преимущество предложенного нами весового МКЭ.

4. Численные эксперименты. Определение области выбора свободных параметров подхода

В этом разделе представим результаты численных экспериментов решения задачи Стокса (6)–(8) с граничными условиями Неймана для двух конфигураций невыпуклой области (см. рис. 1).

Таблица 1. Зависимость погрешностей приближенного R_ν -обобщенного решения, используя весовой МКЭ, от шага сетки h (по строкам) и степеней ν и ν^* ($\mu^* = \nu^*$) в норме $\|\mathbf{u}_\nu - \mathbf{u}_\nu^h\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)}$, $\omega = \frac{3\pi}{2}$

(δ, ν)	(0.012, 2.0)	(0.0125, 1.8)
h	$\nu^* = 0.375$	$\nu^* = 0.35$
0.01	1.201e-5	3.051e-5
0.005	6.004e-6	1.525e-5
0.0025	2.998e-6	7.615e-6

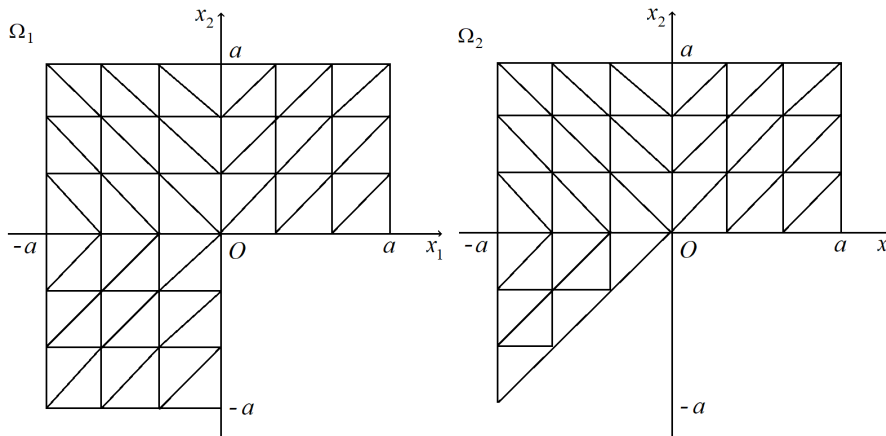


Рис. 1. Триангуляции областей Ω_1 и Ω_2

Таблица 2. Зависимость погрешностей приближенного обобщенного решения, используя классический МКЭ, от шага сетки h (по столбцам) ($\nu = \mu^* = \nu^* = 0, \delta = 1$) в норме $\|\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}^h\|_{\mathbf{W}_{2,0}^1(\Omega)}$, $\omega = \frac{3\pi}{2}$

h	0.01	0.005	0.0025
$\ \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}^h\ _{\mathbf{W}_{2,0}^1(\Omega)}$	1.647e-1	1.140e-1	7.822e-2

Покажем преимущество весового подхода над классическим МКЭ. Представим точное решение задачи (6)–(8) в полярных координатах (r, φ) в следующей форме:

$$u_1(r, \varphi) = r^{\beta_k} \chi_{1,k}(\varphi), \quad u_2(r, \varphi) = r^{\beta_k} \chi_{2,k}(\varphi), \quad p(r, \varphi) = r^{\beta_k - 1} \gamma_k(\varphi),$$

$$\begin{pmatrix} \chi_{1,k}(\varphi) \\ \chi_{2,k}(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \beta_k)\Lambda_k(\varphi) & \Lambda'_k(\varphi) \\ \Lambda'_k(\varphi) & -(1 + \beta_k)\Lambda_k(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$\gamma_k(\varphi) = \frac{(1 + \beta_k)^2 \Lambda'_k(\varphi) + \Lambda_k'''(\varphi)}{\beta_k - 1},$$

где

$$\Lambda_k(\varphi) = \cos((1 - \beta_k)\varphi) - \cos((1 + \beta_k)\varphi) +$$

$$+(1 + \beta_k)^{-1} \sin((1 + \beta_k)\varphi) \cos(\omega_k \beta_k) - (\beta_k - 1)^{-1} \sin((\beta_k - 1)\varphi) \cos(\omega_k \beta_k), \quad k = 1, 2,$$

где $\beta_k = \min\{\beta : \sin(\beta \omega_k) + \beta \sin \omega_k = 0 \text{ и } \beta > 0\}$. Тогда для $\omega_1 = \frac{3\pi}{2}$, имеем $\beta_1 \approx 0.54448$, а для $\omega_2 = \frac{5\pi}{4} - \beta_2 \approx 0.67358$. Таким образом, величина β_k определяет асимптотику поведения решения в окрестности точки сингулярности. При этом $u_i \notin W_2^2(\Omega), i = 1, 2$, и $p \notin W_2^1(\Omega)$ — типичная ситуация для поведения решения в невыпуклой области с входящим углом на границе Γ . Полагаем, что $a = 1, h = \frac{2}{N}$, где N — количество отрезков разбиения по каждому направлению, h — шаг сетки.

Величину погрешности приближенного R_ν -обобщенного решения поля скоростей \mathbf{u}_ν^h и приближенного обобщенного решения ($\nu = \nu^* = \mu^* = 0, \delta = 1$) поля скоростей $\tilde{\mathbf{u}}^h$ определяем как модуль разности между точным и приближенным решениями в нормах пространств $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)$ и $\mathbf{W}_{2,0}^1(\Omega)$ соответственно.

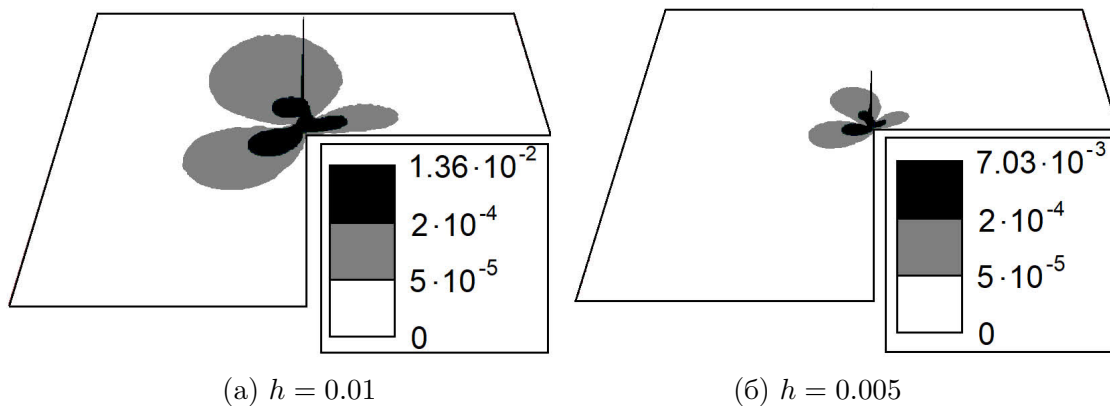


Рис. 2. Абсолютная погрешность первой компоненты поля скоростей приближенного R_ν -обобщенного решения ($\nu = 2.0, \nu^* = \mu^* = 0.375, \delta = 0.012$), $\omega = \frac{3\pi}{2}$

Результаты представлены в табл. 1–4 и рис. 2 и 3. Параметры ν, ν^*, μ^* и δ , представленного весового МКЭ, определены экспериментально.

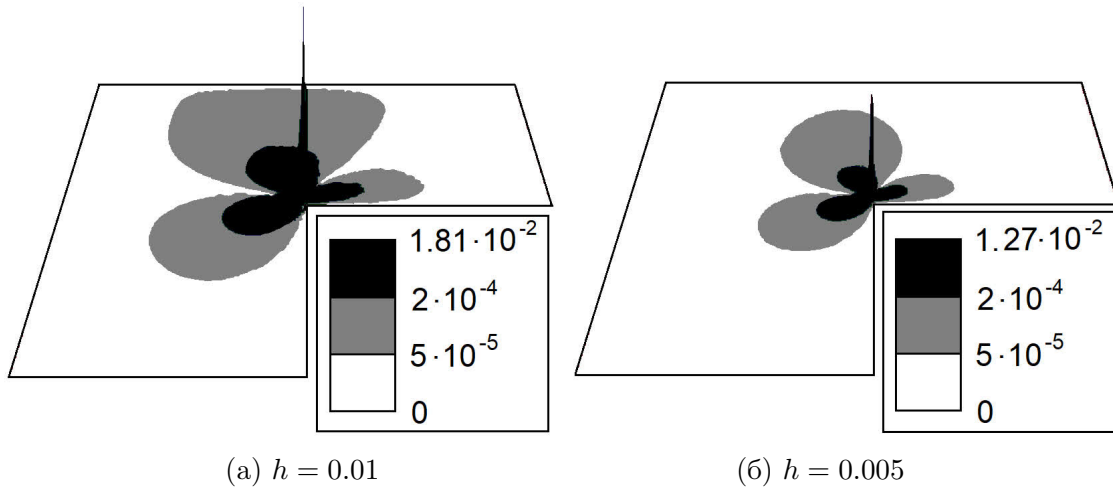


Рис. 3. Абсолютная погрешность первой компоненты поля скоростей приближенного обобщенного решения ($\nu = 0, \nu^* = \mu^* = 0, \delta = 1$), $\omega = \frac{3\pi}{2}$

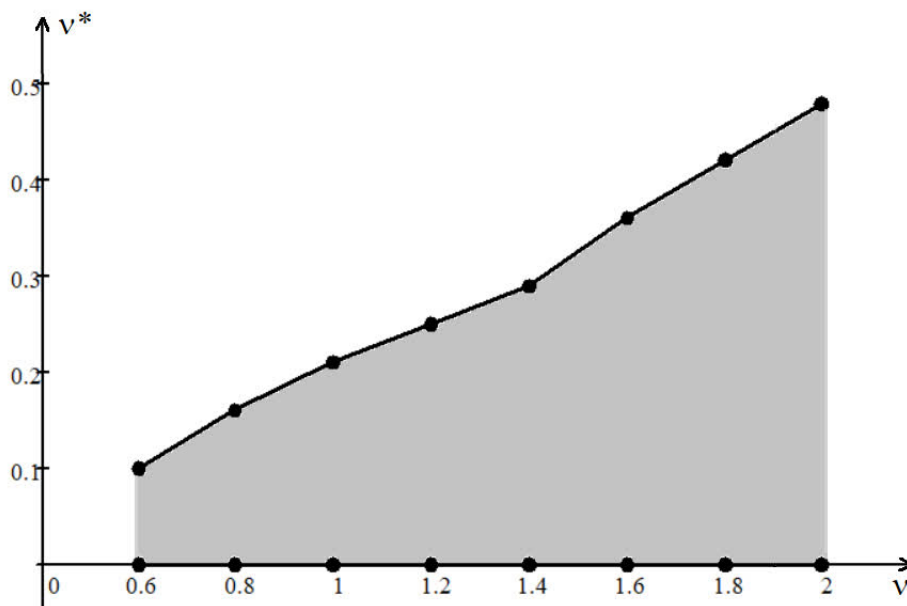


Рис. 4. Область подходящих свободных параметров метода для угла $\omega = \frac{3\pi}{2}$

Далее поставим себе задачу об определении области в переменных $(\nu, \nu^*)(\mu^* = \nu^*)$, для которой (в каждой ее точке) значение погрешности отличается от оптимальной не более чем на 6 процентов для всех величин $h = 0.01, 0.005, 0.0025$. В качестве радиуса δ -окрестности выбираем величину из диапазона $[0.01, 0.03]$. В экспериментах рассматриваем шаг изменения по переменной ν^* , равный 0.01 для всех положительных значений и шаг по переменной ν , равный 0.2 из диапазона $[0.6, 2.0]$ для Ω_1 и $[0.4, 2.0]$ для Ω_2 . На рис. 4 и 5 показаны экспериментально найденные области выбора свободных параметров предложенного подхода.

Таблица 3. Зависимость погрешностей приближенного R_ν -обобщенного решения, используя весовой МКЭ, от шага сетки h (по строкам) и степеней ν и ν^* ($\mu^* = \nu^*$) в норме $\|\mathbf{u}_\nu - \mathbf{u}_\nu^h\|_{\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)}$, $\omega = \frac{5\pi}{4}$

(δ, ν)	(0.0125, 2.0)	(0.015, 1.8)
h	$\nu^* = 0.275$	$\nu^* = 0.25$
0.01	5.113e-6	1.756e-5
0.005	2.545e-6	8.731e-6
0.0025	1.277e-6	4.369e-6

Таблица 4. Зависимость погрешностей приближенного обобщенного решения, используя классический МКЭ, от шага сетки h (по столбцам) ($\nu = \mu^* = \nu^* = 0$, $\delta = 1$) в норме $\|\tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}^h\|_{\mathbf{W}_{2,0}^1(\Omega)}$, $\omega = \frac{5\pi}{4}$

h	0.01	0.005	0.0025
$\ \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\mathbf{u}}^h\ _{\mathbf{W}_{2,0}^1(\Omega)}$	8.329e-2	5.202e-2	3.262e-2

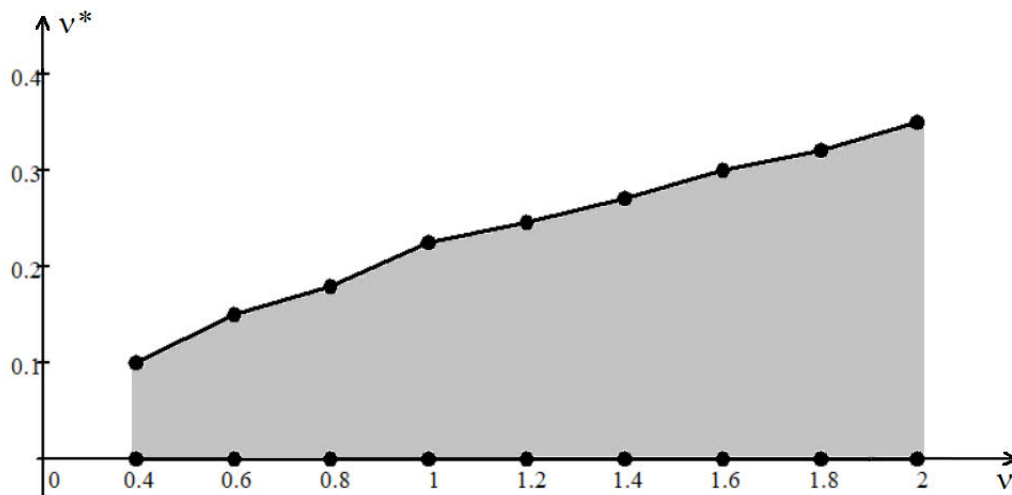


Рис. 5. Область подходящих свободных параметров метода для угла $\omega = \frac{5\pi}{4}$

Заключение

В статье введено понятие R_ν -обобщенное решение задачи Стокса с граничными условиями Неймана в несимметричной смешанной постановки задачи. Компоненты решения определяются в множествах весовых пространств С.Л. Соболева. Построен весовой метод конечных элементов, основанный на определении конечно-элементной пары Тейлора—Худа 2го порядка.

Результаты численных экспериментов задачи Стокса с граничными условиями Неймана в невыпуклой области приводят к следующим выводам.

- Приближенное обобщенное решение, полученное с помощью классического МКЭ, сходится к точному решению задачи со скоростью не выше $\mathcal{O}(h^{0.54})$ и $\mathcal{O}(h^{0.67})$ для Ω_1 и

Ω_2 соответственно в норме пространства $\mathbf{W}_{2,0}^1(\Omega)$ (табл. 2 и 4), в то время как приближенное R_ν -обобщенное решение, полученное благодаря весового МКЭ, сходится к точному решению со скоростью $\mathcal{O}(h)$ в норме пространства $\mathbf{W}_{2,\nu}^1(\Omega)$ для всех величин входящего угла (табл. 1 и 3). Результаты согласуются с априорными оценками скорости сходимости приближенного решения к точному решению задачи (см. [1, 10]).

- Результат достигается без сгущения сетки в окрестности точки сингулярности.
- Предложенный весовой МКЭ позволяет производить высокоточные вычисления в окрестности вершины входящего угла и не дает погрешности распространяться во внутреннюю часть расчетной области, где решение обладает достаточной гладкостью (см. рис. 2).
- Построена область подходящих свободных параметров подхода. Малому изменению параметров области соответствует малое изменение погрешности.

В дальнейших исследованиях, основываясь на определении R_ν -обобщенного решения и предложенного весового МКЭ, предполагаем получить численные результаты для различных форм нелинейных уравнений Навье—Стокса, таких как конвективная, кососимметричная, консервативная и других.

Кроме того, классический МКЭ теряет в два раза свой порядок точности для краевой задачи с граничными условиями Дирихле—Неймана на сторонах входящего угла по сравнению с МКЭ для краевой задачи с граничными условиями Дирихле—Дирихле и Неймана—Неймана (см. [1]). Предложенный нами подход не теряет свой порядок точности — это было установлено для задачи теории упругости [19]. В одной из ближайших работ исследуем весовой МКЭ для рассматриваемой задачи в области с входящим углом на границе и граничными условиями Дирихле—Неймана на сторонах этого угла.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН (№ 075-00459-24-00). Результаты получены с использованием оборудования Центра коллективного пользования «Дальневосточный вычислительный ресурс» ИАПУ ДВО РАН (<https://cc.dvo.ru>).

Литература

1. Ciarlet P. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam: North-Holland, 1978. 529 p.
2. Burda P., Novotny J., Sitek J. Precise FEM solution of a corner singularity using an adjusted mesh // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2005. Vol. 47. P. 1285–1292. DOI: 10.1002/flid.929.
3. Choi H.J., Kweon J.R. A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016. Vol. 292. P. 342–362. DOI: 10.1016/j.cam.2015.07.006.
4. Rukavishnikov V.A. Differential properties of an R_ν -generalized solution of the Dirichlet problem // Soviet Mathematics Doklady. 1990. Vol. 40. P. 653–655.
5. Rukavishnikov V.A. Methods of numerical analysis for boundary value problem with strong singularity // Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2009. Vol. 24. P. 565–590. DOI: 10.1515/RJNAMM.2009.035.
6. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Existence and uniqueness of an R_ν -generalized solution of the Dirichlet problem for the Lamé system with a corner singularity // Differential

- Equations. 2019. Vol. 55, no. 6. P. 832–840. DOI: 10.1134/S0012266119060107.
7. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. On the Dirichlet problem with corner singularity // Mathematics. 2020. Vol. 8, no. 11. P. 1870. DOI: 10.3390/math8111870.
 8. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. On the existence and uniqueness of an R_ν -generalized solution to the Stokes problem with corner singularity // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 10. P. 1752. DOI: 10.3390/math10101752.
 9. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. Theoretical analysis and construction of numerical method for solving the Navier-Stokes equations in rotation form with corner singularity // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2023. Vol. 429. P. 115218. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115218.
 10. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Weighted finite element method and body of optimal parameters for elasticity problem with singularity// Computers & Mathematics with Applications. 2023. Vol. 151. P. 408–417. DOI: 10.1016/j.camwa.2023.10.021.
 11. Rukavishnikov A.V., Rukavishnikov V.A. New numerical approach for the steady-state Navier–Stokes equations with corner singularity // International Journal of Computational Methods. 2022. Vol. 19, no. 9. P. 2250012. DOI: 10.1142/S0219876222500128.
 12. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Numerical method for Dirichlet problem with degeneration of the solution on the entire boundary // Symmetry. 2019. Vol. 11, no. 12. P. 1455. DOI: 10.3390/sym11121455.
 13. Mitrea M., Monniaux S., Wright M. The Stokes operator with Neumann boundary conditions in Lipschitz domains // Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 176, no. 3. P. 409–457. DOI: 10.1007/s10958-011-0400-0.
 14. Monniaux S. Various boundary conditions for Navier-Stokes equations in bounded Lipschitz domains // Discrete and Continuous Dynamical Systems - S. 2013. Vol. 6, no. 5. P. 1355–1369. DOI: 10.3934/dcdss.2013.6.1355.
 15. Shibata Y., Shimizu S. On the Stokes equation with Neumann boundary condition. // Banach Center Publications. 2005. Vol. 70. P. 239–250.
 16. Denis C., ter Elst A.F.M. The Stokes Dirichlet-to-Neumann operator // Journal of Evolution Equations. 2024. Vol. 24. P. 22. DOI: 10.1007/s00028-023-00930-x.
 17. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation // Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 6. P. 889. DOI: 10.3390/math10060889.
 18. Boffi D., Brezzi F., Fortin M. Mixed finite element methods and applications. Berlin: Springer, 2013. 685 p. DOI: 10.1007/978-3-642-36519-5.
 19. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Weighted finite-element method for Elasticity problems with singularity. Finite element method. Simulations, numerical analysis and solution techniques. London: IntechOpen, 2018. P. 295–311. DOI: 10.5772/intechopen.72733.

Рукавишников Алексей Викторович, к.ф.-м.н., доцент, ведущий научный сотрудник, Хабаровского отделения Института прикладной математики ДВО РАН (Хабаровск, Российская Федерация)

ON NUMERICAL METHOD FOR THE STOKES PROBLEM WITH NEUMANN BOUNDARY CONDITIONS IN NON-CONVEX DOMAIN

© 2024 A.V. Rukavishnikov

Khabarovsk Division of Institute for Applied Mathematics, FEB RAS

(st. Seryshev 60, Khabarovsk, 680038 Russia)

E-mail: 78321a@mail.ru

Received: 15.11.2024

The Stokes problem with Neumann boundary conditions with an incoming angle at the boundary of the two-dimensional domain is considered. The concept of an R_ν -generalized solution in sets of weighted Sobolev spaces is introduced. A weighted finite element method on a uniform grid is constructed based on the second-order Taylor-Hood finite element pair and the introduction to the basis of a weight function in some powers ν^* and μ^* for the components of the velocity field and the scalar pressure function, respectively. The weight function in the domain coincides with the function of the distance from the point to the vertex of the incoming angle in some δ -neighborhood and the constant δ outside it. Numerical experiments in the non-convex domain is carried out. The convergence rate of the approximate solution to the exact one is obtained, which is independent of an incoming angle value and exceeds the convergence rate for the classical FEM. The convergence result is achieved without geometric refinement of the mesh in the vicinity of the singularity point. A series of numerical experiments for different values of an incoming angle was carried out and the domain of suitable free parameters of the proposed approach is found. For any point of the constructed domain, an optimal result, from the point of view of convergence, is achieved. The area of choice of suitable free parameters differs from the area for the considered problem with Dirichlet boundary conditions.

Keywords: angle singularity, Stokes problem with Neumann boundary conditions, R_ν -generalized solution, weighted FEM.

FOR CITATION

Rukavishnikov A.V. On Numerical Method for the Stokes Problem with Neumann Boundary Conditions in Non-convex Domain. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2024. Vol. 13, no. 4. P. 5–18. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse240401.

This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 License which permits non-commercial use, reproduction and distribution of the work without further permission provided the original work is properly cited.

References

1. Ciarlet P. The Finite Element Method for Elliptic Problems. Amsterdam: North-Holland, 1978. 529 p.
2. Burda P., Novotny J., Sitek J. Precise FEM solution of a corner singularity using an adjusted mesh. International Journal for Numerical Methods in Fluids. 2005. Vol. 47. P. 1285–1292. DOI: 10.1002/fld.929.
3. Choi H.J., Kweon J.R. A finite element method for singular solutions of the Navier–Stokes. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2016. Vol. 292. P. 342–362. DOI: 10.1016/j.cam.2015.07.006.
4. Rukavishnikov V.A. Differential properties of an R_ν -generalized solution of the Dirichlet

- problem. Soviet Mathematics Doklady. 1990. Vol. 40. P. 653–655.
5. Rukavishnikov V.A. Methods of numerical analysis for boundary value problem with strong singularity. Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling. 2009. Vol. 24. P. 565–590. DOI: 10.1515/RJNAMM.2009.035.
 6. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Existence and uniqueness of an R_ν -generalized solution of the Dirichlet problem for the Lamé system with a corner singularity. Differential Equations. 2019. Vol. 55, no. 6. P. 832–840. DOI: 10.1134/S0012266119060107.
 7. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. On the Dirichlet problem with corner singularity. Mathematics. 2020. Vol. 8, no. 11. P. 1870. DOI: 10.3390/math8111870.
 8. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. On the existence and uniqueness of an R_ν -generalized solution to the Stokes problem with corner singularity. Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 10. P. 1752. DOI: 10.3390/math10101752.
 9. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. Theoretical analysis and construction of numerical method for solving the Navier-Stokes equations in rotation form with corner singularity. Journal of Computational and Applied Mathematics. 2023. Vol. 429. P. 115218. DOI: 10.1016/j.cam.2023.115218.
 10. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Weighted finite element method and body of optimal parameters for elasticity problem with singularity. Computers & Mathematics with Applications. 2023. Vol. 151. P. 408–417. DOI: 10.1016/j.camwa.2023.10.021.
 11. Rukavishnikov A.V., Rukavishnikov V.A. New numerical approach for the steady-state Navier–Stokes equations with corner singularity. International Journal of Computational Methods. 2022. Vol. 19, no. 9. P. 2250012. DOI: 10.1142/S0219876222500128.
 12. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Numerical method for Dirichlet problem with degeneration of the solution on the entire boundary. Symmetry. 2019. Vol. 11, no. 12. P. 1455. DOI: 10.3390/sym11121455.
 13. Mitrea M., Monniaux S., Wright M. The Stokes operator with Neumann boundary conditions in Lipschitz domains. Journal of Mathematical Sciences. 2011. Vol. 176, no. 3. P. 409–457. DOI: 10.1007/s10958-011-0400-0.
 14. Monniaux S. Various boundary conditions for Navier–Stokes equations in bounded Lipschitz domains. Discrete and Continuous Dynamical Systems - S. 2013. Vol. 6, no. 5. P. 1355–1369. DOI: 10.3934/dcdss.2013.6.1355.
 15. Shibata Y., Shimizu S. On the Stokes equation with Neumann boundary condition. Banach Center Publications. 2005. Vol. 70. P. 239–250.
 16. Denis C., ter Elst A.F.M. The Stokes Dirichlet-to-Neumann operator. Journal of Evolution Equations. 2024. Vol. 24. P. 22. DOI: 10.1007/s00028-023-00930-x.
 17. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikov A.V. On the properties of operators of the Stokes problem with corner singularity in nonsymmetric variational formulation. Mathematics. 2022. Vol. 10, no. 6. P. 889. DOI: 10.3390/math10060889.
 18. Boffi D., Brezzi F., Fortin M. Mixed finite element methods and applications. Berlin: Springer, 2013. 685 p. DOI: 10.1007/978-3-642-36519-5.
 19. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. Weighted finite-element method for Elasticity problems with singularity. Finite element method. Simulations, numerical analysis and solution techniques. London: IntechOpen, 2018. P. 295–311. DOI: 10.5772/intechopen.72733.