УДК 519.6 DOI: 10.14529/cmse250204

СУПЕРКОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ВОКРУГ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ*

 С.В. Поляков, В.О. Подрыга, Н.И. Тарасов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

(125047 Москва, Миусская пл., д. 4)

E-mail: polyakov@imamod.ru, pvictoria@list.ru, nikita_tarasov@imamod.ru

Поступила в редакцию: 18.04.2025

В работе представлены численный подход и его параллельная программная реализация для исследования процессов обтекания твердых тел сложной геометрии сверхзвуковыми потоками газа. Цель исследования состояла в анализе эффективности численных схем на неструктурированных гибридных сетках, аппроксимирующих квазигазодинамические (КГД) уравнения. В качестве примера была выбрана задача обтекания тел вращения различной формы. Газовая среда представлена сухим воздухом. Система КГД уравнений рассматривалась в однокомпонентной постановке. Она дополнялась уравнениями состояния идеального газа и зависимостями кинетических коэффициентов от температуры и давления. В работе исследовались зависимость результатов от параметров численного метода и особенности параллельной реализации. В первом случае было проанализировано влияние параметров регуляризации, используемых в КГД подходе. Во втором случае анализировались различные варианты распараллеливания. В итоге этих исследований были предложены оптимальные значения вышеуказанных параметров и выявлены зависимости эффективности от алгоритма распараллеливания. В численных экспериментах были рассмотрены осесимметричные течения газа вокруг цилиндра, эллипсоида и составного тела. Расчеты проводились для трех значений скорости входного потока. Полученные результаты подтвердили корректность разработанной вычислительной технологии.

Ключевые слова: течения газа вблизи твердых тел, тела вращения разной формы, квазигазодинамические уравнения, численные методы, параллельные алгоритмы, суперкомпьютерные вычисления.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Поляков С.В., Подрыга В.О., Тарасов Н.И. Суперкомпьютерное моделирование сверхзвукового течения вокруг тел вращения различной формы // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2025. Т. 14, № 2. С. 67–85. DOI: 10.14529/cmse250204.

Введение

Работа посвящена исследованиям в области прикладной газовой динамики [1]. К настоящему моменту имеется множество теоретических и практических подходов к решению задач прикладной газовой динамики компьютерными методами [2–8]. Один из таких подходов развивается с 1980-х годов и базируется на квазигазодинамической (КГД) системе уравнений [9–18]. Данная система является обобщением (регуляризацией) уравнений Навье—Стокса и в последнее время приобрела определенную популярность при расчетах сверхзвуковых течений разреженного газа в областях сложной геометрии [13, 16]. Основное преимущество КГД системы состоит в возможности проведения расчетов при числах Кнудсена вплоть до 1, а также при больших и очень больших числах Маха в условиях сильно разреженной газовой среды. Также система КГД достаточно просто обобщается на

*Статья рекомендована к публикации программным комитетом Всероссийской научной конференции с международным участием «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ) 2025».

случай газовых смесей. При ее численной реализации не приходится использовать сложный аппарат лимиттеров. Явная по времени численная схема достаточно просто распараллеливается. При ее использовании реализуется конечная скорость распространения возмущений газового потока, соответствующая физике процессов обтекания.

В настоящей работе исследуется численная реализация КГД подхода в случае обтекания тел вращения. Данная тематика востребована со времени запуска первых спутников в космос. В настоящее время возобновился интерес к разработке многоцелевых возвращаемых космических аппаратов различных конструкций и назначения. Среди проблем проектирования таких аппаратов имеется множество вопросов, решаемых на уровне предпроектного математического моделирования. Одной из актуальных проблем остается режим обтекания аппарата в атмосфере Земли. Ранее авторами рассматривались подобные задачи в контексте использования гибридных неструктурированных сеток для расчета газодинамических течений вокруг возвращаемых летательных аппаратов [19, 20]. Однако форма этих тел была затупленной и не имела острых углов. В данном исследовании рассмотрены различные геометрии, в том числе с острыми углами. Основной задачей было установить диапазоны расчетных параметров дискретной КГД модели и детали параллельной реализации используемой численной методики.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 представлена постановка задачи. Раздел 2 посвящен рассмотрению основных уравнений и уравнений связи. В разделе 3 описаны используемые в работе граничные и начальные условия. В разделе 4 приведены численный алгоритм и программная реализация разработанной математической модели. В разделе 5 представлены результаты моделирования и их анализ. В заключении приводится краткий обзор результатов, полученных в работе, а также указаны направления дальнейших исследований.

1. Постановка модельной задачи

Рассмотрим прямоугольную расчетную область Ω в (R, Z)-геометрии (рис. 1). Внутри области расположен контур тела вращения. Во внешности контура пространство изначально заполнено покоящимся газом с плотностью ρ_0, давлением p_0, температурой T_0. Предполагается, что тело вращения абсолютно твердое. Теплообмен тела с окружающим его газом не учитывается ввиду наличия теплоизоляции на поверхности тела. Слева в расчетную область входит газовый поток, отличающийся от покоящегося газа лишь скоростью u_{in}.

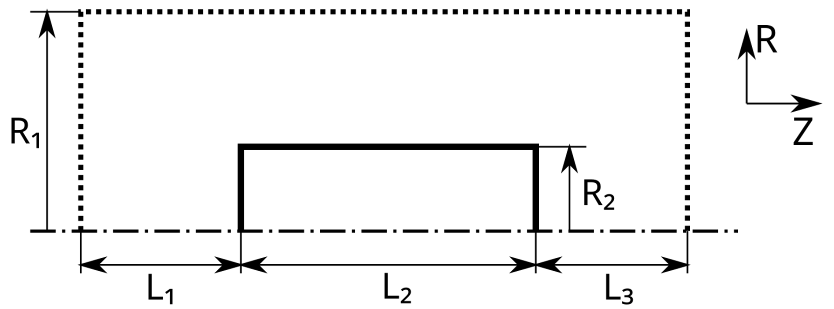
Размеры расчетной области Ω — $R_1 \times (L_1 + L_2 + L_3)$. Твердое тело представлено следующими тремя формами:

1. половиной центрального сечения прямоугольного цилиндра длины L_2 и ширины R_2 (см. рис. 1а);
2. половиной эллипсоида с диаметрами L_2 и $2R_2$ (см. рис. 1б);
3. половиной центрального сечения прямоугольного цилиндра длины $(L_2 - L_4)$, дополненного слева половиной сечения конуса с высотой L_4 и радиусом R_2 (см. рис. 1в).

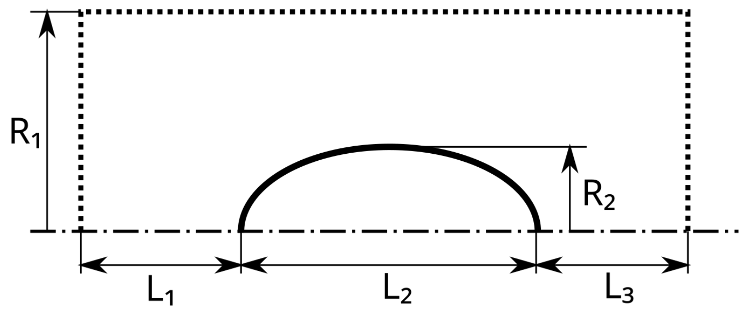
Целью анализа выбранной модельной задачи является анализ качества численного подхода и его параллельной программной реализации.

2. Основные уравнения

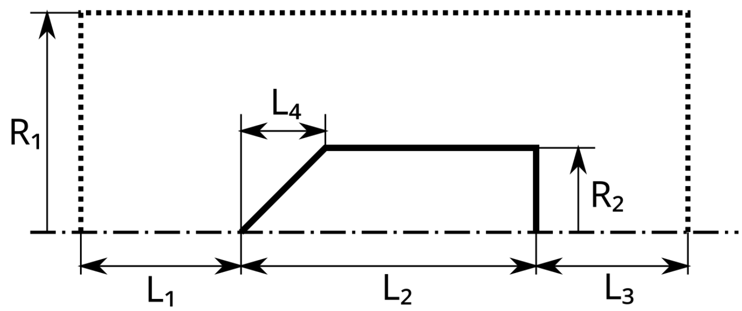
Анализ поставленной задачи проведем для случая однокомпонентного газа, соответствующего по параметрам воздушной среде. Для описания его состояния будем использо-



а) цилиндр



б) эллипсоид



в) двухсоставное тело

Рис. 1. Расчетная геометрия для трех форм тел вращения

вать квазигазодинамическую систему уравнений [11]. В безразмерных переменных в декартовой системе координат эта система вместе с уравнениями состояния и связей запишется следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{W}^{(\rho)} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{W}^{(I)} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{W}^{(E)} = 0, \tag{3}$$

$$E = \rho \left|\mathbf{u}\right|^2 /2 + \varepsilon, \quad \varepsilon = p/\left(\gamma - 1\right), \quad H = \left(E + p\right)/\rho, \quad p = \rho T/\gamma, \tag{4}$$

$$\mu = \tau p \mathrm{Sc}, \quad \chi = \tau p \mathrm{Sc}/\left(\mathrm{Pr}\left(\gamma - 1\right)\right), \quad \tau = \mathrm{Ma} T^{\omega}/\left(\mathrm{Re} p \mathrm{Sc}\right) + \alpha h/c, \quad c = \sqrt{T}.$$

Здесь предполагается, что газовая среда характеризуется массовой плотностью ρ, температурой T, давлением p и скоростью $\mathbf{u}$. Эти параметры нормированы соответственно на ρ_0, T_0, p_0. Вектор скорости $\mathbf{u}$ нормирован на скорость звука в газе при температуре T_0 и давлении p_0. Также в уравнениях (1)–(3) используются стандартные обозначения для частной производной по времени $\partial/\partial t$ и оператора дивергенции div в декартовых координатах.

Другие параметры газа используются в уравнениях связи (4). Это соответственно E — плотность полной энергии, H — энтальпия и ε — внутренняя энергия. Также в (4) используются $\mu = \mu\,(T,p)$ и $\chi = \chi\,(T,p)$ — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности, $\tau = \tau\,(T,p)$ — характерное время релаксации газовой среды к равновесному состоянию, введенное в рамках КГД подхода.

Параметрами модели являются: γ, α, h, c, ω — показатель адиабаты, положительный коэффициент регуляризации, характерный пространственный масштаб задачи (часто совпадает с шагом сетки при дискретизации), безразмерная местная скорость звука, показатель степени температурной зависимости в формулах для μ, χ, τ; Pr, Sc, Re и Ma — числа Прандтля, Шмидта, Рейнольдса и Маха.

Векторы $\mathbf{W}^{(\rho)}$, $\mathbf{W}^{(E)}$ и тензор $\mathbf{W}^{(I)}$ с точностью до знака совпадают с векторами потоков массовой плотности и плотности полной энергии и тензором потока плотности импульса. Они имеют следующий вид:

$$\begin{gathered}\mathbf{W}^{(\rho)} = \rho\,(\mathbf{u}-\mathbf{w})\,, \quad \mathbf{W}^{(I)} = \rho\,(\mathbf{u}-\mathbf{w})\otimes\mathbf{u} + p\mathbf{I} - \mathbf{\Pi}, \\ \mathbf{W}^{(E)} = H\rho\,(\mathbf{u}-\mathbf{w}) + \mathbf{q} - \mathbf{\Pi}\mathbf{u},\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}^{NS} + \mathbf{\Pi}^{QGD}, \quad \mathbf{\Pi}^{NS} = \left\{\Pi_{ij}^{NS}; i,j = X,Y,Z\right\}, \\ \Pi_{ij}^{NS} = \mu\,(\partial u_j/\partial i + \partial u_i/\partial j) - 2\mu\mathrm{div}\mathbf{u}/3,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{\Pi}^{QGD} = \rho\mathbf{u}\otimes\hat{\mathbf{w}} + \tau\left[\mathbf{u}\nabla p + \rho c^2\mathrm{div}\mathbf{u}\right]\mathbf{I}, \\ \mathbf{q} = -\chi\nabla T - \tau\left[\rho\,(\mathbf{u}\nabla\varepsilon + p\,(\mathbf{u}\nabla)\,(1/\rho))\right]\mathbf{u},\end{gathered} \tag{7}$$

$$\mathbf{w} = \frac{\tau}{\rho}\left(\mathrm{div}\,(\rho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \nabla p\right), \quad \hat{\mathbf{w}} = \frac{\tau}{\rho}\left[\rho\,(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p\right]. \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{w}$ и $\hat{\mathbf{w}}$ — КГД поправки к вектору скорости, $\otimes$ — знак прямого векторного произведения, $\mathbf{I}$ — единичный тензор, $\mathbf{\Pi}$ — тензор вязких напряжений, состоящий из двух слагаемых $\mathbf{\Pi}^{NS}$ и $\mathbf{\Pi}^{QGD}$, где первое совпадает с тензором Навье—Стокса, а второе появляется в результате применения КГД подхода.

Далее уравнения (1)–(3) и дополнительные связи (4)–(8) будем использовать для решения задачи обтекания твердого тела вращения в случае цилиндрической (R,Z)-геометрии расчетной области с учетом аксиальной симметрии тела (см. рис. 1).

3. Граничные и начальные условия

Система уравнений (1)–(3) со связями (4)–(8) дополняется граничными условиями на поверхности обтекаемого тела, а также традиционными граничными условиями на входе в среду и на свободных границах [11]. Они формулируются следующим образом.

- На левой границе области задаются параметры входного потока:
  $\rho = 1,\ p = 1/\gamma,\ T = 1,\ u_R = 0,\ u_Z = Ma;$
- на верхней и правой границах области задаются условия свободного выхода:
  $\partial\rho/\partial n = 0,\ \partial u_j/\partial n = 0,\ \partial E/\partial n = 0,\ j = R,Z;$
- на оси симметрии $(R = 0)$ задаются условия:
  $\partial\rho/\partial n = 0,\ u_R = 0,\ \partial u_Z/\partial n = 0,\ \partial E/\partial n = 0;$
- на поверхности объекта задаются условия прилипания при нулевом тепловом потоке:
  $\partial\rho/\partial n = 0,\ u_j = 0,\ \partial E/\partial n = 0,\ j = R,Z.$

В качестве начальных условий будем использовать условия покоя среды:
$\rho = 1,\ u_j = 0,\ p = 1/\gamma,\ T = 1,\ j = R, Z.$

4. Численный алгоритм и программная реализация

Численная реализация уравнений (1)–(3) с учетом (4)–(8) базируется на применении сеточного метода конечных объемов [21, 22] на неструктурированных сетках с различной формой ячеек. В данном случае мы выбрали ячейки треугольной формы. По временной переменной используются явные разностные схемы. Расчеты задачи проводились на треугольной пространственной сетке Ω_h с параметрами N_P, N_E, N_C, обозначающими число точек, число ребер и число треугольных ячеек соответственно. Сетка по времени ω_t характеризуется шагом Δt и количеством шагов N_t.

Общая численная схема имела следующий вид:

$$\hat{\rho}_h = \rho_h - \Delta t \sum_k \left(\mathbf{W}^{(\rho)}_{h,k}, \mathbf{n}_k\right), \tag{9}$$

$$\hat{\rho}_h \hat{\mathbf{u}}_h = \rho_h \mathbf{u}_h - \Delta t \sum_k \left(\mathbf{W}^{(I)}_{h,k}, \mathbf{n}_k\right), \tag{10}$$

$$\hat{E}_h = E_h - \Delta t \sum_k \left(\mathbf{W}^{(E)}_{h,k}, \mathbf{n}_k\right). \tag{11}$$

Здесь введены сеточные аналоги массовой плотности, плотности энергии и вектора скорости, векторов и тензора потоков, обозначаемые нижним индексом h, а также внешние нормали $\mathbf{n}_k$ к ребрам контрольных объемов, сформированных вокруг точек сетки Ω_h. Суммирование ведется по всем ребрам контрольных объемов, включая границу расчетной области $\partial\Omega$. Более подробное описание этой части численной методики приведено в работе [19].

Шаг по времени в общем случае Δt является переменным и определяется на каждом слое по критерию устойчивости:

$$\Delta t \le \beta h_{min}/\mathrm{Ma}, \tag{12}$$

где h_{min} — минимальный размер ребер треугольников, β — коэффициент из полуинтервала $(0, 1]$. Вместе с коэффициентом регуляризации α эти два параметра являются управляющими сходимостью предложенной численной схемы.

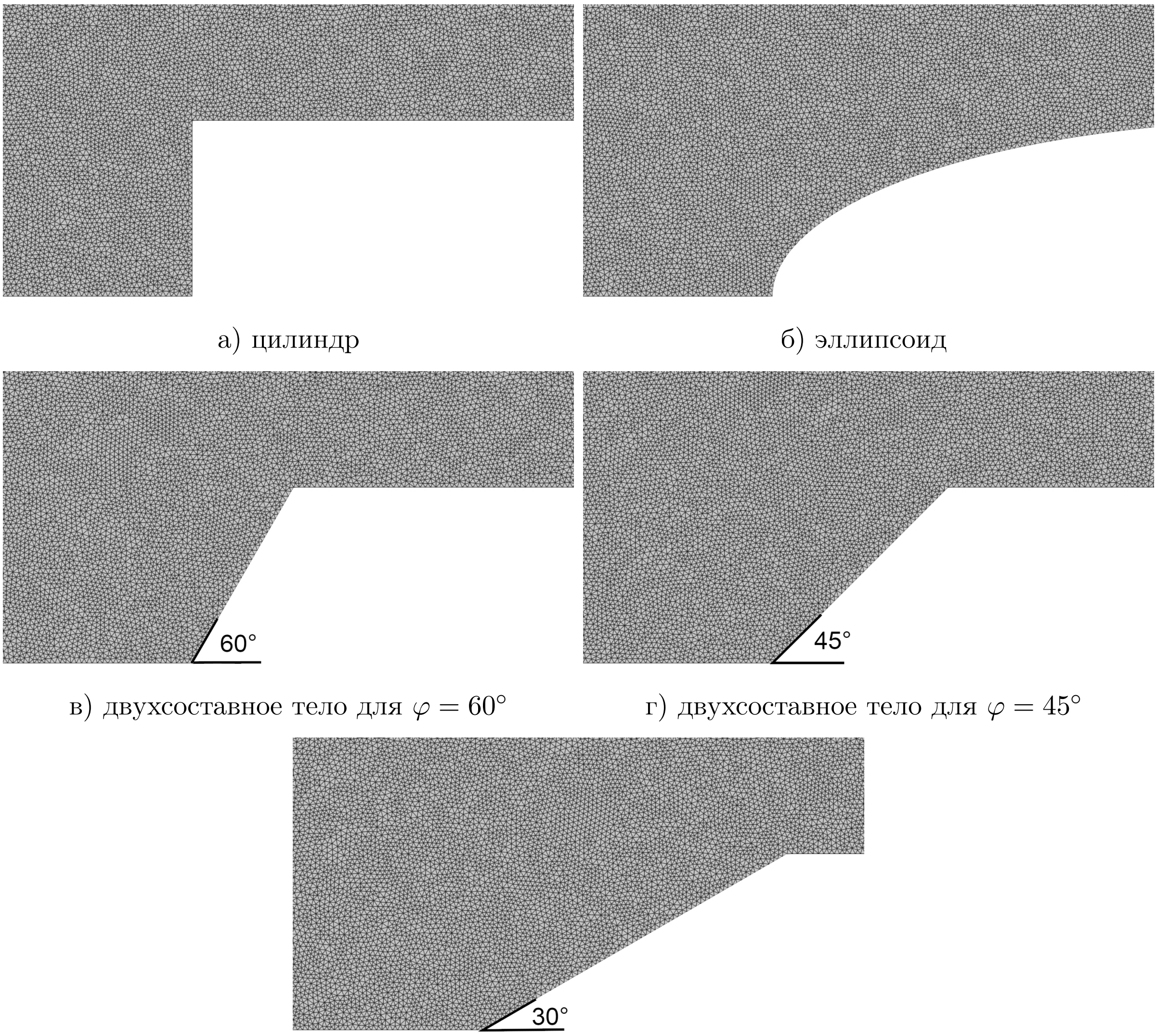
В табл. 1 и на рис. 2 представлены базовые расчетные конфигурации и фрагменты использованных треугольных сеток. Во всех конфигурациях $R_1 = 5$, $R_2 = 0.5$, $L_1 = 1.5$, $L_2 = 3$, $L_3 = 1.5$. В конфигурациях 3–5 величина L_4 определяется углом наклона φ образующей конуса относительно оси симметрии: $L_4 = R_2 \mathrm{ctg}(\varphi)$ и составляет соответственно 0.289, 0.5, 0.866. Треугольные сетки построены с помощью свободно распространяемого пакета Gmsh [23]. Длины ребер построенных треугольников во всех конфигурациях лежат в диапазоне $[0.01, 0.015]$.

Параллельная программная реализация итогового численного алгоритма основана на методе декомпозиции расчетной области [24] на компактные домены примерно одинаковой вычислительной емкости. Это достигается путем распределения ячеек сетки по вычислителям с помощью геометрического подхода и последующей коррекции в рамках использования алгоритма динамической балансировки загрузки [25].

Для расчета конфигураций на сетках умеренного объема (порядка 1 млн. ячеек) распараллеливание производилось с помощью стандарта OpenMP [26]. При использовании двух-

Таблица 1. Базовые расчетные конфигурации

№	Геометрия	Число узлов	Число ребер	Число ячеек
1	Круговой цилиндр	168 970	2 021 484	336 402
2	Эллипсоид	170 578	2 040 960	339 663
3	Составное тело, $\varphi = 60°$	169 332	2 025 884	337 140
4	Составное тело, $\varphi = 45°$	170 023	2 034 196	338 527
5	Составное тело, $\varphi = 30°$	170 537	2 040 384	339 560



а) цилиндр
б) эллипсоид
в) двухсоставное тело для $\varphi = 60°$
г) двухсоставное тело для $\varphi = 45°$
д) двухсоставное тело для $\varphi = 30°$

Рис. 2. Расчетные сетки для выбранных тел вращения

или четырехпроцессорной рабочей станции использовалось дополнительное разделение вычислений по оперативной памяти процессоров с использованием механизма NUMA [27]. В этой ситуации необходимые обмены данными между отдельными блоками вычислений производились через общий сегмент памяти. Фактически в этом случае используется двухуровневое разбиение сетки: сначала на процессорные блоки, а затем внутри каждого такого блока на домены, которые распределяются между всеми ядрами (трэдами) соответствующего процессора.

Для расчета больших сеточных конфигураций (более 10 млн. ячеек) предполагается использование гибридной схемы распараллеливания, использующей одновременно стандарты MPI [28] и OpenMP. В этом случае на каждом узле кластера необязательно пользоваться механизмом NUMA, поскольку его можно заменить помещением нескольких MPI-процессов на узел соответственно числу имеющихся там процессоров. Привязка MPI-процесса к конкретному процессору узла производится с помощью управления процессорной маской.

Расчеты умеренных сеточных конфигураций проводились на кластере IMM23, установленном в Суперкомпьютерном центре коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (ЦКП). На каждом узле кластера установлены 2 процессора AMD EPYC 9124, каждый из них имеет 16 двухпотоковых ядер и работает на частоте 3.0 ГГц. Расчеты больших сеточных конфигураций проводились на суперкомпьютере К60 ЦКП [29].

5. Результаты моделирования

Для проведения конкретных расчетов была выбрана лабораторная геометрия с характерными параметрами длины R_n, $Z_n = 0.01$ м. С их помощью несложно пересчитать размеры расчетных областей в конфигурациях 1–5 (см. табл. 1). В качестве покоящегося и набегающего потоков газа рассматривалась однокомпонентная сухая воздушная смесь с параметрами

$$\rho_0 = 1.184 \text{ кг/м}^3, \quad T_0 = 297 \text{ K}, \quad p_0 = 101\ 325 \text{ Па},$$
$$\mu_0 = 1.7894 \cdot 10^{-5} \text{ кг/(м} \cdot \text{с)}, \quad \chi_0 = 0.0242 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}.$$

Скорость звука в этой смеси $c_0 \approx 343$ м/с служила нормировкой скорости. Остальные параметры были следующие. Показатель адиабаты $\gamma = 1.42$, нормировочное число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho_0 c_0 R_n/\mu_0 \approx 226\ 954$, число Прандтля $\mathrm{Pr} = 0.67$, число Шмидта $\mathrm{Sc} = 0.77$, показатель температурной зависимости кинетических коэффициентов $\omega = 0.5$. Расчеты проводились для трех значений числа Маха: $\mathrm{Ma} = 1.0,\ 2.0,\ 3.0$.

Целью расчетов на основе выбранных конфигураций и параметров был анализ качества реализованной численной схемы и эффективности параллельного кода. Для верификации численного алгоритма расчеты проводились для нескольких значений управляющих параметров α и β. Для валидации разработанной программы использовался известный программный пакет ANSYS CFD, солвер Fluent [26] (Лицензия ИПМ им. М.В. Келдыша РАН — ANSYS CFD Enterprise, Permanent, № 511564).

Обсуждение результатов начнем с выбора параметров α и β. Как было показано в работе [11], параметр α выступает в качестве коэффициента искусственной вязкости и подбирается из диапазона $[0, 1.0]$, исходя из условий конкретной задачи. Основанием для его выбора является обеспечение устойчивого сквозного счета разработанного вычислительного алгоритма. При этом излишнее завышение параметра α приводит к существенному размыванию фронта ударных волн в сеточной модели. В рамках данного исследования параметр α принимался равным 0.5 независимо от скорости входного потока и минимального линейного размера сеточных элементов. При предварительном исследовании были опробованы несколько значений данного параметра. Оно показало, что уже при $\alpha = 0.25$ у входной границы на первых временных шагах появляются нефизичные осцилляции всех расчетных параметров потока (плотности, скорости и энергии). А при $\alpha = 0.1$ вычислительный алгоритм расходится независимо от шага по времени. Отметим также, что в целом значение параметра α, обеспечивающее устойчивость численного решения, сильно зависит от числа

Рейнольдса. При невысоких значениях ($Re \sim 1000$) устойчивого счета удается добиться даже при $\alpha = 0$.

Выбор параметра β фактически позволяет задать шаг по времени из условия устойчивости (12). Величина β в начале расчета выбирается из полуинтервала $(0, 1.0]$. Однако далее анализируется дополнительный эмпирический критерий ограничения шага по времени

$$\max_i \left| \frac{E_i^{k+1} - E_i^k}{E_i^k} \right| \le \varepsilon_E, \quad i \in I(\Omega_h), \tag{13}$$

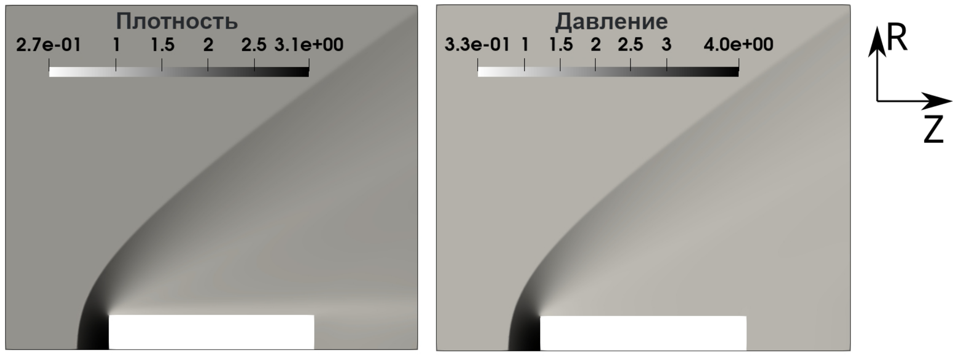
где максимум модуля относительного изменения полной энергии за один шаг по времени берется по множеству индексов $I(\Omega_h)$ всех узлов расчетной сетки. Из этого критерия при заданной допустимой величине ε_E можно найти ограничение на шаг Δt и, следовательно, для β. При этом ε_E является величиной порядка 0.01.

В данной работе выбрано значение $\varepsilon_E = 0.02$. В результате в проведенных расчетах конфигурации 2 при Ma $=$ 1 расчет начинался при $\beta = \beta_{max} = 0.1$. Далее этот параметр в автоматическом режиме доходил до $\beta_{min} = 0.01$ и при формировании стационарных параметров течения возвращался к β_{max}. Для расчета течений при других числах Маха величина β_{max} оставалась постоянной, а величина β_{min} составила 0.0022 и 0.0007 для Ma $=$ 2 и Ma $=$ 3 соответственно.

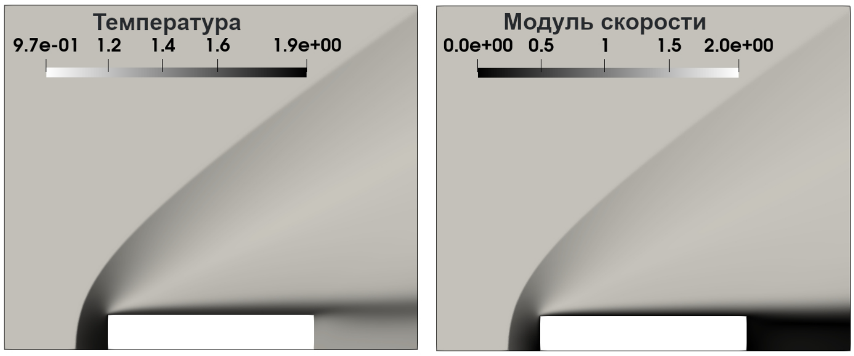
Итогом проведенного анализа является вывод о том, что параметр α позволяет эффективно сглаживать нефизичные осцилляции, а параметр β отвечает за устойчивость численного решения в сеточной норме C, в том числе позволяет обеспечить неотрицательность массовой плотности, плотности полной энергии и температуры. Отметим также, что при измельчении сетки параметры α и β можно не изменять. Для сильно вязких течений или тел малого масштаба он может быть равен 0. При больших числах Рейнольдса его приходится увеличивать.

При значениях $\alpha = 0.5$ и указанных выше параметрах ε_E и β для Ma $=$ 2 были получены стационарные распределения плотности, давления, температуры и модуля скорости, представленные соответственно рис. 3–7 для конфигураций 1–5. В целях сравнения расчет конфигурации 1 был повторен в пакете ANSYS CFD с помощью солвера Fluent. В качестве модели использовалась стационарная осесимметричная модель на основе совместного решения уравнений неразрывности и импульса. В качестве уравнения состояния применялся идеальный газ с параметрами, соответствующими использованным при расчетах КГД-методом. Вычислительный алгоритм основывался на явном методе установления с противопоточной аппроксимацией конвективных членов второго порядка. Треугольная расчетная сетка соответствовала представленной в табл. 1 для расчетной конфигурации 1. Анализ расчетов показал качественное совпадение результатов по всем характеристикам: плотности, давлению, температуре и модулю скорости. Отклонение от расчетных данных ANSYS составило порядка 5%.

Также на основании динамики распределения давления были построены зависимости коэффициента сопротивления формы $C_d = \frac{2F_z}{\rho_0 A |u|^2}$, где $F_z = -\int_{body} p d\mathbf{S}$ — сила сопротивления формы, $A = \pi R_2^2$ — площадь фронтального сечения. Полученные зависимости для каждого из объектов изображены на рис. 8. Анализ полученных результатов позволил сделать вывод об их корректности [31]. Так, максимальный коэффициент сопротивления формы характерен для торцевого обтекания цилиндра, далее в порядке убывания величины коэф-

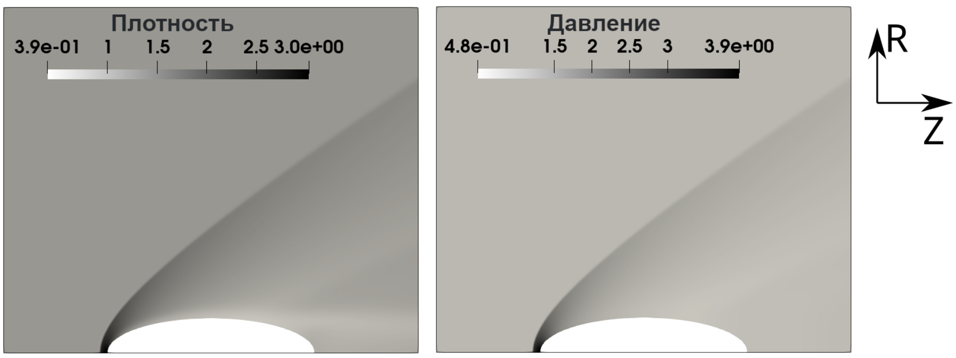


а) плотность б) давление

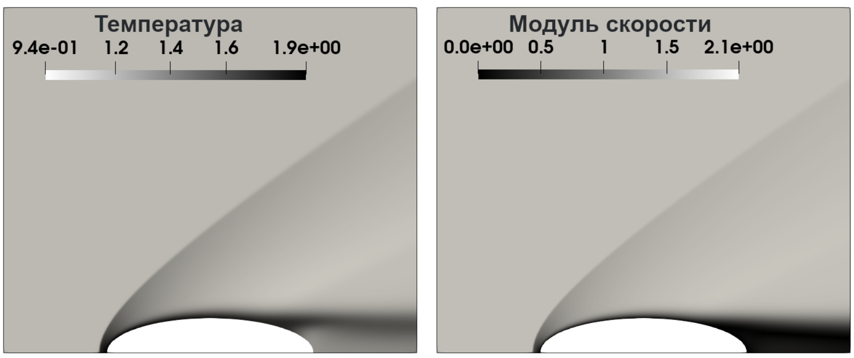


в) температура г) модуль скорости

Рис. 3. Стационарные распределения параметров течения для конфигурации 1

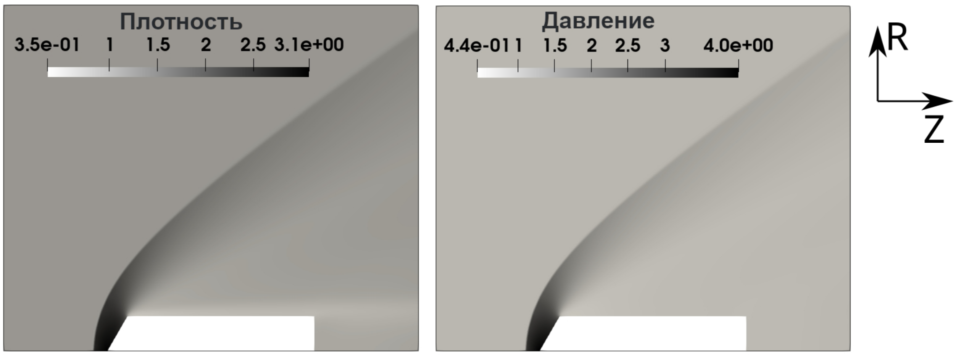


а) плотность б) давление

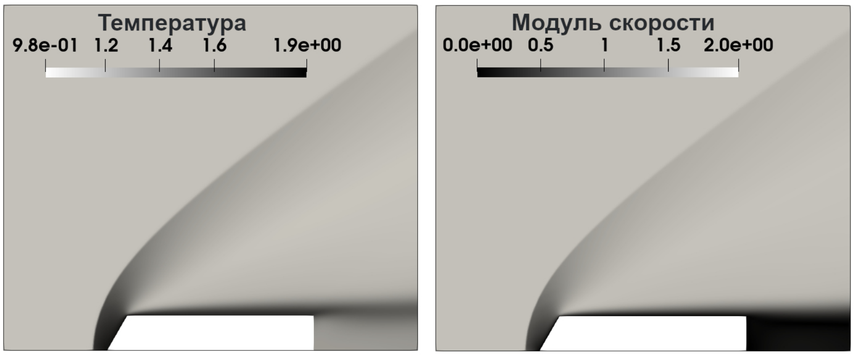


в) температура г) модуль скорости

Рис. 4. Стационарные распределения параметров течения для конфигурации 2

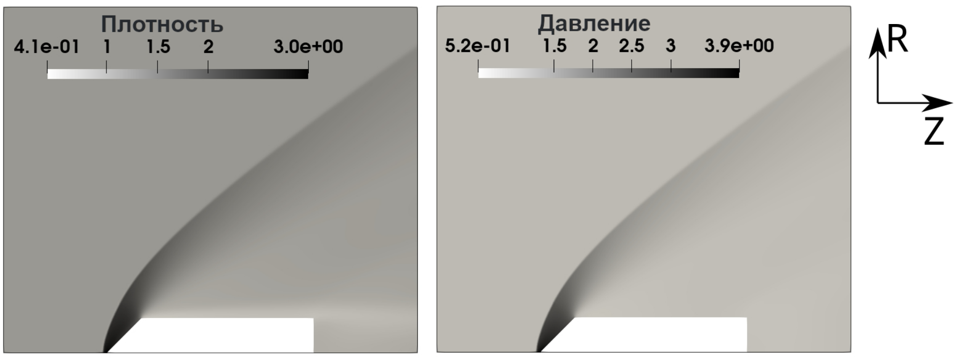


а) плотность б) давление

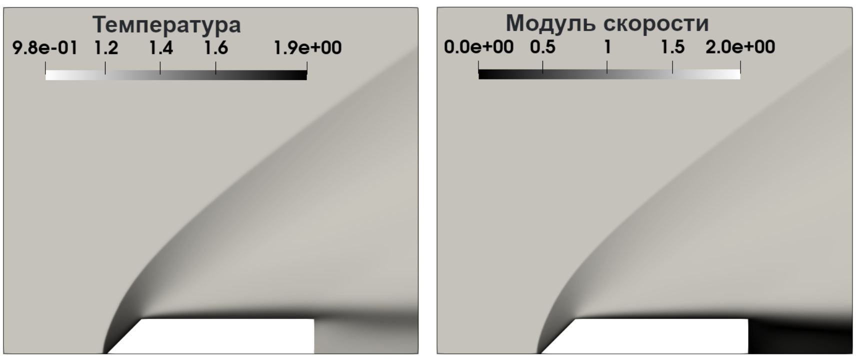


в) температура г) модуль скорости

Рис. 5. Стационарные распределения параметров течения для конфигурации 3

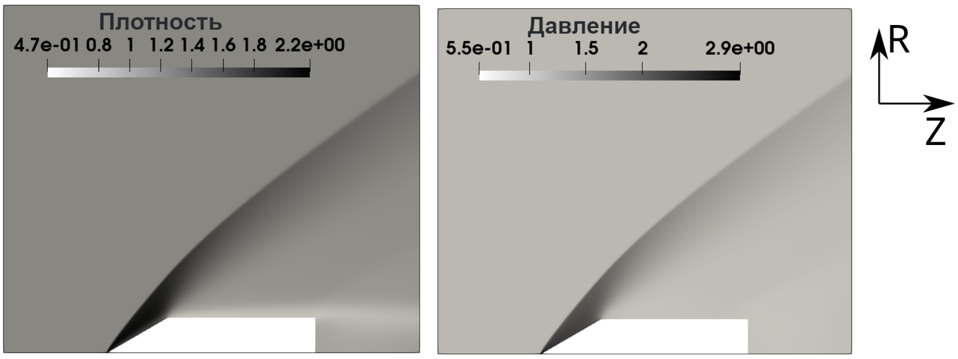


а) плотность б) давление



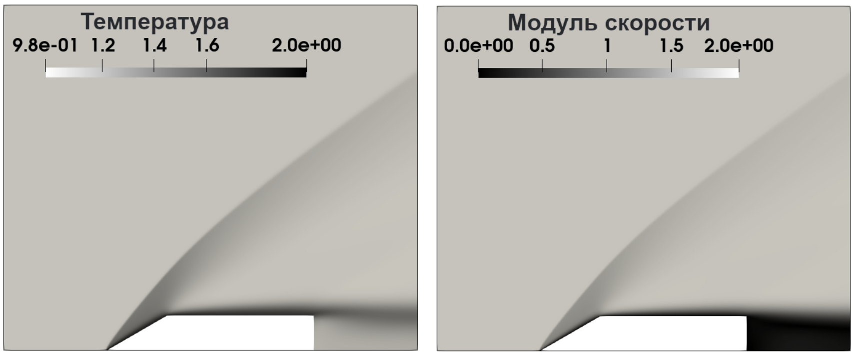
в) температура г) модуль скорости

Рис. 6. Стационарные распределения параметров течения для конфигурации 4



а) плотность

б) давление



в) температура

г) модуль скорости

Рис. 7. Стационарные распределения параметров течения для конфигурации 5

фициента следуют составные тела с конусами на торце от 60 до 30 градусов. Наименьший же коэффициент сопротивления характерен для эллипсоида.

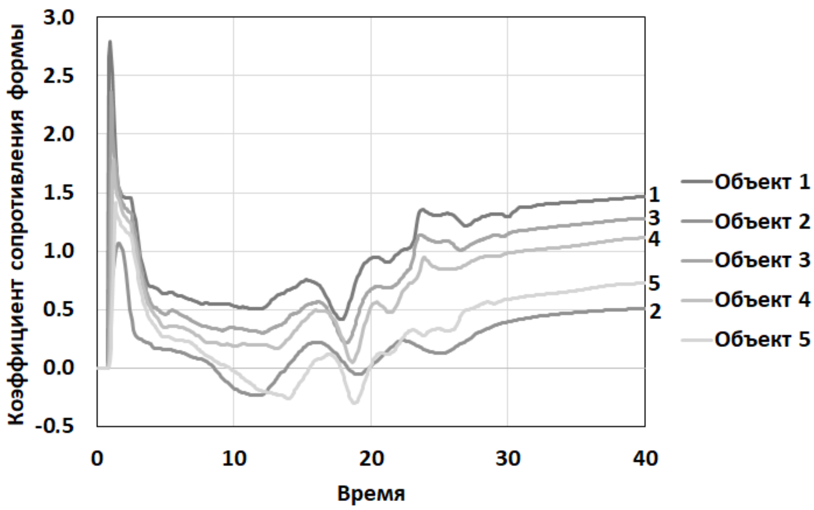


Рис. 8. Зависимость коэффициента сопротивления формы C_d от времени

Следующая серия расчетов проводилась для конфигурации 2 для Ma = 1 на последовательности измельченных сеток (см. табл. 2). Данные расчеты использовались как для верификации численного метода, так и для определения эффективности распараллеливания.

Таблица 2. Параметры измельченных сеток

ID	Геометрия	Число узлов	Число ребер	Число ячеек
M1	Эллипсоид	170 578	2 040 960	339 663
M2	Эллипсоид	680 818	8 157 876	1 358 652
M3	Эллипсоид	2 720 287	32 619 576	5 434 608
M4	Эллипсоид	10 875 181	130 454 448	21 738 432

При анализе точности использованного численного метода проведены расчеты на сетках M1–M3. Они подтвердили сходимость решения по сетке с порядком не ниже первого. В качестве иллюстрации сказанного на рис. 9 изображены зависимости коэффициента сопротивления формы от времени для исследуемого набора сеток при Ma = 1. Как видно из приведенных графиков, измельчение сетки приводит к небольшому уменьшению коэффициента сопротивления, что можно объяснить лучшей аппроксимацией границы эллипса, большей ее гладкости. При этом, при умеренных числах Рейнольдса и $\alpha = 0$ получается второй пространственный порядок точности. Полученные решения сравнивались с аналогичными, рассчитанными в пакете Ansys Fluent. Сравнение показало близость значений коэффициентов сопротивления формы.

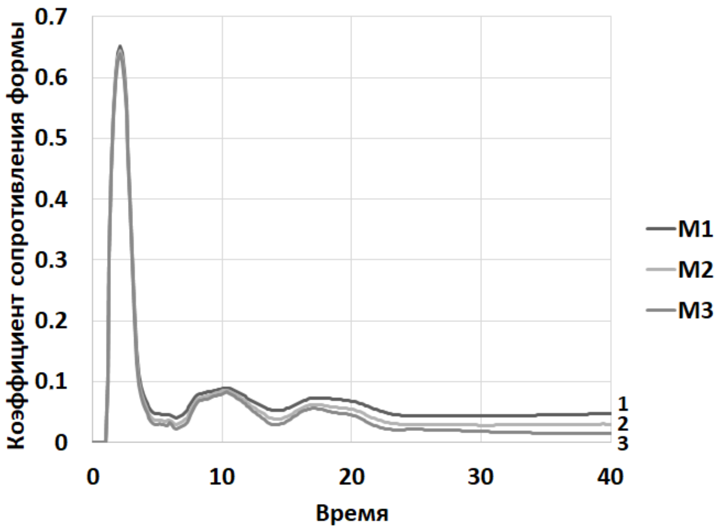


Рис. 9. Зависимость коэффициента сопротивления формы C_d от времени для сеток M1–M3

Результаты вычисления ускорения и эффективности распараллеливания на сетках умеренного размера (M1, M2, M3) представлены на рис. 10 и рис. 11. Они показывают, что при малом количестве процессов преобладают линейный рост ускорения и слабое падение эффективности, что соответствует теоретическим оценкам этих величин для явных схем по времени. Дальнейший загиб ускорения и более интенсивное падение эффективности связаны с архитектурными особенностями использованного оборудования, в том числе с включенным режимом гипертрейдинга. Менее эффективное поведение программы на сетке с большим числом узлов M3 связано с превышением обрабатываемых данных размера кэша процессора. В целом можно отметить, что полученное максимальное ускорение для сеток

М1, М2 позволило существенно сократить времена расчета. Таким образом, реализованная технология на основе стандарта OpenMP полностью себя оправдала.

Данные о расчетах 100 временных шагов на большой сетке М4 представлены в табл. 3. Они приведены для сравнения для кластеров IMM23 и K60 (секция с CPU). В таблице приведены времена расчета для суммарного количества параллельных процессов от 16 до 512. Для результатов, полученных на K60, дополнительно рассчитаны ускорение и эффективность. Анализ таблицы показывает достаточно высокую эффективность распараллеливания при использовании гибридной технологии MPI+OpenMP.

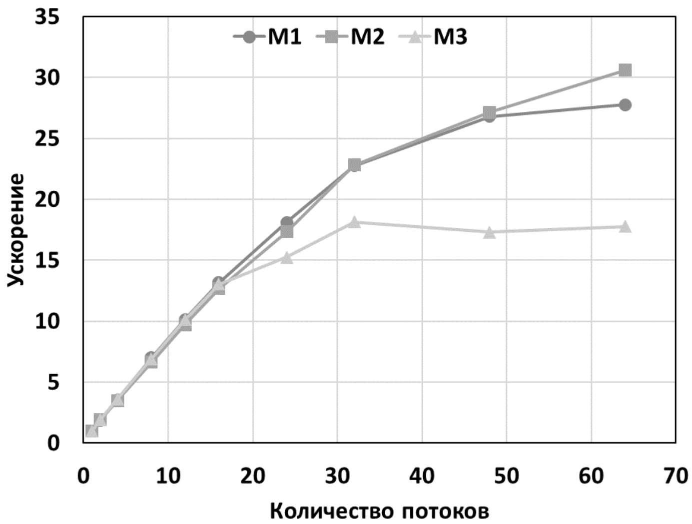


Рис. 10. Зависимости ускорения распараллеливания от количества параллельных процессов для сеток М1, М2, М3

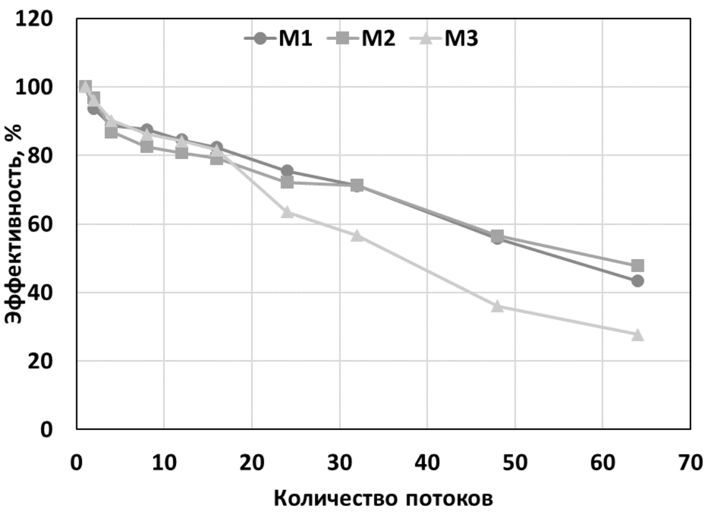


Рис. 11. Зависимости эффективности распараллеливания от количества параллельных процессов для сеток М1, М2, М3

Таблица 3. Параметры распараллеливания на сетке M4

Параметр \ Кол-во процессов	16	32	64	128	256	512
Время расчета (IMM23), с	1 149	789	—	—	—	—
Время расчета (K60_CPU), с	1 033	562	304	172	98	65
Ускорение	1.00	1.84	3.40	6.00	10.54	15.89
Эффективность, %	100.00	91.90	84.95	75.00	65.88	49.66

Заключение

Рассмотрена проблема обтекания тел вращения различной формы сверхзвуковым потоком вязкого теплопроводного газа. Актуальность таких расчетов связана с повышенным вниманием к проектированию спускаемых космических аппаратов нового поколения. Основная цель работы состояла в анализе качества численных алгоритмов на неструктурированных сетках и их параллельной реализации. Особенностью использованного подхода было применение в качестве модели течения газа квазигазодинамической системы уравнений. Использование данной системы определяется ее повышенной численной устойчивостью к схемным возмущениям по сравнению с численными подходами на основе уравнений Навье—Стокса. Главными направлениями работы стали анализ качества результатов моделирования при варьировании параметров численного метода и изучение особенностей параллельной программной реализации. Итогом проведенного исследования стали оптимальные значения параметров регуляризации КГД-подхода, а также зависимости ускорения и эффективности от методики распараллеливания. В качестве примера были проведены расчеты сверхзвуковых осесимметричных течений сухого воздуха вокруг цилиндра, эллипсоида и составного тела. В проведенных численных исследованиях были установлены критерии выбора параметров явной по времени конечно-объемной схемы с целью повышения ее устойчивости и точности. Полученные результаты подтвердили корректность разработанной вычислительной технологии и эффективность разработанного параллельного кода. В перспективе на основе разработанного численного подхода предполагается перейти к решению задач технической аэродинамики, предполагающей учет реального уравнения состояния газа и свойств поверхности обтекаемого им тела.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. Расчеты проведены с помощью кластера IMM23 и суперкомпьютера K60, установленных в Суперкомпьютерном ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

Литература

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. Москва: Наука, 1969. 824 с.

2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. Москва: Наука, 1976. 400 с.

3. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. Москва: Наука, 1992. 424 с.

4. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэродинамике и тепломассообмене. Киев: Наукова думка, 2003. 379 с.

5. Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. Москва: Торус пресс, 2010. 430 с.

6. Pert G.J. Introductory Fluid Mechanics for Physicists and Mathematicians. New York: Wiley, 2013. 490 p.

7. Georgantopoulou C.G., Georgantopoulos G.A. Fluid Mechanics in Channel, Pipe and Aerodynamic Design Geometries. Vol. 1 and Vol. 2. New York: Wiley–ISTE, 2018. 416 p. and 304 p. DOI: 10.1002/9781119457015.

8. Rathakrishnan E. Applied Gas Dynamics. New York: Wiley, 2019. 656 p.

9. Chetverushkin B.N. Kinetic Schemes and Quasi Gas Dynamic System of Equations. Barcelona: CIMNE, 2008. 298 p.

10. Zlotnik A.A., Chetverushkin B.N. Parabolicity of the Quasi-Gasdynamic System of Equations, Its Hyperbolic Second-Order Modification, and the Stability of Small Perturbations for Them // Comput. Math. Math. Phys. 2008. Vol. 48, no. 3. P. 420–446. DOI: 10.1134/S0965542508030081.

11. Elizarova T.G. Quasi-Gas Dynamic Equations. Berlin, Heidelberg, New York: Springer–Verlag, 2009. 286 p. DOI: 10.1007/978-3-642-00292-2.

12. Zlotnik A., Gavrilin V. On Quasi-Gasdynamic System of Equations with General Equations of State and Its Application // Mathematical Modelling and Analysis. 2011. Vol. 16, no. 4. P. 509–526. DOI: 10.3846/13926292.2011.627382.

13. Elizarova T.G., Shirokov I.A. Numerical Simulation of the Non-Stationary Flow in a Vicinity of the Hypersonic Vehicle // Math. Models Comput. Simul. 2012. Vol. 4, no. 4. P. 410–418. DOI: 10.1134/S2070048212040035.

14. Chetverushkin B.N. Kinetic Models for Solving Continuum Mechanics Problems on Supercomputers // Math. Models Comput. Simul. 2015. Vol. 7, no. 6. P. 531–539. DOI: 10.1134/S2070048215060034.

15. Elizarova T.G., Zlotnik A.A., Shilnikov E.V. Regularized Equations for Numerical Simulation of Flows of Homogeneous Binary Mixtures of Viscous Compressible Gases // Comput. Math. Math. Phys. 2019. Vol. 59, no. 11. P. 1832–1847. DOI: 10.1134/S0965542519110058.

16. Shirokov I.A., Elizarova T.G. Computational Experiment in the Problem of Supersonic Flow around a Blunt Body with Tail Expansion // Math. Models Comput. Simul. 2020. Vol. 12, no. 3. P. 433–444. DOI: 10.1134/S2070048220030163.

17. Elizarova T.G., Shilnikov E.V. Numerical Simulation of Gas Mixtures Based on the Quasi-Gasdynamic Approach as Applied to the Interaction of a Shock Wave with a Gas Bubble // Comput. Math. Math. Phys. 2021. Vol. 61, no. 1. P. 118–128. DOI: 10.1134/S0965542521010048.

18. Zlotnik A.A. Conditions for Dissipativity of an Explicit Finite-Difference Scheme for a Linearized Multidimensional Quasi-Gasdynamic System of Equations // Dokl. Math. 2022. Vol. 106, no. 1. P. 236–242. DOI: 10.1134/S1064562422040196.

19. Kudryashova T.A., Polyakov S.V., Sverdlin A.A. Calculation of Gas Flow Parameters around Reentry Vehicle // Math. Models and Comput. Simul. 2009. Vol. 1, no. 4. P. 445–452. DOI: 10.1134/S2070048209040036.

20. Polyakov S.V., Kudryashova T.A., Sverdlin A.A., *et al.* Parallel Software Package for Simulation of Continuum Mechanics Problems on Modern Multiprocessor Systems // Math. Models and Comput. Simul. 2011. Vol. 3, no. 1. P. 46–57. DOI: 10.1134/S2070048211010091.

21. Eymard R., Gallouet T.R., Herbin R. The Finite Volume Method // Handbook of Numerical Analysis (Vol. 7). Amsterdam: North Holland Publishing Company. 2000. P. 713–1020. DOI: 10.1016/S1570-8659(00)07005-8.

22. LeVeque R.J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. 558 p. DOI: 10.1017/CBO9780511791253.

23. Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: A 3-D Finite Element Mesh Generator with Built-in Pre- and Post-processing Facilities // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. Vol. 79, no. 11. P. 1309–1331. DOI: 10.1002/nme.2579.

24. Smith B.F. Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations // Parallel Numerical Algorithms. ICASE/LaRC Interdisciplinary Series in Science and Eng. / ed. by D.E. Keyes, A. Sameh, V. Venkatakrishnan. Springer, 1997. Vol. 4. P. 225–243. DOI: 10.1007/978-94-011-5412-3_8.

25. Alakeel A.A. Guide to Dynamic Load Balancing in Distributed Computer Systems // International Journal of Computer Science and Network Security. 2009. Vol. 10, no. 6. P. 153–160.

26. Specifications – OpenMP. URL: `https://www.openmp.org/specifications` (дата обращения: 24.01.2025).

27. Patterson D.A., Hennessy J.L. Computer Organization and Design, Second Edition: The Hardware/Software Interface. Morgan Kaufmann, 1997. 965 p.

28. OpenMPI. URL: `https://www.open-mpi.org/` (дата обращения: 24.01.2025).

29. Суперкомпьютерный центр коллективного пользования ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. URL: `https://ckp.kiam.ru/` (дата обращения: 24.01.2025).

30. ANSYS CFD. URL: `https://www.ansys.com/products/fluids` (дата обращения: 24.01.2025).

31. Lindsey W.F. Drag of Cylinders of Simple Shapes: NASA Technical Reports // NASA. 1938. No. 619. P. 169–176. URL: `https://ntrs.nasa.gov/citations/19930091694`.

Поляков Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., в.н.с., Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация)

Подрыга Виктория Олеговна, д.ф.-м.н., в.н.с., Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация)

Тарасов Никита Игоревич, к.ф.-м.н., н.с., Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация)

DOI: 10.14529/cmse250204

SUPERCOMPUTER MODELING OF SUPERSONIC FLOW AROUND ROTATION BODIES OF DIFFERENT SHAPES

© 2025 S.V. Polyakov, V.O. Podryga, N.I. Tarasov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS (Miusskaya sq. 4, Moscow, 125047 Russia)

E-mail: polyakov@imamod.ru, pvictoria@list.ru, nikita_tarasov@imamod.ru

Received: 18.04.2025

The numerical approach and its parallel software implementation for studying the processes of flow around solids of complex geometry by supersonic gas flows are discussed. The aim of the study is to analyze the effectiveness of numerical schemes on unstructured hybrid grids approximating quasi-gasdynamic (QGD) equations. As an example, the problem of flowing around bodies of rotation of various shapes is chosen. The gaseous medium is represented by dry air. The system of QGD equations is considered in a one-component formulation. It is supplemented by equations of state of an ideal gas and the dependencies of kinetic coefficients on temperature and pressure. Axisymmetric gas flows around a cylinder, an ellipsoid, and a composite body are considered in numerical experiments. Calculations are performed for three values of the input flow velocity. The obtained results confirm the correctness of the developed computing technology.

Keywords: gas flows near solids, rotation bodies of different shapes, quasi-gasdynamic equations, numerical methods, parallel algorithms, supercomputer modeling.

FOR CITATION

Polyakov S.V., Podryga V.O., Tarasov N.I. Supercomputer Modeling of Supersonic Flow around Rotation Bodies of Different Shapes. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2025. Vol. 14, no. 2. P. 67–85. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse250204.

References

1. Abramovich G.N. Applied Gas Dynamics. Moscow: Nauka, 1969. 824 p. (in Russian)
2. Godunov S.K., Zabrodin A.V., Ivanov M.Ya., *et al.* Numerical Solution of Multidimensional Problems of Gas Dynamics. Moscow: Nauka, 1976. 400 p. (in Russian)
3. Samarskii A.A., Popov Yu.P. Difference Methods for Solving Gas Dynamics Problems. Moscow: Nauka, 1992. 424 p. (in Russian)
4. Prikhodko A.A. Computer Technologies in Aerodynamics and Heat and Mass Transfer. Kiev: Naukova Dumka, 2003. 379 p. (in Russian)
5. Krayko A.N. Theoretical Gas Dynamics: Classics and Modernity. Moscow: Torus Press, 2010. 430 p. (in Russian)
6. Pert G.J. Introductory Fluid Mechanics for Physicists and Mathematicians. New York: Wiley, 2013. 490 p.
7. Georgantopoulou C.G., Georgantopoulos G.A. Fluid Mechanics in Channel, Pipe and Aerodynamic Design Geometries. Vol. 1 and Vol. 2. New York: Wiley–ISTE, 2018. 416 p. and 304 p. DOI: 10.1002/9781119457015.

8. Rathakrishnan E. Applied Gas Dynamics. New York: Wiley, 2019. 656 p.

9. Chetverushkin B.N. Kinetic Schemes and Quasi Gas Dynamic System of Equations. Barcelona: CIMNE, 2008. 298 p.

10. Zlotnik A.A., Chetverushkin B.N. Parabolicity of the Quasi-Gasdynamic System of Equations, Its Hyperbolic Second-Order Modification, and the Stability of Small Perturbations for Them. Comput. Math. Math. Phys. 2008. Vol. 48, no. 3. P. 420–446. DOI: 10.1134/S0965542508030081.

11. Elizarova T.G. Quasi-Gas Dynamic Equations. Berlin, Heidelberg, New York: Springer–Verlag, 2009. 286 p. DOI: 10.1007/978-3-642-00292-2.

12. Zlotnik A., Gavrilin V. On Quasi-Gasdynamic System of Equations with General Equations of State and Its Application. Mathematical Modelling and Analysis. 2011. Vol. 16, no. 4. P. 509–526. DOI: 10.3846/13926292.2011.627382.

13. Elizarova T.G., Shirokov I.A. Numerical Simulation of the Non-Stationary Flow in a Vicinity of the Hypersonic Vehicle. Math. Models Comput. Simul. 2012. Vol. 4, no. 4. P. 410–418. DOI: 10.1134/S2070048212040035.

14. Chetverushkin B.N. Kinetic Models for Solving Continuum Mechanics Problems on Supercomputers. Math. Models Comput. Simul. 2015. Vol. 7, no. 6. P. 531–539. DOI: 10.1134/S2070048215060034.

15. Elizarova T.G., Zlotnik A.A., Shilnikov E.V. Regularized Equations for Numerical Simulation of Flows of Homogeneous Binary Mixtures of Viscous Compressible Gases. Comput. Math. Math. Phys. 2019. Vol. 59, no. 11. P. 1832–1847. DOI: 10.1134/S0965542519110058.

16. Shirokov I.A., Elizarova T.G. Computational Experiment in the Problem of Supersonic Flow around a Blunt Body with Tail Expansion. Math. Models Comput. Simul. 2020. Vol. 12, no. 3. P. 433–444. DOI: 10.1134/S2070048220030163.

17. Elizarova T.G., Shilnikov E.V. Numerical Simulation of Gas Mixtures Based on the Quasi-Gasdynamic Approach as Applied to the Interaction of a Shock Wave with a Gas Bubble. Comput. Math. Math. Phys. 2021. Vol. 61, no. 1. P. 118–128. DOI: 10.1134/S0965542521010048.

18. Zlotnik A.A. Conditions for Dissipativity of an Explicit Finite-Difference Scheme for a Linearized Multidimensional Quasi-Gasdynamic System of Equations. Dokl. Math. 2022. Vol. 106, no. 1. P. 236–242. DOI: 10.1134/S1064562422040196.

19. Kudryashova T.A., Polyakov S.V., Sverdlin A.A. Calculation of Gas Flow Parameters around Reentry Vehicle. Math. Models and Comput. Simul. 2009. Vol. 1, no. 4. P. 445–452. DOI: 10.1134/S2070048209040036.

20. Polyakov S.V., Kudryashova T.A., Sverdlin A.A., *et al.* Parallel Software Package for Simulation of Continuum Mechanics Problems on Modern Multiprocessor Systems. Math. Models and Comput. Simul. 2011. Vol. 3, no. 1. P. 46–57. DOI: 10.1134/S2070048211010091.

21. Eymard R., Gallouet T.R., Herbin R. The Finite Volume Method. Handbook of Numerical Analysis (Vol. 7). Amsterdam: North Holland Publishing Company. 2000. P. 713–1020. DOI: 10.1016/S1570-8659(00)07005-8.

22. LeVeque R.J. Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2002. 558 p. DOI: 10.1017/CBO9780511791253.

23. Geuzaine C., Remacle J.-F. Gmsh: A 3-D Finite Element Mesh Generator with Built-in Pre- and Post-processing Facilities. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 2009. Vol. 79, no. 11. P. 1309–1331. DOI: 10.1002/nme.2579.

24. Smith B.F. Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations. Parallel Numerical Algorithms. ICASE/LaRC Interdisciplinary Series in Science and Eng. / ed. by D.E. Keyes, A. Sameh, V. Venkatakrishnan. Springer, 1997. Vol. 4. P. 225–243. DOI: 10.1007/978-94-011-5412-3_8.

25. Alakeel A.A. Guide to Dynamic Load Balancing in Distributed Computer Systems. International Journal of Computer Science and Network Security. 2009. Vol. 10, no. 6. P. 153–160.

26. Specifications – OpenMP. URL: https://www.openmp.org/specifications (accessed: 24.01.2025).

27. Patterson D.A., Hennessy J.L. Computer Organization and Design, Second Edition: The Hardware/Software Interface. Morgan Kaufmann, 1997. 965 p.

28. OpenMPI. URL: https://www.open-mpi.org/ (accessed: 24.01.2025).

29. Supercomputer Centre of Collective Usage of KIAM RAS. URL: https://ckp.kiam.ru/ (accessed: 24.01.2025).

30. ANSYS CFD. URL: https://www.ansys.com/products/fluids (accessed: 24.01.2025).

31. Lindsey W.F. Drag of Cylinders of Simple Shapes: NASA Technical Reports. NASA. 1938. No. 619. P. 169–176. URL: https://ntrs.nasa.gov/citations/19930091694.