

# ПРИЧИННО-СЛЕДСТВЕННАЯ СЕМАНТИКА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО-ВРЕМЕННЫХ СЕТЕЙ ПЕТРИ СО СЛАБОЙ ВРЕМЕННОЙ СТРАТЕГИЕЙ

© 2026 А.Ю. Зубарев

*Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН*

*(630090 Новосибирск, пр. Академика Лаврентьева, д. 6)*

*E-mail: auzubarev@gmail.com*

Поступила в редакцию: 14.12.2025

Непрерывно-временные сети Петри (НВСП) являются расширением классических сетей Петри, предназначенным для моделирования и анализа параллельных и распределенных систем с учетом временных характеристик. В НВСП переходы, моделирующие события системы, имеют локальные часы и временные интервалы срабатывания. Для данной модели рассматриваются две стратегии хода времени: сильная, при которой ход времени блокируется необходимостью срабатывания перехода, и слабая, не ограничивающая ход модельного времени. Эти стратегии несравнимы по выразительности, причем многие стандартные задачи анализа разрешимы лишь для слабой стратегии. В общем случае пространство состояний НВСП бесконечно и несчетно, что усложняет анализ поведения модели. Для редукции пространства рассматриваемых состояний применяется причинно-следственная семантика, описывающая поведение системы через отношение частичного порядка на множестве событий. Данный подход позволяет абстрагироваться от избыточного множества всех возможных чередований событий (интерливинга), а также сохраняет информацию о причинно-следственных связях и параллелизме между событиями системы. В статье определяется и исследуется модель временных процессов, представляющая причинно-следственную семантику для НВСП в контексте слабой временной стратегии. Основным результатом работы является установление взаимодозначного соответствия между пробегам НВСП (представляющими классическую интерливинговую семантику) и линейаризациями временных процессов, что доказывает корректность предложенной причинно-следственной семантики. Представленные в работе вычислительные эксперименты подтверждают значительную редукцию пространства анализируемых состояний НВСП при использовании временных процессов.

*Ключевые слова: непрерывно-временная сеть Петри, слабая стратегия хода времени, временной процесс, причинно-следственная семантика.*

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Зубарев А.Ю. Причинно-следственная семантика для непрерывно-временных сетей Петри со слабой временной стратегией // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2026. Т. 15, № 1. С. 57–79. DOI: 10.14529/cmse260103.

## Введение

*Сеть Петри* — это формализм для моделирования и анализа параллельных и распределенных систем, которые являются критически важными с точки зрения безопасности. Эта модель представлена в виде ориентированного двудольного графа с вершинами из двух множеств: *мест* (условия системы) и *переходов* (события системы). Данная структура наглядно описывает причинную зависимость, параллелизм и конфликт между компонентами системы. Для учета количественных характеристик системы были предложены различные временные расширения сетей Петри. Среди наиболее известных — *непрерывно-временные сети Петри* (НВСП). В то время как в некоторых подходах время описывается дискретно с помощью специальных событий-тактов [1], в НВСП каждому переходу сопоставлен *временной интервал* и вещественнозначные *локальные часы*.

Состояние НВСП определяется *разметкой* — множеством мест с *фишками* — и значениями локальных часов для *допустимых переходов* (имеющих фишки во всех входных местах). Переход *может сработать*, если он допустимый и значение его локальных часов лежит в пределах его временного интервала. Изменения состояния происходят двумя способами: посредством *срабатывания перехода* или в результате *хода времени*. Когда переход срабатывает, разметка обновляется: фишки удаляются из его входных мест и добавляются в его выходные места. Затем локальные часы вновь допустимых переходов сбрасываются в ноль. При ходе времени показания локальных часов всех допустимых переходов равномерно увеличиваются. Таким образом, пространство состояний в общем случае бесконечно и несчетно, что усложняет анализ данной модели.

Для НВСП в литературе рассматриваются две стратегии хода времени: *сильная* и *слабая*. При сильной стратегии допустимый переход должен сработать не позднее, чем его локальные часы достигнут верхней границы его временного интервала. Напротив, при слабой стратегии время не ограничено, и переход не обязан срабатывать. Эти две стратегии несравнимы относительно слабой временной бисимуляции [2]. Для целей оценки производительности систем предлагаются гибридные варианты, такие как «слабо-сильная» стратегия [3]. Многие стандартные задачи разрешимы только при слабой стратегии [4, 5]. Кроме того, недавние исследования показывают, что разрешимость сохраняется даже при расширении модели дополнительными типами дуг, в то время как наличие даже одного перехода с сильной стратегией приводит к неразрешимости [6]. В то время как сильная стратегия является классической и хорошо изучена (см., например, [7, 8]), слабая появилась относительно недавно. В данной работе исследуется слабая стратегия.

Последовательности изменений состояний, вызванные срабатываниями переходов и ходом времени, известные как *пробеги*, определяют *интерливинговую семантику* НВСП. Хотя пробеги могут быть использованы для анализа некоторых свойств системы, они теряют всю информацию о параллелизме переходов. В синхронных моделях эта проблема решается за счет тактовой структуры [9], однако для асинхронных систем предпочтительным подходом является использование причинно-следственных семантик, основанных на отношении частичного порядка. Эти семантики предлагают значительное сокращение пространства рассматриваемых состояний, поскольку позволяют избежать необходимости рассмотрения всех возможных интерливинговых последовательностей. Однако наличие циклов в сетях Петри препятствует прямому определению частичного порядка. Поэтому используется ациклическая *причинно-следственная сеть* и функция (*гомоморфизм*), отображающая элементы этой сети (условия и события) в соответствующие элементы сети Петри (места и переходы). *Причинно-следственный процесс* сети Петри определяется как пара, состоящая из причинно-следственной сети и гомоморфизма. Аналогично, для временных расширений сетей Петри определяются *временные причинно-следственные сети* и соответствующие *временные процессы*. Модель временных процессов для НВСП с сильной стратегией, где временные конструкции сопоставляются с событиями причинно-следственной сети, была введена в [10]. В данной статье обобщается подход из [10] на слабую стратегию.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 рассматриваются синтаксис и интерливинговая семантика классических сетей Петри и их расширения до НВСП со слабой стратегией хода времени. В разделе 2 вводится модель временного процесса и его линеаризаций (интерливинговые выполнения). В разделе 3 устанавливается биективное соответствие между данными линеаризациями и пробегами. В разделе 4 приводятся вычислительные экс-

перименты по количественной оценке редукции пространства состояний НВСП при переходе от анализа пробегов к анализу временных процессов. Статья завершается заключением с результатами и направлениями для будущей работы.

## 1. Непрерывно-временная сеть Петри

В данном разделе вводится модель сети Петри с временными интервалами, представляющими задержки срабатываний переходов. Сначала следует напомнить синтаксис сетей Петри.

### Определение 1. (Сеть Петри)

- (Помеченная на множестве действий *Act*) сеть Петри — это набор  $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$ , где  $P$  — конечное множество мест, а  $T$  — конечное множество переходов такое, что  $P \cap T = \emptyset$  и  $P \cup T \neq \emptyset$ ,  $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  — отношение инцидентности,  $\emptyset \neq M_0 \subseteq P$  — начальная разметка,  $L : T \rightarrow Act$  — помечающая функция. Для элемента  $x \in P \cup T$  вводится множество  $\bullet x = \{y \mid (y, x) \in F\}$  входных и множество  $x^\bullet = \{y \mid (x, y) \in F\}$  выходных элементов. Для  $X \subseteq P \cup T$  принимается, что  $\bullet X = \bigcup_{x \in X} \bullet x$  и  $X^\bullet = \bigcup_{x \in X} x^\bullet$ .
- Разметка  $M$  сети  $\mathcal{N}$  — это любое подмножество множества  $P$ . Переход  $t \in T$  допустимый в разметке  $M$ , если  $\bullet t \subseteq M$ . Пусть  $En(M)$  обозначает множество всех переходов, допустимых в  $M$ . Срабатывание перехода  $t$ , допустимого в разметке  $M$ , приводит к новой разметке  $M' = (M \setminus \bullet t) \cup t^\bullet$  (обозначается  $M \xrightarrow{t} M'$ ).
- Разметка  $M$  является достижимой разметкой сети  $\mathcal{N}$ , если существует последовательность переходов  $t_1 \dots t_n$  (для  $n \geq 0$ ) такая, что  $M_0 \xrightarrow{t_1} M_1 \dots M_{n-1} \xrightarrow{t_n} M_n = M$ . Сеть Петри  $\mathcal{N}$  называется бесконтактной, если для каждой достижимой разметки  $M$  и каждого перехода  $t \in En(M)$  выполняется  $(M \setminus \bullet t) \cap t^\bullet = \emptyset$ .

Непрерывно-временная сеть Петри (НВСП) состоит из базовой сети Петри и статической временной функции, которая назначает временной интервал каждому переходу. Предполагается, что каждый переход имеет свои локальные часы, которые начинают отсчет времени с момента, когда переход стал допустимым.

Пусть  $Interv = \{[a, b], [a, b) \mid a \in \mathbb{Q}, b \in (\mathbb{Q} \cup \{\infty\}), a \leq b\}$  — множество интервалов с границами из множества рациональных чисел.

### Определение 2. (Непрерывно-временная сеть Петри)

- (Помеченная на *Act*) непрерывно-временная сеть Петри со слабой стратегией хода времени (НВСП<sub>сл</sub>) — это пара  $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$ , где  $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$  — базовая (помеченная на *Act*) сеть Петри и  $D : T \rightarrow Interv$  — статическая временная функция.
- Состояние  $\mathcal{TN}$  — это тройка  $(M, I, GT)$ , где  $M$  — разметка,  $I : En(M) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  — динамическая временная функция, а  $GT \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  — глобальный момент времени. Начальное состояние  $\mathcal{TN}$  — это  $S_0 = (M_0, I_0, GT_0)$ , где  $M_0$  — начальная разметка,  $I_0(t) = 0$  для всех  $t \in En(M_0)$  и  $GT_0 = 0$ .

Переход  $t$ , допустимый в разметке  $M$ , может сработать из состояния  $S = (M, I, GT)$  после хода времени  $\theta \in \mathbb{R}$ , если  $(I(t) + \theta) \in D(t)$ . Срабатывание перехода  $t$  из состояния  $S = (M, I, GT)$  после задержки времени  $\theta$  приводит к новому состоянию  $S' = (M', I', GT')$  (обозначается  $S \xrightarrow{(\theta, t)} S'$  или  $S \xrightarrow{(\theta, L(t))} S'$ ), где:

- $M' = (M \setminus \bullet t) \cup t^\bullet$ ,

- $\forall t' \in En(M') : I'(t') = \begin{cases} I(t') + \theta, & \text{если } t' \in En(M \setminus \bullet t), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$
- $GT' = GT + \theta.$

Используется обозначение  $S \xrightarrow{\sigma} S'$ , если  $\sigma = (\theta_1, t_1) \dots (\theta_n, t_n)$  и  $S = S^0 \xrightarrow{(\theta_1, t_1)} S^1 \dots S^{n-1} \xrightarrow{(\theta_n, t_n)} S_n = S'$  для некоторого  $n \geq 0$ . В этом случае  $\sigma$  — *пробег*  $\mathcal{TN}$  из  $S$  (в  $S'$ ), а  $S'$  — *достижимое состояние* сети  $\mathcal{TN}$  из  $S$ . Пусть  $\mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$  обозначает множество всех пробегов из  $S$ ,  $\mathcal{RUN}(\mathcal{TN}) = \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S_0)$  и  $\mathcal{RS}(\mathcal{TN})$  — множество всех достижимых состояний сети  $\mathcal{TN}$  из  $S_0$ .

НВСП<sub>сл</sub>  $\mathcal{TN}$  — *T-ограниченна*, если  $\bullet t \neq \emptyset$  и  $t \bullet \neq \emptyset$  для всех переходов  $t \in T$ ; *бесконтактная*, если базовая сеть Петри бесконтактная. В дальнейшем будут рассматриваться только *T-ограниченные* и *бесконтактные* НВСП<sub>сл</sub>.

Данная работа исследует *безопасные* НВСП<sub>сл</sub>, в которых последовательное срабатывание переходов из начального состояния гарантирует, что каждое место содержит не более одной фишки. Это свойство следует из ранее определенного свойства бесконтактности.

Результаты работы [11] позволяют в дальнейшем ограничиться рассмотрением только целочисленного хода времени в НВСП<sub>сл</sub>.

**Пример 1.** На рис. 1 показана НВСП<sub>сл</sub>  $\mathcal{TN}_1$ , в которой места представлены окружностями, а переходы — барьерами. Отношение инцидентности представлено направленными дугами. Каждое место, принадлежащее начальной разметке, имеет фишку (помечено жирной точкой). Значения статической временной функции изображены рядом с переходами. Ниже показано, что  $\sigma = (1, t_1)(1, t_2)(3, t_3) \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}_1)$ , т.е.  $S_0 \xrightarrow{(1, t_1)} S_1 \xrightarrow{(1, t_2)} S_2 \xrightarrow{(3, t_3)} S_3$ .

Изначально  $S_0 = (M_0, I_0, GT_0)$ , где  $M_0 = \{p_1, p_2\}$ ,  $I_0(t_1) = I_0(t_2) = 0$ , потому что  $En(M_0) = \{t_1, t_2\}$ , и  $GT_0 = 0$ . Переход  $t_1$ , допустимый в разметке  $M_0$ , может сработать из состояния  $S_0$  после хода времени 1, поскольку  $I_0(t_1) + 1 = 1 \in D(t_1) = [1, 2]$ . Тогда  $S_0 \xrightarrow{(1, t_1)} S_1 = (M_1, I_1, GT_1)$ , где  $M_1 = (M_0 \setminus \bullet t_1) \cup t_1 \bullet = (\{p_1, p_2\} \setminus \{p_1\}) \cup \{p_3\} = \{p_3, p_2\}$ ,  $En(M_1) = \{t_2\}$ ,  $I_1(t_2) = 1$  и  $GT_1 = GT_0 + 1 = 1$ .

Аналогично,  $t_2 \in En(M_1)$  может сработать из состояния  $S_1$  после хода времени 1, так как  $I_1(t_2) + 1 = 2 \in D(t_2) = [1, 2]$ . Следовательно,  $S_1 \xrightarrow{(1, t_2)} S_2 = (M_2, I_2, GT_2)$ , где  $M_2 = (M_1 \setminus \bullet t_2) \cup t_2 \bullet = (\{p_3, p_2\} \setminus \{p_2\}) \cup \{p_4\} = \{p_3, p_4\}$ ,  $En(M_2) = \{t_3, t_4\}$ ,  $I_2(t_3) = I_2(t_4) = 0$  и  $GT_2 = GT_1 + 1 = 2$ .

Наконец,  $S_2 \xrightarrow{(3, t_3)} S_3 = (M_3, I_3, GT_3)$ , где  $M_3 = (M_2 \setminus \bullet t_3) \cup t_3 \bullet = (\{p_3, p_4\} \setminus \{p_3, p_4\}) \cup \{p_1, p_2\} = \{p_1, p_2\}$ ,  $En(M_3) = \{t_1, t_2\}$ ,  $I_3(t_1) = I_3(t_2) = 0$  и  $GT_3 = GT_2 + 3 = 5$ , потому что  $I_2(t_3) + 3 = 3 \in D(t_3) = [2, 3]$ , т.е.  $t_3 \in En(M_2)$  может сработать из состояния  $S_2$ .

Стоит заметить, что слабая стратегия позволяет не форсировать срабатывание перехода  $t_4$ , когда время на его часах пересекает верхнюю границу его временного интервала  $[0, 1]$ .

## 2. Временные процессы

Этот раздел обобщает модель временных процессов, представленных в работе [10], на слабую стратегию хода времени НВСП. Изложение начинается с определения ациклической причинно-следственной сети, которая состоит из двух различных множеств событий и условий, связанных отношением инцидентности. Причинно-следственная сеть удовлетворяет двум структурным ограничениям. Каждое условие должно иметь не более одного вход-

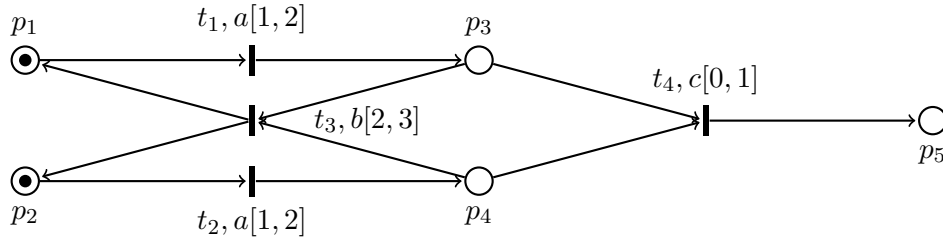


Рис. 1. Непрерывно-временная сеть Петри  $\mathcal{TN}_1$

ного события и не более одного выходного события. Кроме того, каждое событие должно иметь как входное, так и выходное условие.

**Определение 3. (Причинно-следственная сеть)** (Помеченная над Act) причинно-следственная сеть (ПСС) — это ациклическая сеть  $N = (B, E, G, l)$ , где:

- $B$  — конечное множество условий;
- $E$  — конечное множество событий такое, что  $B \cap E = \emptyset$ ;
- $G \subseteq (B \times E) \cup (E \times B)$  — отношение инцидентности такое, что  $E = \bullet B = B^\bullet$  и  $|b^\bullet| \leq 1, |\bullet b| \leq 1$  для всех  $b \in B$ ;
- $l : E \rightarrow Act$  — помечающая функция.

Ниже приводятся дополнительные понятия и обозначения для ПСС  $N = (B, E, G, l)$ :

- $x \prec x' \iff x G^+ x'$ , и  $x \preceq x' \iff x G^* x'$  — отношение причинной зависимости между элементами  $x, x' \in B \cup E$ .
- $x \smile x' \iff \neg(x \preceq x') \wedge \neg(x' \preceq x)$  — отношение параллелизма между элементами  $x, x' \in B \cup E$ .
- $\smile$ -множество — непустое подмножество условий  $B' \subseteq B$ , где  $b \smile b'$  для всех различных  $b, b' \in B'$ .
- Сечение — максимальное по включению  $\smile$ -множество.
- $\mathcal{CUT}(N)$  — множество всех сечений в  $N$ .
- $\bullet N = \{b \in B \mid \bullet b = \emptyset\}$  — начальное сечение.
- $N^\bullet = \{b \in B \mid b^\bullet = \emptyset\}$  — конечное сечение.

Событие  $e \in E$  допустимо в сечении  $C \in \mathcal{CUT}(N)$  (обозначается  $e \in En(C)$ ), если  $\bullet e \subseteq C$ . В этом случае используется запись  $C \xrightarrow{e} C'$  или  $C \rightarrow C'$ , где  $C' = (C \setminus \bullet e) \cup e^\bullet$ . Отношение  $(\rightarrow)$  определяет отношения причинной зависимости и параллелизма на сечениях:

- $C \prec C' \iff C \rightarrow^+ C'$ , и  $C \preceq C' \iff C \rightarrow^* C'$  — отношение причинной зависимости между сечениями  $C, C' \in \mathcal{CUT}(N)$ .
- $C \smile C' \iff \neg(C \preceq C') \wedge \neg(C' \preceq C)$  — отношение параллелизма между сечениями  $C, C' \in \mathcal{CUT}(N)$ .
- $\downarrow C = \{e \in E \mid e \preceq e', e' \in \bullet C\}$  — множество событий, предшествующих сечению  $C \in \mathcal{CUT}(N)$ .

Сечение описывает состояние, достигнутое после наступления всех событий, которые ему предшествуют. Следовательно,  $C \preceq C' \iff \downarrow C \subseteq \downarrow C'$ . Следует отметить, что  $\downarrow \bullet N = \emptyset$  и  $\downarrow N^\bullet = E$ , где  $E$  — множество всех событий в ПСС  $N$ .

**Пример 2.** На рис. 2 показана  $N_1 = (B, E, G, l)$ , где  $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ ,  $G = \{(b_1, e_1), (e_1, b_3), (b_2, e_2), (e_2, b_4), (b_3, e_3), (b_4, e_3), (e_3, b_5), (e_3, b_6)\}$ ,  $l(e_1) =$

$l(e_2) = a$  и  $l(e_3) = b$ . Видно, что  $|b^\bullet| \leq 1$  и  $|\bullet b| \leq 1$  для любого  $b \in B$  и  $E = \bullet B = B^\bullet$ . Поскольку  $b_1 \smile b_4$  и не существует  $b \in B \setminus \{b_1, b_4\}$  такого, что  $b \smile b_1$  и  $b \smile b_4$ , то  $\{b_1, b_4\}$  является сечением в  $N_1$ . Легко проверить, что множества  $\bullet N_1 = \{b_1, b_2\}$ ,  $\{b_2, b_3\}$ ,  $\{b_3, b_4\}$  и  $N_1^\bullet = \{b_5, b_6\}$  также являются сечениями в  $N_1$ . Поскольку  $\bullet e_1 = \{b_1\}$ , то событие  $e_1$  допустимо в  $\{b_1, b_4\}$ . Тогда  $\{b_1, b_4\} \xrightarrow{e_1} \{b_3, b_4\}$ , потому что  $(\{b_1, b_4\} \setminus \bullet e_1) \cup e_1^\bullet = \{b_3, b_4\}$ .

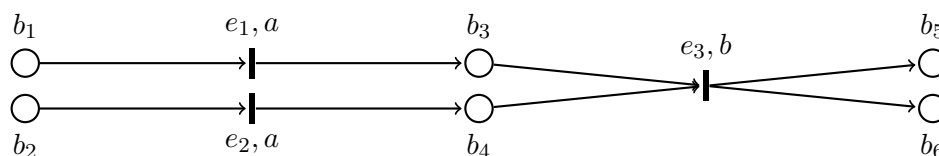


Рис. 2. Причинно-следственная сеть  $N_1$

Для определения отношения между ПСС и сетями Петри используется гомоморфизм — отображение, сохраняющее отношение инцидентности и помечающую функцию.

**Определение 4. (Гомоморфизм)** Пусть  $N = (B, E, G, l)$  — ПСС и  $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$  — сеть Петри с достижимой разметкой  $M$ . Отображение  $\varphi : (B \cup E) \rightarrow (P \cup T)$  является гомоморфизмом из  $N$  в  $\mathcal{N}$  относительно  $M$ , если выполняются следующие условия:

- $\varphi(B) \subseteq P$ , и  $\varphi(E) \subseteq T$ ,
- сужение  $\varphi$  на  $\bullet e$  является биекцией между  $\bullet e$  и  $\bullet \varphi(e)$  для всех  $e \in E$ ,
- сужение  $\varphi$  на  $e^\bullet$  является биекцией между  $e^\bullet$  и  $\varphi(e)^\bullet$  для всех  $e \in E$ ,
- сужение  $\varphi$  на  $\bullet N$  является биекцией между  $\bullet N$  и  $M$ ,
- $l(e) = L(\varphi(e))$  для всех  $e \in E$ .

**Пример 3.** Рассматривается базовая сеть Петри  $\mathcal{N}_1 = (P, T, F, M_0, L)$ , показанная на рис. 1, ПСС  $N_1 = (B, E, G, l)$  из примера 2 и отображение  $\varphi$ , определенное следующим образом:  $\varphi(b_1) = \varphi(b_5) = p_1$ ,  $\varphi(b_2) = \varphi(b_6) = p_2$ ,  $\varphi(b_3) = p_3$ ,  $\varphi(b_4) = p_4$ ,  $\varphi(e_1) = t_1$ ,  $\varphi(e_2) = t_2$ ,  $\varphi(e_3) = t_3$ . Тогда верно следующее:  $\varphi(B) \subseteq P$ ,  $\varphi(E) \subseteq T$ ,  $l(e) = L(\varphi(e))$  для всех  $e \in E$ , и сужение  $\varphi$  на подмножество  $\bullet N_1 = \{b_1, b_2\}$  является биекцией между  $\bullet N_1$  и  $M_0 = \{p_1, p_2\}$ . Кроме того, для всех  $e \in E$  сужение  $\varphi$  на подмножество  $\bullet e$  ( $e^\bullet$ ) является биекцией между  $\bullet e$  ( $e^\bullet$ ) и  $\bullet \varphi(e)$  ( $\varphi(e)^\bullet$ ). Например, сужение  $\varphi$  на подмножество  $\bullet e_3 = \{b_3, b_4\}$  является биекцией между  $\bullet e_3$  и  $\bullet \varphi(e_3) = \bullet t_3 = \{p_3, p_4\}$ . Следовательно,  $\varphi$  является гомоморфизмом из  $N_1$  в  $\mathcal{N}_1$ .

Ниже приводится доказательство того, что сужение гомоморфизма на произвольное сечение является биекцией между этим сечением и разметкой сети Петри.

**Лемма 1.** Пусть  $N$  — ПСС,  $\mathcal{N}$  — бесконтактная сеть Петри, и  $\varphi$  — гомоморфизм из  $N$  в  $\mathcal{N}$  относительно достижимой разметки  $M$ . Тогда для всех  $C \in \text{CUT}(N)$  сужение  $\varphi$  на  $C$  является биекцией между  $C$  и  $\varphi(C)$ .

*Доказательство.* По определению ПСС выполняется  $\downarrow \bullet N = \emptyset$ , откуда следует  $\downarrow \bullet N \subseteq \downarrow C$ , т.е.  $\bullet N \preceq C$ . Это означает, что существует последовательность сечений и событий:

$$(\bullet N = C_0) \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} (C_n = C), \text{ для } n \geq 0.$$

Утверждение доказывается индукцией по  $0 \leq i \leq n$ . Будет показано, что существует последовательность разметок:

$$(M = M^0) \xrightarrow{\varphi(e_1)} M^1 \dots M^{n-1} \xrightarrow{\varphi(e_n)} M^n, \quad (1)$$

такая, что сужение  $\varphi$  на каждое  $C_i$  является биекцией между  $C_i$  и соответствующей разметкой  $M^i$ .

**База индукции** ( $i = 0$ ). Сужение  $\varphi$  на подмножество  $C_0 = \bullet N$  является биекцией между  $C_0$  и разметкой  $M = M^0$  по определению гомоморфизма.

**Шаг индукции** ( $i > 0$ ). По предположению индукции для индекса  $i - 1$  существует префикс последовательности разметок (1), и сужение  $\varphi$  на  $C_{i-1}$  является биекцией между  $C_{i-1}$  и  $M^{i-1}$ .

Поскольку  $C_{i-1} \xrightarrow{e_i} C_i$ , то  $\bullet e_i \subseteq C_{i-1}$ . Из этого следует:  $\varphi(\bullet e_i) \subseteq \varphi(C_{i-1}) = M^{i-1}$ . По определению 4,  $\bullet \varphi(e_i) = \varphi(\bullet e_i) \subseteq M^{i-1}$ , следовательно, переход  $\varphi(e_i)$  допустим в разметке  $M^{i-1}$ , т.е.  $\varphi(e_i) \in En(M^{i-1})$ . Согласно определению 1,  $M^{i-1} \xrightarrow{\varphi(e_i)} M^i$ , что подтверждает существование следующего члена последовательности (1), где:

$$M^i = (M^{i-1} \setminus \bullet \varphi(e_i)) \cup \varphi(e_i)^\bullet.$$

Теперь будет показано, что сужение  $\varphi$  на  $C_i$  также является биекцией между  $C_i$  и  $M^i$ . Из  $C_{i-1} \xrightarrow{e_i} C_i$  следует  $C_i = (C_{i-1} \setminus \bullet e_i) \cup e_i^\bullet$ . С учетом свойств гомоморфизма и предположения индукции получаем:

$$\varphi(C_i) = (\varphi(C_{i-1}) \setminus \bullet \varphi(e_i)) \cup \varphi(e_i)^\bullet = M^i.$$

Поскольку  $\mathcal{N}$  — бесконтактная сеть Петри и переход  $\varphi(e_i)$  допустим в разметке  $M^{i-1}$ , то выполняется условие:  $(\varphi(C_{i-1}) \setminus \bullet \varphi(e_i)) \cap \varphi(e_i)^\bullet = \emptyset$ . Следовательно, сужение  $\varphi$  на  $C_i$  является биекцией между  $C_i$  и  $M^i$ . □

Вводятся временные ПСС, состоящие из ПСС и временной функции, сопоставляющей вещественное значение каждому событию ПСС.

**Определение 5. (Временная причинно-следственная сеть)** (Помеченная на Act) временная ПСС (ВПСС) — это пара  $TN = (N, \tau)$ , где  $N = (B, E, G, l)$  — базовая (помеченная на Act) ПСС, и  $\tau : E \rightarrow \mathbb{N}$  — временная функция такая, что  $e \preceq e' \Rightarrow \tau(e) \leq \tau(e')$  для всех  $e, e' \in E$ .

ВПСС  $TN = ((B, E, G, l), \tau)$  и  $TN' = ((B', E', G', l'), \tau')$  изоморфны (обозначается  $TN \simeq TN'$  или  $f : TN \simeq TN'$ ), если существует биективное отображение  $f : B \cup E \rightarrow B' \cup E'$  (изоморфизм) такое, что:

- $f(B) = B'$ , и  $f(E) = E'$ ,
- $x G y \iff f(x) G' f(y)$  для всех  $x, y \in B \cup E$ ,
- $l(e) = l'(f(e))$ , и  $\tau(e) = \tau'(f(e))$  для всех  $e \in E$ .

Для ВПСС  $TN = (N, \tau)$ , НВСП<sub>сл</sub>  $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$  и состояния  $S = (M, I) \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$  гомоморфизм из  $N$  в  $\mathcal{N}$  относительно разметки  $M$  называется также гомоморфизмом из  $TN$  в  $\mathcal{TN}$  относительно состояния  $S$ .

Далее рассматривается метод линеаризации событий ВПСС с учетом временных характеристик модели.

**Определение 6. (Линеаризация)** Пусть  $TN = (N, \tau)$  — ВПСС. Последовательность событий  $\omega = e_1 \dots e_n$  ( $n \geq 0$ ) называется *линеаризацией*  $TN$ , если  $\tau(e_i) < \tau(e_j) \Rightarrow i < j$  для всех  $1 \leq i, j \leq n$ , и существует цепь сечений:

$$(\bullet N = C_0) \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} (C_n = N \bullet).$$

Пусть  $\mathcal{LIN}(TN)$  обозначает множество всех линеаризаций  $TN$ . Заметим, что поскольку  $C_i = (C_{i-1} \setminus \bullet e_i) \cup e_i \bullet$  для всех  $1 \leq i \leq n$ ,  $C_0 = \bullet N$  и  $C_n = N \bullet$ , то каждое событие из  $TN$  появляется в линеаризации ровно один раз.

**Пример 4.** В данном примере рассматривается  $TN_1 = (N_1, \tau)$ , где  $N_1$  — ПСС из примера 2, и функция  $\tau$  определена следующим образом:  $\tau(e_1) = 1$ ,  $\tau(e_2) = 2$ ,  $\tau(e_3) = 5$ . Тогда  $e \preceq e' \Rightarrow \tau(e) \leq \tau(e')$ , для всех  $e, e' \in E$ . Следовательно,  $TN_1$  является ВПСС. Далее рассмотрим последовательность событий  $\omega = e_1 e_2 e_3$  с цепью сечений  $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1 \xrightarrow{e_2} C_2 \xrightarrow{e_3} C_3$ , где  $C_0 = \bullet N_1 = \{b_1, b_2\}$ ,  $C_1 = \{b_3, b_2\}$ ,  $C_2 = \{b_3, b_4\}$ ,  $C_3 = N_1 \bullet = \{b_5, b_6\}$ . Видно, что  $\tau(e_i) < \tau(e_j) \Rightarrow i < j$  для всех  $1 \leq i, j \leq 3$ , т.е.  $\omega$  является линеаризацией  $TN_1$ .

Ниже показано, что для каждой ВПСС существует линеаризация.

**Утверждение 1.** Пусть  $TN = (N = (B, E, G, l), \tau)$ . Тогда  $\mathcal{LIN}(TN) \neq \emptyset$ .

*Доказательство.* Поскольку множество событий конечно, то  $|E| = n$  для некоторого  $n \geq 0$ . Если  $n = 0$ , утверждение тривиально. Индукцией по  $1 \leq i \leq n$  строится последовательность событий  $\omega = e_1 \dots e_n$  с цепью сечений:

$$(\bullet N = C_0) \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} (C_n = N \bullet) \quad (2)$$

такая, что  $\tau(e_j) \leq \tau(e)$  для всех  $e \in E \setminus \downarrow C_j$  и  $1 \leq j \leq n$ .

**База индукции** ( $i = 1$ ). Так как  $\downarrow C_0 \subset \downarrow N \bullet = E$ , то  $C_0 \rightarrow^+ N \bullet$  и  $En(C_0) \neq \emptyset$ . Пусть  $e_1 \in En(C_0)$  — событие с минимальным значением функции  $\tau$ . Тогда  $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1$ , где  $C_1 = (C_0 \setminus \bullet e_1) \cup e_1 \bullet$ .

Рассмотрим  $e \in E \setminus \downarrow C_1$ . Поскольку  $e_1 \in En(\bullet N)$ , то  $\bullet e_1 \subseteq \bullet N$ . Возможны два случая:

- (а)  $e_1 \preceq e$ . Тогда  $\tau(e_1) \leq \tau(e)$  по определению 5.
- (б)  $e_1 \smile e$ . Тогда  $e \in En(C_0)$  и  $\tau(e_1) \leq \tau(e)$  согласно выбору  $e_1$ .

Следовательно,  $\tau(e_1) \leq \tau(e)$  для всех  $e \in E \setminus \downarrow C_1$ .

**Шаг индукции** ( $i > 1$ ). По предположению индукции построена последовательность (2) до  $C_{i-1}$ , причем  $\tau(e_j) \leq \tau(e)$  для  $e \in E \setminus \downarrow C_j$  при  $1 \leq j \leq i-1$ . Так как  $\downarrow C_{i-1} \subset E$ , то  $En(C_{i-1}) \neq \emptyset$ . Пусть  $e_i \in En(C_{i-1})$  — событие с минимальным значением  $\tau$ . Тогда  $C_{i-1} \xrightarrow{e_i} C_i$ , где  $C_i = (C_{i-1} \setminus \bullet e_i) \cup e_i \bullet$ .

Пусть

$$e \in E \setminus \downarrow C_i = (E \setminus \downarrow C_{i-1}) \setminus \{e_i\}. \quad (3)$$

По предположению индукции  $\tau(e_j) \leq \tau(e)$  для  $1 \leq j \leq i-1$ . Покажем, что  $\tau(e_i) \leq \tau(e)$ . Если  $e \in En(C_{i-1})$ , это следует из выбора  $e_i$ . Для  $e \notin En(C_{i-1})$ , рассмотрим случаи:

- (а)  $e \smile e'$  для всех  $e' \in En(C_{i-1})$ . Это противоречит максимальнойности  $C_{i-1}$  как сечения, так как  $C_{i-1} \cup \bullet e$  было бы  $\smile$ -множеством.

(б)  $e \prec e'$  для некоторого  $e' \in \text{En}(C_{i-1})$ . Тогда  $e \in \downarrow C_{i-1}$ , что противоречит (3).

(в)  $e' \prec e$  для некоторого  $e' \in \text{En}(C_{i-1})$ . По определению 5 и выбору  $e_i$ :

$$\tau(e_i) \leq \tau(e') \leq \tau(e).$$

В результате построенная последовательность  $\omega = e_1 \dots e_n$  имеет цепь сечений (2). Докажем, что  $\omega$  — линейризация. Рассмотрим произвольные  $e_i, e_j$  из последовательности  $\omega$  такие, что  $\tau(e_i) < \tau(e_j)$ . Предположим обратное, т.е.  $i > j$ . Тогда  $e_i \in E \setminus \downarrow C_j$  из (2). По построению  $\tau(e_j) \leq \tau(e_i)$ , что противоречит  $\tau(e_i) < \tau(e_j)$ . Следовательно,  $i < j$  и  $\omega \in \mathcal{LIN}(TN)$  согласно определению 6.  $\square$

Чтобы связать временные конструкции ВПСС с НВСП<sub>сл</sub>, используется функция ТОЕ. Эта функция определяется в контексте достижимого состояния  $S$  и гомоморфизма  $\varphi$  относительно  $S$ . Функция принимает два аргумента: подмножество условий  $B'$  и переход  $t$ , допустимый в разметке  $\varphi(B')$ . ТОЕ для  $t$  представляет глобальный момент модельного времени, когда фишки появляются во всех входных местах  $t$ . Используя эту функцию, можно определить временной процесс для НВСП<sub>сл</sub> как пару, состоящую из ВПСС и гомоморфизма.

**Определение 7. (Временной процесс)** Пусть  $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$  — НВСП<sub>сл</sub>,  $TN = (N = (B, E, G, l), \tau)$  — ПСС,  $S = (M, I, GT) \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$  и  $\varphi$  — гомоморфизм из  $TN$  в  $\mathcal{TN}$  относительно  $S$ .

$$- \text{ТОЕ}_{\varphi, S}(B', t) = \begin{cases} \max(\{\tau(\bullet b) \mid b \in [B']_t \setminus \bullet N\}), & \text{если } [B']_t \setminus \bullet N \neq \emptyset, \\ GT - I(t), & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $[B']_t = \{b \in B' \mid \varphi(b) \in \bullet t\}$ , и  $t \in \text{En}(\varphi(B'))$ .

— Пара  $\pi = (TN, \varphi)$  является *временным процессом* НВСП<sub>сл</sub>  $\mathcal{TN}$  относительно состояния  $S$ , если для всех  $e \in E$  выполняется:  $\tau(e) - \text{ТОЕ}_{\varphi, S}(\bullet e, \varphi(e)) \in D(\varphi(e))$  и  $\tau(e) \geq GT$ .

Следует отметить, что согласно лемме 1, если  $e \in \text{En}(C)$  для сечения  $C$ , то  $\text{ТОЕ}_{\varphi, S}(\bullet e, \varphi(e)) = \text{ТОЕ}_{\varphi, S}(C, \varphi(e))$ . Пусть  $\mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$  обозначает множество всех временных процессов  $\mathcal{TN}$  относительно  $S$ .

Временные процессы  $\pi = (TN = ((B, E, G, l), \tau), \varphi)$  и  $\pi' = (TN', \varphi')$  *изоморфны* (обозначается  $\pi \simeq \pi'$  или  $f : \pi \simeq \pi'$ ), если существует изоморфизм  $f : TN \simeq TN'$  такой, что  $\varphi(x) = \varphi'(f(x))$  для всех  $x \in B \cup E$ .

**Пример 5.** Рассмотрим НВСП<sub>сл</sub>  $\mathcal{TN}_1$  из примера 1, временной процесс  $TN_1$  из примера 4 и гомоморфизм  $\varphi$  из примера 3. Покажем, что  $\pi = (TN_1, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}_1, S_0)$ , где  $S_0 = (M_0, I_0, GT_0)$  — начальное состояние. Видно, что  $\tau(e) \geq GT_0 = 0$  для всех  $e \in \{e_1, e_2, e_3\}$ . Вычислим функцию **ТОЕ**:

$$\begin{aligned} - \text{ТОЕ}_{\varphi, S_0}(\bullet e_1, \varphi(e_1)) &= \text{ТОЕ}_{\varphi, S_0}(\{b_1\}, t_1) = GT_0 - I_0(t_1) = 0, \\ - \text{ТОЕ}_{\varphi, S_0}(\bullet e_2, \varphi(e_2)) &= \text{ТОЕ}_{\varphi, S_0}(\{b_2\}, t_2) = GT_0 - I_0(t_2) = 0, \\ - \text{ТОЕ}_{\varphi, S_0}(\bullet e_3, \varphi(e_3)) &= \text{ТОЕ}_{\varphi, S_0}(\{b_3, b_4\}, t_2) = \max(\{\tau(\bullet b) \mid b \in \{b_3, b_4\}\}) = \\ &= \max(\{\tau(e_1), \tau(e_2)\}) = \max(\{1, 2\}) = 2. \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} - \tau(e_1) - \text{ТОЕ}_{\varphi, S_0}(\bullet e_1, \varphi(e_1)) &= 1 - 0 = 1 \in D(\varphi(e_1)) = D(t_1) = [1, 2], \\ - \tau(e_2) - \text{ТОЕ}_{\varphi, S_0}(\bullet e_2, \varphi(e_2)) &= 2 - 0 = 2 \in D(\varphi(e_2)) = D(t_2) = [1, 2], \\ - \tau(e_3) - \text{ТОЕ}_{\varphi, S_0}(\bullet e_3, \varphi(e_3)) &= 5 - 2 = 3 \in D(\varphi(e_3)) = D(t_3) = [2, 3]. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\pi = (TN_1, \varphi)$  является временным процессом  $\mathcal{TN}_1$  относительно начального состояния  $S_0$ .

### 3. Временные процессы и пробеги

В этом разделе исследуется взаимосвязь между линейризациями предложенных временных процессов и пробегами НВСП<sub>сл</sub>, которые определяют ее классическую интерливинговую семантику. Изложение начинается с доказательства вспомогательного факта, который связывает сечения с разметками, а функцию ТОЕ с динамической временной функцией НВСП<sub>сл</sub>.

**Утверждение 2.** Пусть  $\mathcal{TN}$  — НВСП<sub>сл</sub>,  $S = (M^0, I^0, GT^0) \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$ ,  $TN = (N = (B, E, G, l), \tau)$  — ВПСС, а  $\varphi$  — гомоморфизм из  $TN$  в  $\mathcal{TN}$  относительно  $S$ . Пусть  $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{LIN}(TN)$  для  $n \geq 0$  с цепью сечений:

$$(\bullet N = C_0) \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} (C_n = N^\bullet). \quad (4)$$

Если

$$(M^0, I^0, GT^0) \xrightarrow{(\tau(e_1) - GT^0, \varphi(e_1))} \dots \xrightarrow{(\tau(e_k) - GT^{k-1}, \varphi(e_k))} (M^k, I^k, GT^k) \quad (5)$$

для  $0 \leq k \leq n$ , то выполняется:

- (а) сужение  $\varphi$  на  $C_k$  является биекцией между  $C_k$  и  $M^k$ ;
- (б)  $\text{ТОЕ}_{\varphi, S}(C_k, t) = GT^k - I^k(t)$  для всех  $t \in \text{En}(M^k)$  и  $GT^k = \tau(e_k)$  для  $k > 0$ .

*Доказательство.* Утверждение доказывается индукцией по  $0 \leq i \leq k$ .

**База индукции** ( $i = 0$ ):

- (а) Сужение  $\varphi$  на  $C_0 = \bullet N$  является биекцией между  $C_0$  и  $M^0$  согласно определению 4.
- (б) Рассмотрим произвольный  $t \in \text{En}(M^0)$ . Тогда  $t \in \text{En}(\varphi(C_0))$  согласно пункту (а). Следовательно:

$$\text{ТОЕ}_{\varphi, S}(C_0, t) = \begin{cases} \max(\{\tau(\bullet b) \mid b \in [C_0]_t \setminus \bullet N\}), & \text{если } [C_0]_t \setminus \bullet N \neq \emptyset, \\ GT^0 - I^0(t), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как  $[C_0]_t \subseteq (C_0 = \bullet N)$ , то  $[C_0]_t \setminus \bullet N = \emptyset$ , откуда получаем  $\text{ТОЕ}_{\varphi, S}(C_0, t) = GT^0 - I^0(t)$ .

**Шаг индукции** ( $i > 0$ ): По предположению индукции сужение  $\varphi$  на  $C_{i-1}$  является биекцией между  $C_{i-1}$  и  $M^{i-1}$ , и выполняется  $\text{ТОЕ}_{\varphi, S}(C_{i-1}, t) = GT^{i-1} - I^{i-1}(t)$  для всех  $t \in \text{En}(M^{i-1})$ .

Поскольку  $C_{i-1} \xrightarrow{e_i} C_i$  из (4), то  $e_i \in \text{En}(C_{i-1})$ , т.е.  $\bullet e_i \subseteq C_{i-1}$  и  $C_i = (C_{i-1} \setminus \bullet e_i) \cup e_i^\bullet$ . Согласно условию (5) и определению 2:

$$GT^i = GT^{i-1} + (\tau(e_i) - GT^{i-1}) = \tau(e_i).$$

- (а) По определению 2 и (5),  $M^i = (M^{i-1} \setminus \bullet \varphi(e_i)) \cup \varphi(e_i)^\bullet$ . Используя свойства гомоморфизма из определения 4:

$$M^i = (M^{i-1} \setminus \varphi(\bullet e_i)) \cup \varphi(e_i)^\bullet.$$

Так как  $\bullet e_i \subseteq C_{i-1}$ , по предположению индукции имеем:

$$M^{i-1} \setminus \varphi(\bullet e_i) = \varphi(C_{i-1}) \setminus \varphi(\bullet e_i) = \varphi(C_{i-1} \setminus \bullet e_i).$$

Отсюда  $M^i = \varphi((C_{i-1} \setminus \bullet e_i) \cup e_i \bullet) = \varphi(C_i)$ . По лемме 1, сужение  $\varphi$  на  $C_i$  — биекция между  $C_i$  и  $M^i$ .

- (б) Рассмотрим произвольный  $t \in \text{En}(M^i)$ , т.е.  $t \in \text{En}(\varphi(C_i))$  по пункту (а). Поскольку  $C_i = (C_{i-1} \setminus \bullet e_i) \cup e_i \bullet$  и  $C_{i-1} \cap e_i \bullet = \emptyset$ , то:

$$\varphi(C_{i-1} \cap C_i) = \varphi(C_{i-1} \cap ((C_{i-1} \setminus \bullet e_i) \cup e_i \bullet)) = \varphi(C_{i-1} \setminus \bullet e_i).$$

Более того,  $\varphi(C_{i-1} \setminus \bullet e_i) = M^{i-1} \setminus \varphi(\bullet e_i)$  согласно  $\bullet e_i \subseteq C_{i-1}$  и предположению индукции. Следовательно,

$$\varphi(C_{i-1} \cap C_i) = M^{i-1} \setminus \varphi(\bullet e_i) = M^{i-1} \setminus \bullet \varphi(e_i) \quad (6)$$

в силу определения 4.

Предположим, что  $t \in \text{En}(\varphi(C_{i-1} \cap C_i))$ , т.е.  $t \in \text{En}(M^{i-1} \setminus \bullet \varphi(e_i))$  из (6). Тогда по определению 2:

$$I^i(t) = I^{i-1}(t) + \tau(e_i) - GT^{i-1} = I^{i-1}(t) + GT^i - GT^{i-1}.$$

Благодаря лемме 1:

$$[C_i]_t = \{b \in C_i \mid \varphi(b) \in \bullet t\} = \{b \in C_{i-1} \cap C_i \mid \varphi(b) \in \bullet t\} = \{b \in C_{i-1} \mid \varphi(b) \in \bullet t\}.$$

Это означает, что  $\mathbf{TOE}_{\varphi,S}(C_i, t) = \mathbf{TOE}_{\varphi,S}(C_{i-1}, t)$ . Следовательно:

$$\begin{aligned} \mathbf{TOE}_{\varphi,S}(C_i, t) &= \mathbf{TOE}_{\varphi,S}(C_{i-1}, t) = GT^{i-1} - I^{i-1}(t) = \\ &= GT^{i-1} - I^{i-1}(t) + GT^i - GT^i = GT^i - (I^{i-1}(t) + GT^i - GT^{i-1}) = GT^i - I^i(t). \end{aligned}$$

Далее предположим, что  $t \notin \text{En}(\varphi(C_{i-1} \cap C_i))$ , т.е.  $t \notin \text{En}(M^{i-1} \setminus \bullet \varphi(e_i))$  согласно (6). Тогда  $I^i(t) = 0$  в силу определения 2. Так как  $t \in \text{En}(\varphi(C_i))$ ,  $t \notin \text{En}(\varphi(C_{i-1} \cap C_i))$  и  $C_i = (C_{i-1} \setminus \bullet e_i) \cup e_i \bullet$ , существует  $b \in [C_i]_t = \{b \in C_i \mid \varphi(b) \in \bullet t\}$  такой, что  $b \in e_i \bullet$ . Следовательно,  $\bullet b = e_i$ , т.е.  $b \notin \bullet N$  и  $[C_i]_t \setminus \bullet N \neq \emptyset$ . Значит, согласно конструкции линеаризации:

$$\mathbf{TOE}_{\varphi,S}(C_i, t) = \max(\{\tau(\bullet b) \mid b \in [C_i]_t \setminus \bullet N\}) = \tau(e_i) = \tau(e_i) - 0 = GT^i - I^i(t).$$

□

Далее для  $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{LIN}(TN)$  вводится функция  $Run$  следующим образом:  $Run_{\varphi,S}(TN, \omega) = (\tau(e_1) - GT^0, \varphi(e_1))(\tau(e_2) - \tau(e_1), \varphi(e_2)) \dots (\tau(e_n) - \tau(e_{n-1}), \varphi(e_n))$ . Ниже показано, что функция  $Run$  отображает любую линеаризацию временного процесса НВСП<sub>сл</sub>  $\mathcal{TN}$  в пробег  $\mathcal{TN}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $\mathcal{TN}$  — НВСП<sub>сл</sub>,  $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$  для  $S = (M, I, GT) \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$ , и  $\omega \in \mathcal{LIN}(TN)$ . Тогда  $Run_{\varphi,S}(TN, \omega) \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$ .

*Доказательство.* Пусть  $\omega = e_1 \dots e_n$  для  $n \geq 0$  с цепью сечений:

$$(\bullet N = C_0) \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} (C_n = N \bullet).$$

Для  $n = 0$  доказывать нечего. Предположим, что  $n > 0$ . Индукцией по  $1 \leq i \leq n$  доказыва-ется существование последовательности срабатываний:

$$S = (M^0, I^0, GT^0) \xrightarrow{(\tau(e_1) - GT^0, \varphi(e_1))} \dots \xrightarrow{(\tau(e_n) - GT^{n-1}, \varphi(e_n))} (M^n, I^n, GT^n). \quad (7)$$

**База индукции** ( $i = 1$ ). Согласно утверждению 2(а), сужение  $\varphi$  на  $C_0$  является биекцией между  $C_0$  и  $M^0$ . Из  $C_0 \xrightarrow{e_1} C_1$  следует  $\bullet e_1 \subseteq C_0$ , откуда:  $\varphi(\bullet e_1) \subseteq \varphi(C_0) = M^0$ . По определению 4,  $\bullet\varphi(e_1) \subseteq M^0$ , получаем:

$$\varphi(e_1) \in En(M^0).$$

Кроме того, по утверждению 2(б),  $\mathbf{ТОЕ}_{\varphi,S}(C_0, t) = GT^0 - I^0(t)$  для всех  $t \in En(M^0)$ . Тогда:

$$\begin{aligned} I^0(\varphi(e_1)) + (\tau(e_1) - GT^0) &= \tau(e_1) - (GT^0 - I^0(\varphi(e_1))) = \\ &= \tau(e_1) - \mathbf{ТОЕ}_{\varphi,S}(C_0, \varphi(e_1)) = \tau(e_1) - \mathbf{ТОЕ}_{\varphi,S}(\bullet e_1, \varphi(e_1)) \in D(\varphi(e_1)). \end{aligned}$$

Следовательно, по определению 2, переход  $\varphi(e_1)$  может сработать из  $(M^0, I^0, GT^0)$  после хода времени  $\tau(e_1) - GT^0$ . Новое состояние  $(M^1, I^1, GT^1)$  последовательности (7) определяется как  $M^1 = (M^0 \setminus \bullet\varphi(e_1)) \cup \varphi(e_1)\bullet$ ,  $GT^1 = GT^0 + \tau(e_1) - GT^0 = \tau(e_1)$  и:

$$\forall t \in En(M^1) : I^1(t) = \begin{cases} I^0(t) + (\tau(e_1) - GT^0), & \text{если } t \in En(M^0 \setminus \bullet\varphi(e_1)), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

**Шаг индукции** ( $i > 1$ ). По предположению индукции выполнена часть последовательности (7) до состояния  $(M^{i-1}, I^{i-1}, GT^{i-1})$ . Согласно утверждению 2 (аналогично рассуждениям выше), переход  $\varphi(e_i)$  допустим и может сработать после хода времени  $\tau(e_i) - GT^{i-1}$ :

$$(M^{i-1}, I^{i-1}, GT^{i-1}) \xrightarrow{(\tau(e_i) - GT^{i-1}, \varphi(e_i))} (M^i, I^i, GT^i),$$

$M^i = (M^{i-1} \setminus \bullet\varphi(e_i)) \cup \varphi(e_i)\bullet$ ,  $GT^i = GT^{i-1} + \tau(e_i) - GT^{i-1} = \tau(e_i)$  и:

$$\forall t \in En(M^i) : I^i(t) = \begin{cases} I^{i-1}(t) + (\tau(e_i) - GT^{i-1}), & \text{если } t \in En(M^{i-1} \setminus \bullet\varphi(e_i)), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По утверждению 2(б),  $GT^k = \tau(e_k)$  для всех  $1 \leq k \leq n$ . Подставляя эти значения в (7), получаем последовательность:

$$(\tau(e_1) - GT^0, \varphi(e_1))(\tau(e_2) - \tau(e_1), \varphi(e_2)) \dots (\tau(e_n) - \tau(e_{n-1}), \varphi(e_n)) = Run_{\varphi,S}(TN, \omega).$$

Следовательно,  $Run_{\varphi,S}(TN, \omega) \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$ . □

Далее доказывается, что для каждого пробега  $\sigma$  НВСП<sub>сл</sub>  $\mathcal{TN}$  существует временной процесс  $\mathcal{TN}$  такой, что  $Run$  отображает его линейризацию в  $\sigma$ .

**Теорема 2.** Пусть  $\mathcal{TN}$  – НВСП<sub>сл</sub>,  $\sigma \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$  для  $S \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$ . Тогда существуют временной процесс  $\pi^* = (TN^*, \varphi^*) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$  и линейризация  $\omega^* \in \mathcal{LIN}(TN^*)$  такие, что  $Run_{\varphi^*,S}(TN^*, \omega^*) = \sigma$ .

*Доказательство.* Предположим, что  $\mathcal{TN} = (\mathcal{N}, D)$  с  $\mathcal{N} = (P, T, F, M_0, L)$  (помеченной на  $Act$ ), и задан пробег  $\sigma = (\theta_1, t_1) \dots (\theta_n, t_n) \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$  с последовательностью состояний:

$$S = (M^0, I^0, GT^0) \xrightarrow{(\theta_1, t_1)} \dots \xrightarrow{(\theta_n, t_n)} (M^n, I^n, GT^n), \quad (8)$$

для  $n \geq 0$ .

Сначала построим ПСС  $N^* = (B^*, E^*, G^*, l^*)$  следующим образом:

- $B^* = \{b_{0,p}^* \mid p \in M^0\} \cup \{b_{i,p}^* \mid p \in t_i^\bullet, 1 \leq i \leq n\}$ ;
- $E^* = \{e_i^* \mid 1 \leq i \leq n\}$ ;
- $G^* = \{(e_i^*, b_{i,p}^*) \mid p \in t_i^\bullet, 1 \leq i \leq n\} \cup$   
 $\cup \{(b_{j,p}^*, e_i^*) \mid p \in \bullet t_i, j = \max\{k < i \mid b_{k,p}^* \in B^*\}, 1 \leq i \leq n\}$ ;
- $l^* : E^* \rightarrow Act$  такая, что  $l^*(e_i^*) = L(t_i)$  для  $1 \leq i \leq n$ .

По определению 1,  $P$  и  $T$  — конечные множества, и  $P \cap T = \emptyset$ . Тогда  $B^*$  и  $E^*$  также конечны и  $B^* \cap E^* = \emptyset$ . Легко видеть, что  $G^* \subseteq (B^* \times E^*) \cup (E^* \times B^*)$ ,  $|b^{*\bullet}| \leq 1$  и  $|\bullet b^*| \leq 1$  для каждого  $b^* \in B^*$ . Поскольку  $\bullet t \neq \emptyset$  и  $t^\bullet \neq \emptyset$  для всех  $t \in T$ , то  $E^* = \bullet B^* = B^{*\bullet}$ . Следовательно,  $N^* = (B^*, E^*, G^*, l^*)$  является причинно-следственной сетью, по определению 3.

Далее определим  $\varphi^* : (B^* \cup E^*) \rightarrow (P \cup T)$  так, что:

$$\varphi^*(b_{i,p}^*) = p \text{ и } \varphi^*(e_i^*) = t_i$$

для всех  $b_{i,p}^* \in B^*$  и  $e_i^* \in E^*$ . Согласно конструкции  $N^*$  и определению 4,  $\varphi^*$  является гомоморфизмом из  $N^*$  в  $\mathcal{N}$  относительно  $M^0$ .

Пусть  $C_0^* = \bullet N^*$  и  $C_i^* = (C_{i-1}^* \setminus \bullet e_i^*) \cup e_i^{*\bullet}$  для  $1 \leq i \leq n$ . Рассмотрим произвольный  $1 \leq i \leq n$ . Поскольку  $e_i^* \in En(C_{i-1}^*)$  и  $C_i^* = (C_{i-1}^* \setminus \bullet e_i^*) \cup e_i^{*\bullet}$ , то  $C_{i-1}^* \xrightarrow{e_i^*} C_i^*$ . Следовательно, имеет место цепь сечений:

$$(C_0^* = \bullet N^*) \xrightarrow{e_1^*} C_1^* \dots C_{n-1}^* \xrightarrow{e_n^*} (C_n^* = N^{*\bullet}). \quad (9)$$

Пусть  $\tau^* : E^* \rightarrow \mathbb{N}$  — функция такая, что:

$$\tau^*(e_1^*) = GT^0 + \theta_1 \text{ и } \tau^*(e_i^*) = \tau^*(e_{i-1}^*) + \theta_i \text{ для } 1 < i \leq n.$$

Следовательно,  $e_i^* \preceq e_j^* \Rightarrow i \leq j \Rightarrow \tau^*(e_i^*) \leq \tau^*(e_j^*)$  для  $1 \leq i, j \leq n$ , т.е.  $TN^* = (N^*, \tau^*)$  является временной причинно-следственной сетью в силу определения 5. Более того,  $\omega^* = e_1^* \dots e_n^*$  является линейризацией, по определению 6, потому что  $\tau^*(e_i^*) < \tau^*(e_j^*) \Rightarrow i < j$  для всех  $1 \leq i \leq j \leq n$  и (9). Отсюда следует:

$$Run_{\varphi^*, S}(TN^*, \omega^*) = (\tau^*(e_1^*) - GT^0, \varphi^*(e_1^*)) (\tau^*(e_2^*) - \tau^*(e_1^*), \varphi^*(e_2^*)) \dots \\ \dots (\tau^*(e_n^*) - \tau^*(e_{n-1}^*), \varphi^*(e_n^*)) = (\theta_1, t_1) \dots (\theta_n, t_n) = \sigma.$$

Остается проверить, что  $\pi^* = (TN^*, \varphi^*) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$ .

Рассмотрим произвольный  $e_i^* \in E^*$ . Видно что,  $\tau^*(e_i^*) \geq GT^0$ . Теперь докажем, что  $\tau^*(e_i^*) - \mathbf{TOE}_{\varphi^*, S}(\bullet e_i^*, \varphi^*(e_i^*)) \in D(t_i)$ . Поскольку  $(M^{i-1}, I^{i-1}, GT^{i-1}) \xrightarrow{(\theta_i, \varphi^*(e_i^*))} (M^i, I^i, GT^i)$  из (8), то  $\varphi^*(e_i^*) \in En(M^{i-1})$  и  $I^{i-1}(\varphi^*(e_i^*)) + \theta_i \in D(\varphi^*(e_i^*))$ , по определению 2. На основании утверждения 2(б) получаем цепочку равенств:

$$\tau^*(e_i^*) - \mathbf{TOE}_{\varphi^*, S}(\bullet e_i^*, \varphi^*(e_i^*)) = \tau^*(e_i^*) - \mathbf{TOE}_{\varphi^*, S}(C_{i-1}^*, \varphi^*(e_i^*)) = \\ = \tau^*(e_i^*) - GT^{i-1} + I^{i-1}(\varphi^*(e_i^*)) = \theta_i + I^{i-1}(\varphi^*(e_i^*)) \in D(\varphi^*(e_i^*)).$$

Следовательно,  $\pi^* = (TN^*, \varphi^*) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$ , в силу произвольности выбора  $e_i^* \in E^*$ .  $\square$

Наконец, устанавливается, что временной процесс НВСП<sub>сл</sub>  $\mathcal{TN}$  в теореме 2 является единственным с точностью до изоморфизма.

**Теорема 3.** Пусть  $\mathcal{TN}$  — НВСП<sub>сл</sub>,  $\sigma \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S)$  для  $S = (M, I, GT) \in \mathcal{RS}(\mathcal{TN})$ . Тогда временной процесс  $\pi^* = (TN^*, \varphi^*) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$  такой, что  $Run_{\varphi^*, S}(TN^*, \omega^*) = \sigma$  для  $\omega^* \in \mathcal{LIN}(TN^*)$ , является единственным с точностью до изоморфизма.

*Доказательство.* Пусть  $\pi = (TN, \varphi) \in \mathcal{PRC}(\mathcal{TN}, S)$  с  $TN = (N = (B, E, G, l), \tau)$  и линейризацией  $\omega = e_1 \dots e_n \in \mathcal{LIN}(TN)$  с цепью сечений

$$(\bullet N = C_0) \xrightarrow{e_1} C_1 \dots C_{n-1} \xrightarrow{e_n} (C_n = N^\bullet)$$

для  $n \geq 0$  такие, что:

$$\begin{aligned} Run_{\varphi, S}(TN, \omega) &= (\tau(e_1) - GT, \varphi(e_1)) (\tau(e_2) - \tau(e_1), \varphi(e_2)) \dots \\ &\dots (\tau(e_n) - \tau(e_{n-1}), \varphi(e_n)) = (\theta_1, t_1) \dots (\theta_n, t_n) = \sigma \in \mathcal{RUN}(\mathcal{TN}, S). \end{aligned}$$

Поскольку каждое событие из  $TN$  появляется в линейризации ровно один раз, то  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Рассмотрим множество позиций  $B$ . По определению 3,  $|\bullet b| \leq 1$  для всех  $b \in B$  и  $E = \bullet B$ . Тогда либо  $b \in \bullet N$ , либо существует единственный  $e \in E$  такой, что  $\{e\} = \bullet b$ , т.е.  $b \in e^\bullet$ .

Согласно определению 4, сужение  $\varphi$  на  $\bullet N$  является биекцией между  $\bullet N$  и  $M$ . Кроме того, сужение  $\varphi$  на  $e_i^\bullet$  является биекцией между  $e_i^\bullet$  и  $\varphi(e_i)^\bullet = t_i^\bullet$  для всех  $e_i \in E$ . Без потери общности предположим:

$$B = \{b_{0,p} \mid p \in M\} \cup \{b_{i,p} \mid p \in t_i^\bullet, 1 \leq i \leq n\},$$

где  $\varphi(b_{i,p}) = p$  для каждого  $b_{i,p} \in B$ .

Рассмотрим множество  $G$ . Для произвольного  $e_i \in E$ , благодаря конструкции  $B$ ,  $e_i^\bullet = \{b_{i,p} \in B \mid p \in t_i^\bullet\}$ . Из  $C_{i-1} \xrightarrow{e_i} C_i$  следует  $\bullet e_i \subseteq C_{i-1}$ . Согласно лемме 1 и определению 4, сужение  $\varphi$  на  $\bullet e_i$  является биекцией между  $\bullet e_i$  и  $\bullet t_i$ . Тогда:

$$\bullet e_i = \{b_{j,p} \in B \mid p \in \bullet t_i, b_{j,p} \in C_{i-1}\}.$$

Поскольку  $C_0 = \bullet N$  и  $C_k = (C_{k-1} \setminus \bullet e_k) \cup e_k^\bullet$  для  $1 \leq k \leq n$ , то  $j = \max\{k < i \mid b_{k,p} \in B\}$ . Следовательно, получаем:

$$\begin{aligned} G &= \{(e_i, b_{i,p}) \in E \times B \mid p \in t_i^\bullet, 1 \leq i \leq n\} \cup \\ &\cup \{(b_{j,p}, e_i) \in B \times E \mid p \in \bullet t_i, j = \max\{k < i \mid b_{k,p} \in B\}, 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

По определению гомоморфизма  $l(e_i) = L(t_i)$ . Из равенства пробегов следует:

$$\tau(e_1) = GT + \theta_1, \quad \tau(e_i) = \tau(e_{i-1}) + \theta_i \text{ для } 1 < i \leq n.$$

Сравним  $\pi$  с процессом  $\pi^*$  из доказательства теоремы 2. Из равенства линейризаций  $|E^*| = |E| = n$ . Определим функцию  $f : B \cup E \rightarrow B^* \cup E^*$  как  $f(b_{i,p}) = b_{i,p}^*$  и  $f(e_i) = e_i^*$ . Тогда:

- (а)  $f(B) = B^*$  и  $f(E) = E^*$ ;
- (б)  $x G y \iff f(x) G^* f(y)$  для всех  $x, y \in B \cup E$ ;

(в)  $l(e) = l^*(f(e))$  и  $\tau(e) = \tau^*(f(e))$  для всех  $e \in E$ .

Следовательно,  $f$  является изоморфизмом  $f : TN \simeq TN^*$ . Так как  $\varphi(x) = \varphi^*(f(x))$  для всех  $x, y \in B \cup E$ , то  $f : \pi \simeq \pi^*$ .  $\square$

#### 4. Реализация и вычислительные эксперименты

В последние десятилетия аппарат сетей Петри активно применяется в биоинформатике [12]. Способность данного формализма отображать параллелизм, причинно-следственные связи и недетерминизм процессов позволяет адекватно моделировать динамику молекулярных взаимодействий. Растущий объем и структурная сложность накопленных моделей требуют разработки новых вычислительных методов анализа, так как традиционные подходы сталкиваются с вычислительными ограничениями при увеличении числа компонентов сети [13]. Использование причинно-следственной семантики в этих условиях позволяет сократить анализируемое пространство состояний модели за счет исключения избыточного перебора последовательностей срабатываний параллельных переходов.

Учет временных характеристик, таких как длительность реакций и время жизни молекулярных соединений, требует применения расширений сетей Петри [14, 15]. Для подобных систем предпочтительно использование НВСП со слабой временной стратегией. В отличие от сильной стратегии, наличие ресурсов и выполнение временных условий являются необходимыми, но не достаточными условиями для срабатывания перехода. Данный подход позволяет описывать биохимические процессы, в которых реализация реакции может произойти в любой момент внутри заданного временного интервала или не произойти вовсе.

На рис. 3 представлен фрагмент модели сигнального каскада RKIP/ERK (подсистема пути MAPK) [16]. В структуре данной НВСП<sub>сл</sub> места соответствуют молекулярным соединениям и белковым комплексам, а переходы — биохимическим реакциям. В зависимости от типа реакции переходам сопоставлены временные интервалы срабатывания: для реакций связывания (переходы  $t_1, t_4, t_7, t_{10}$ ) задан интервал  $[0, 1]$ , для реакций преобразования ( $t_3, t_9$ ) —  $[0, 3]$ , а для реакций распада ( $t_2, t_5, t_6, t_8, t_{11}$ ) —  $[2, 3]$ .

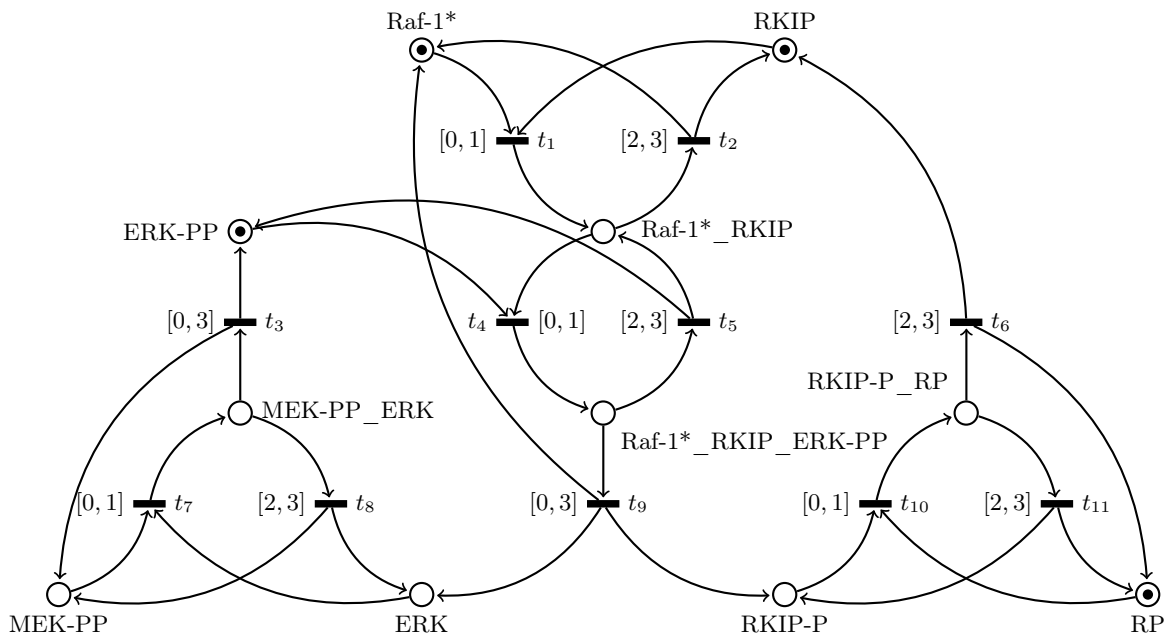


Рис. 3. Непрерывно-временная сеть Петри RKIP/ERK

Начальное состояние  $NBSP_{сл}$  определяется разметкой  $\{ERK-PP, Raf-1^*, RKIP, RP\}$  и нулевым значением локальных часов единственного допустимого перехода  $t_1$ . Данный переход готов сработать без временной задержки. Срабатывание  $t_1$  приводит к новой разметке  $\{ERK-PP, Raf-1^*_RKIP, RP\}$ , в которой допустимы два конфликтных перехода —  $t_2$  и  $t_4$ .

В терминах сильной временной стратегии переход  $t_4$  обязан сработать не позднее момента времени 1. Это исключает возможность срабатывания перехода  $t_2$ , так как нижняя граница его временного интервала строго больше верхней границы интервала перехода  $t_4$ . В отличие от этого, слабая временная стратегия не требует обязательного срабатывания  $t_4$ , что допускает дальнейшее увеличение значений локальных часов переходов. При достижении момента времени 2 переход  $t_2$  также получает возможность сработать. Таким образом, рассматриваемая модель позволяет исследовать сценарии, в которых реализуются «медленные» реакции при отсутствии выполнения более «быстрых».

Структура исследуемого каскада допускает параллельные пути передачи сигнала. Из достижимых состояний в одни и те же моменты времени возможны срабатывания параллельных переходов, не имеющих общих входных мест:  $\{t_7, t_{10}\}$ ,  $\{t_8, t_{11}\}$ ,  $\{t_8, t_6\}$ ,  $\{t_3, t_6\}$  и других. В классической интерливингивой семантике анализ модели потребовал бы рассмотрения всех возможных перестановок срабатываний параллельных переходов, что ведет к экспоненциальному росту числа исследуемых пробегов. Напротив, разработанная причинно-следственная семантика позволяет представить срабатывания таких переходов в виде единого причинно-следственного временного процесса.

Таблица 1. Результаты эксперимента для  $n \leq 16$

Модель EGFr				Модель simpleLBS			
$n$	$N_{states}$	$N_{cuts}$	$K_{red}$	$n$	$N_{states}$	$N_{cuts}$	$K_{red}$
1	14	14	<b>1.00</b>	1	3	3	<b>1.00</b>
2	185	153	<b>1.21</b>	2	8	7	<b>1.14</b>
3	2569	1573	<b>1.63</b>	3	18	12	<b>1.50</b>
4	36 865	15 486	<b>2.38</b>	4	25	14	<b>1.79</b>
5	530 098	143 465	<b>3.69</b>	5	73	44	<b>1.66</b>
6	7 475 994	1 225 982	<b>6.10</b>	6	264	132	<b>2.00</b>
7	101 848 894	9 510 052	<b>10.71</b>	7	974	372	<b>2.62</b>
				8	3487	920	<b>3.79</b>
				9	10 771	1804	<b>5.97</b>
				10	33 262	4096	<b>8.12</b>
				11	125 622	9880	<b>12.71</b>
				12	473 935	21 288	<b>22.26</b>
				13	1 931 822	50 392	<b>38.34</b>
				14	7 672 227	115 072	<b>66.67</b>
				15	28 063 891	236 800	<b>118.51</b>
				16	98 573 820	483 984	<b>203.67</b>

Модель MAPKbis			
$n$	$N_{states}$	$N_{cuts}$	$K_{red}$
1	1	1	<b>1.00</b>
2	2	2	<b>1.00</b>
3	8	8	<b>1.00</b>
4	36	33	<b>1.09</b>
5	169	128	<b>1.32</b>
6	848	486	<b>1.74</b>
7	4572	1959	<b>2.33</b>
8	27 534	9072	<b>3.04</b>
9	190 360	47 995	<b>3.97</b>
10	1 489 035	271 746	<b>5.48</b>
11	12 775 006	1 562 320	<b>8.18</b>
12	116 033 541	8 882 586	<b>13.06</b>

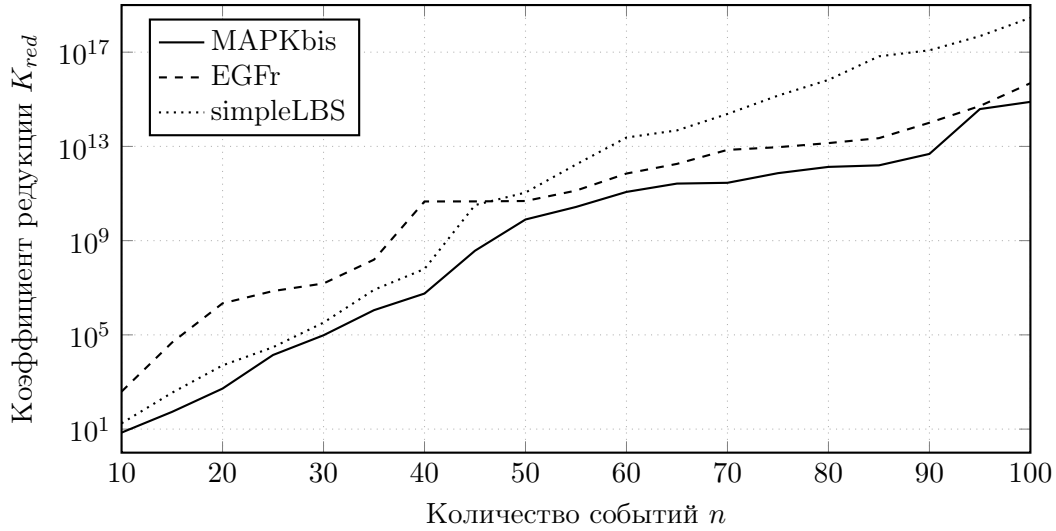


Рис. 4. Результаты эксперимента для  $n \leq 100$  (логарифмическая шкала)

Далее представлены результаты апробации алгоритма построения временных процессов, предложенного в доказательстве теоремы 2. Целью вычислительных экспериментов являлась количественная оценка редукции пространства состояний НВСП<sub>сл</sub> при переходе от анализа пробегов к анализу временных процессов. Объектами исследования послужили биологические модели сигнальных каскадов EGFr (Egfr-104-2-0), MAPK (MAPKbis-53-1-0) [17, 18], а также модель системы балансировки нагрузки simpleLBS (simple\_lbs-2) из репозитория Model Checking Contest [19]. Для трансформации исходных сетей Петри в НВСП<sub>сл</sub> каждому переходу был сопоставлен временной интервал, выбранный случайным образом из набора  $\{[0, 0], [0, 1], [1, 1]\}$ .

Разработанный экспериментальный инструмент был реализован на языке Python (исходный код доступен по адресу: <https://gitverse.ru/auzubarev/time-process.git>). Программа включает следующие модули:

- *parser.py*: считывание сети Петри из формата pnml и ее трансформация в НВСП<sub>сл</sub>;
- *interleaving.py*: реализация классической интерливинговой семантики;
- *process.py*: реализация предложенной причинно-следственной семантики;
- *view.py*: вспомогательный модуль визуализации НВСП<sub>сл</sub> и временных процессов.

Управляющая логика инструмента реализована в модуле *main.py*, где для каждого пробега итеративно строится соответствующий ему временной процесс. Для подсчета временных процессов проводится проверка на изоморфизм согласно представленным в работе теоремам. Эффективность редукции оценивалась коэффициентом:

$$K_{red} = \frac{N_{states}}{N_{cuts}},$$

где  $N_{states}$  — число анализируемых состояний, а  $N_{cuts}$  — число анализируемых сечений временных процессов НВСП<sub>сл</sub>.

Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере (Intel Core Ultra 5 228V 2.10 ГГц, 32 ГБ RAM). Результаты тестирования представлены в табл. 1, где  $n$  — число событий во временном процессе. При малых  $n$  число анализируемых состояний и сечений сопоставимо, однако с увеличением  $n$  наблюдается рост коэффициента редукции. Для оценки коэффициента редукции на большем количестве событий была проанализиро-

вана случайная выборка из 500 попарно неизоморфных временных процессов, каждый из которых включает до 100 событий. Зависимость на рис. 4 демонстрирует экспоненциальный рост коэффициента редукции при увеличении числа событий.

## Заключение

В статье определена причинно-следственная семантика для НВСП<sub>сл</sub>, основанная на модели временных процессов. Конструкция временного процесса состоит из временной причинно-следственной сети и гомоморфизма, отображающего ее элементы в соответствующие элементы НВСП<sub>сл</sub>. Корректность предложенной семантической модели подтверждается установлением взаимнооднозначного соответствия между линейаризациями временных процессов и пробегами НВСП<sub>сл</sub>. Анализ данных, полученных в ходе экспериментов с моделями MARK, EGFr и simpleLBS, подтверждает значительную редукцию пространства состояний НВСП<sub>сл</sub> и возможность использования предлагаемой причинно-следственной семантики в инструментах верификации сигнальных каскадов.

В качестве будущих исследований планируется определить различные поведенческие эквивалентности [20] и исследовать взаимосвязи между ними на базе предложенной модели временных процессов.

## Обозначения

НВСП	непрерывно-временная сеть Петри
НВСП <sub>сл</sub>	НВСП со слабой стратегией хода времени
ПСС	причинно-следственная сеть
ВПСС	временная причинно-следственная сеть
$Act$	множество действий
$\mathcal{N}$	сеть Петри
$P, T, F$	места, переходы и отношение инцидентности сети Петри
$M_0$	начальная разметка
$L$	помечающая функция НВСП
$\bullet x, x \bullet$	множества входных и выходных элементов
$M$	разметка
$En(M)$	множество всех переходов, допустимых в разметке $M$
$Interv$	множество временных интервалов с рациональными границами
$\mathcal{TN}$	непрерывно-временная сеть Петри
$D$	статическая временная функция
$S$	состояние НВСП
$I$	динамическая временная функция
$GT$	глобальный момент времени
$S \xrightarrow{(\theta, t)} S'$	срабатывание перехода $t$ после задержки $\theta$ в НВСП
$\sigma$	пробег
$RUN(\mathcal{TN}, S)$	множество всех пробегов из состояния $S$
$\mathcal{RS}(\mathcal{TN})$	множество всех достижимых состояний сети
$N$	причинно-следственная сеть

$B, E, G$	условия, события и отношение инцидентности ПСС
$l$	помечающая функция ПСС
$\prec, \preceq, \simeq$	отношения строгой и нестрогой причинной зависимости, параллелизма
$CUT(N)$	множество всех сечений ПСС $N$
$\bullet N, N\bullet$	начальное и конечное сечения ПСС $N$
$En(C)$	множество событий, допустимых в сечении $C$
$C \xrightarrow{e} C'$	изменение сечения в результате события $e$
$\downarrow C$	множество событий, предшествующих сечению $C$
$\varphi$	гомоморфизм
$TN$	временная причинно-следственная сеть
$\tau$	временная функция ВПСС
$\omega$	линеаризация
$\mathcal{LIN}(TN)$	множество всех линеаризаций ВПСС $TN$
$\pi$	временный процесс
$PRC(TN, S)$	множество всех временных процессов $TN$ относительно $S$

## Литература

1. Komenda J., Lefebvre D. On tick automata for distributed timed DESs with synchronisations and minimal time constraints // IFAC-PapersOnLine. 2023. Vol. 56, no. 2. P. 8635–8640. DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.039.
2. Boyer M., Roux O.H. Comparison of the expressiveness of arc, place and transition time Petri nets // 28th International Conference on Applications and Theory of Petri Nets, ICATPN 2007, Siedlce, Poland, June 25–29, 2007. Vol. 4546. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007. P. 63–82. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-540-73094-1\_7.
3. Komenda J., Lahaye S., Parrot R., Roux O.H. Weakly strong semantics of time Petri nets for performance evaluations // IFAC-PapersOnLine. 2024. Vol. 58, no. 1. P. 66–71. DOI: 10.1016/j.ifacol.2024.07.012.
4. Bérard B., Cassez F., Haddad S., *et al.* Comparison of the expressiveness of timed automata and time Petri nets // 3rd International Conference on Formal Modeling and Analysis of Timed Systems, FORMATS 2005, Uppsala, Sweden, September 26–28, 2005. Vol. 3829. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005. P. 211–225. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/11603009\_17.
5. Reynier P.A., Sangnier A. Weak time Petri nets strike back! // 20th International Conference on Concurrency Theory, CONCUR 2009, Bologna, Italy, September 1–4, 2009. Vol. 5710. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. P. 557–571. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-642-04081-8\_37.
6. Lime D., Parrot R., Roux O.H. Decidability problems for weak time Petri nets with read, reset and transfer arcs // 46th International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency, Petri Nets 2025, Paris, France, June 23–27, 2025. Vol. 15714. Cham: Springer, 2025. P. 289–308. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-031-94634-9\_16.

7. Leclercq L., Lime D., Roux O.H. A state class based controller synthesis approach for time Petri nets // 44th International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency, Petri Nets 2023, Lisbon, Portugal, June 25–30, 2023. Vol. 13929. Cham: Springer, 2023. P. 409–429. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-031-33620-1\_21.
8. Hadjidj R. An efficient approach for model-checking zeno behaviors in real-time system models based on the time Petri net formalism // IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. 2024. Vol. 21, no. 4. P. 6628–6642. DOI: 10.1109/TASE.2023.3328895.
9. Godary-Dejean K., Leroux H., Andreu D. Interpreted synchronous extension of time Petri nets // Discrete Event Dynamic Systems. 2022. Vol. 32. P. 27–64. DOI: 10.1007/s10626-021-00347-z.
10. Aura T., Lilius J. A causal semantics for time Petri nets // Theoretical Computer Science. 2000. Vol. 243. P. 409–447. DOI: 10.1016/S0304-3975(99)00114-0.
11. Zubarev A. State space reduction for time Petri nets with weak semantics // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Computer Science. 2019. No. 43. P. 39–52. DOI: 10.31144/bncc.cs.2542-1972.2019.n43.p39-52.
12. Heiner M., Gilbert D., Donaldson R. Petri nets for systems and synthetic biology // 8th International School on Formal Methods for the Design of Computer, Communication, and Software Systems, SFM 2008, Bertinoro, Italy, June 2–7, 2008. Vol. 5016. Berlin, Heidelberg: Springer, 2008. P. 215–264. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-540-68894-5\_7.
13. Szawulak B., Radom M., Formanowicz P. Comparison by partition—Finding Petri nets similarity on the basis of subnets // Computers in Biology and Medicine. 2025. Vol. 187. Art. 109775. DOI: 10.1016/j.compbimed.2025.109775.
14. Olszak J., Radom M., Formanowicz P. Some aspects of modeling and analysis of complex biological systems using time Petri nets // Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences. 2018. Vol. 66, no. 1. P. 67–78. DOI: 10.24425/119060.
15. Gilin V., Laauwen S., Xia Y., *et al.* Modeling HIF-ILK interaction using continuous Petri nets // 18th Biomedical Engineering Systems and Technologies, BIOSTEC 2025, Porto, Portugal, February 20–22, 2025, Proceedings of the 18th International Joint Conference. Setúbal: SCITEPRESS, 2025. P. 537–544. DOI: 10.5220/0013102600003911.
16. Gilbert D., Heiner M. From Petri Nets to Differential Equations — An Integrative Approach for Biochemical Network Analysis // 27th International Conference on Applications and Theory of Petri Nets and Other Models of Concurrency, ICATPN 2006, Turku, Finland, June 26–30, 2006. Vol. 4024. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. P. 200–219. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/11767589\_11.
17. Grieco L., Calzone L., Bernard-Pierrot I., *et al.* Integrative modelling of the influence of MAPK network on cancer cell fate decision // PLoS Computational Biology. 2013. Vol. 9, no. 10. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1003286.
18. Sahin O., Frohlich H., Lobke C., *et al.* Modeling ERBB receptor-regulated G1/S transition to find novel targets for de novo trastuzumab resistance // BMC Systems Biology. 2009. Vol. 3, no. 1. P. 1–20. DOI: 10.1186/1752-0509-3-1.

19. Kordon F., Hulin-Hubard F., Jezequel L., *et al.* Complete results for the 2025 edition of the Model Checking Contest. 2025. URL: <https://mcc.lip6.fr/2025/results.php> (дата обращения: 14.12.2025).
20. Virbitskaite I.B., Bushin D., Best E. True concurrent equivalences in time Petri nets // *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 149. P. 401–418. DOI: 10.3233/FI-2016-1454.

Зубарев Алексей Юрьевич, младший научный сотрудник, Институт систем информатики им. А.П. Ершова СО РАН (Новосибирск, Российская Федерация)

---

DOI: 10.14529/cmse260103

## A CAUSAL SEMANTICS FOR TIME PETRI NETS WITH WEAK TIME POLICY

© 2026 A.Y. Zubarev

*A.P. Ershov Institute of Informatics Systems, SB RAS*

*(pr. Acad. Lavrentjev 6, Novosibirsk 630090, Russia)*

*E-mail: auzubarev@gmail.com*

Received: 14.12.2025

Time Petri Nets (TPNs) are an extension of classical Petri Nets designed for modeling and analyzing concurrent and distributed systems with respect to real-time characteristics. In TPNs, transitions representing system events have local clocks and firing time intervals. Two time-elapsing policies are considered for this model: the strong policy, where the progress of time is blocked by the necessity of a transition firing, and the weak policy, which does not restrict the progress of model time. These policies are incomparable in expressive power, and many standard verification problems are decidable only for the weak policy. In the general case, the state space of TPNs is infinite and uncountable, which complicates the analysis of model behavior. To reduce the state space, causal semantics is applied, describing system behavior through a partial order relation on the set of events. This approach allows for abstraction from the redundant set of all possible event interleavings while preserving information about causal dependencies and concurrency between system events. The paper introduces a model of time processes that represents causal semantics for TPNs in the context of the weak time policy. The main result of the work is the establishment of a bijective correspondence between TPN runs (representing classical interleaving semantics) and linearizations of time processes, which proves the correctness of the proposed causal semantics. Computational experiments presented in the paper confirm a significant reduction in the analyzed state space of TPNs when using time processes.

*Keywords: time Petri net, weak time elapsing policy, time process, causal semantics.*

### FOR CITATION

Zubarev A.Y. A Causal Semantics for Time Petri Nets with Weak Time Policy. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2026. Vol. 15, no. 1. P. 57–79. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse260103.

*This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 License which permits non-commercial use, reproduction and distribution of the work without further permission provided the original work is properly cited.*

### References

1. Komenda J., Lefebvre D. On tick automata for distributed timed DESs with synchronisations and minimal time constraints. *IFAC-PapersOnLine*. 2023. Vol. 56, no. 2. P. 8635–8640.

DOI: 10.1016/j.ifacol.2023.10.039.

2. Boyer M., Roux O.H. Comparison of the expressiveness of arc, place and transition time Petri nets. 28th International Conference on Applications and Theory of Petri Nets, ICATPN 2007, Siedlce, Poland, June 25–29, 2007. Vol. 4546. Berlin, Heidelberg, Springer, 2007. P. 63–82. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-540-73094-1\_7.
3. Komenda J., Lahaye S., Parrot R., Roux O.H. Weakly strong semantics of time Petri nets for performance evaluations. IFAC-PapersOnLine. 2024. Vol. 58, no. 1. P. 66–71. DOI: 10.1016/j.ifacol.2024.07.012.
4. Bérard B., Cassez F., Haddad S., *et al.* Comparison of the expressiveness of timed automata and time Petri nets. 3rd International Conference on Formal Modeling and Analysis of Timed Systems, FORMATS 2005, Uppsala, Sweden, September 26–28, 2005. Vol. 3829. Berlin, Heidelberg, Springer, 2005. P. 211–225. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/11603009\_17.
5. Reynier P.A., Sangnier A. Weak time Petri nets strike back! 20th International Conference on Concurrency Theory, CONCUR 2009, Bologna, Italy, September 1–4, 2009. Vol. 5710. Berlin, Heidelberg, Springer, 2009. P. 557–571. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-642-04081-8\_37.
6. Lime D., Parrot R., Roux O.H. Decidability problems for weak time Petri nets with read, reset and transfer arcs. 46th International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency, Petri Nets 2025, Paris, France, June 23–27, 2025. Vol. 15714. Cham, Springer, 2025. P. 289–308. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-031-94634-9\_16.
7. Leclercq L., Lime D., Roux O.H. A state class based controller synthesis approach for time Petri nets. 44th International Conference on Application and Theory of Petri Nets and Concurrency, Petri Nets 2023, Lisbon, Portugal, June 25–30, 2023. Vol. 13929. Cham, Springer, 2023. P. 409–429. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-031-33620-1\_21.
8. Hadjidj R. An efficient approach for model-checking zeno behaviors in real-time system models based on the time Petri net formalism. IEEE Transactions on Automation Science and Engineering. 2024. Vol. 21, no. 4. P. 6628–6642. DOI: 10.1109/TASE.2023.3328895.
9. Godary-Dejean K., Leroux H., Andreu D. Interpreted synchronous extension of time Petri nets. Discrete Event Dynamic Systems. 2022. Vol. 32. P. 27–64. DOI: 10.1007/s10626-021-00347-z.
10. Aura T., Lilius J. A causal semantics for time Petri nets. Theoretical Computer Science. 2000. Vol. 243. P. 409–447. DOI: 10.1016/S0304-3975(99)00114-0.
11. Zubarev A. State space reduction for time Petri nets with weak semantics. Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Computer Science. 2019. No. 43. P. 39–52. DOI: 10.31144/bncc.cs.2542-1972.2019.n43.p39-52.
12. Heiner M., Gilbert D., Donaldson R. Petri nets for systems and synthetic biology. 8th International School on Formal Methods for the Design of Computer, Communication, and Software Systems, SFM 2008, Bertinoro, Italy, June 2–7, 2008. Vol. 5016. Berlin, Heidelberg, Springer, 2008. P. 215–264. Lecture Notes in Computer Science. DOI: 10.1007/978-3-540-68894-5\_7.

13. Szawulak B., Radom M., Formanowicz P. Comparison by partition—Finding Petri nets similarity on the basis of subnets. *Computers in Biology and Medicine*. 2025. Vol. 187. Art. 109775. DOI: 10.1016/j.combiomed.2025.109775.
14. Olszak J., Radom M., Formanowicz P. Some aspects of modeling and analysis of complex biological systems using time Petri nets. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Sciences*. 2018. Vol. 66, no. 1. P. 67–78. DOI: 10.24425/119060.
15. Gilin V., Laauwen S., Xia Y., *et al.* Modeling HIF-ILK interaction using continuous Petri nets. 18th Biomedical Engineering Systems and Technologies, BIOSTEC 2025, Porto, Portugal, February 20–22, 2025, Proceedings of the 18th International Joint Conference. Setúbal, SCITEPRESS, 2025. P. 537–544. DOI: 10.5220/0013102600003911.
16. Gilbert D., Heiner M. From Petri Nets to Differential Equations — An Integrative Approach for Biochemical Network Analysis. 27th International Conference on Applications and Theory of Petri Nets and Other Models of Concurrency, ICATPN 2006, Turku, Finland, June 26–30, 2006. Vol. 4024. Berlin, Heidelberg, Springer, 2006. P. 200–219. *Lecture Notes in Computer Science*. DOI: 10.1007/11767589\_11.
17. Grieco L., Calzone L., Bernard-Pierrot I., *et al.* Integrative modelling of the influence of MAPK network on cancer cell fate decision. *PLoS Computational Biology*. 2013. Vol. 9, no. 10. DOI: 10.1371/journal.pcbi.1003286.
18. Sahin O., Frohlich H., Lobke C., *et al.* Modeling ERBB receptor-regulated G1/S transition to find novel targets for de novo trastuzumab resistance. *BMC Systems Biology*. 2009. Vol. 3, no. 1. P. 1–20. DOI: 10.1186/1752-0509-3-1.
19. Kordon F., Hulin-Hubard F., Jezequel L., *et al.* Complete results for the 2025 edition of the Model Checking Contest. 2025. URL: <https://mcc.lip6.fr/2025/results.php> (accessed: 14.12.2025).
20. Virbitskaite I.B., Bushin D., Best E. True concurrent equivalences in time Petri nets. *Fundamenta Informaticae*. 2016. Vol. 149. P. 401–418. DOI: 10.3233/FI-2016-1454.