УДК 004.021, 519.116 DOI: 10.14529/cmse260105

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КЛАССАМИ РАЗБИЕНИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ЧИСЛО ЧАСТЕЙ

© 2026 А.А. Самойлов

Южно-Уральский государственный университет
(454080 Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, д. 76)
E-mail: samoilovaa@susu.ru

Поступила в редакцию: 27.01.2026

Работа посвящена исследованию связей между классами разбиений натурального числа n с ограничениями на число частей. Основное внимание уделяется разбиениям на ровно k попарно различных нечетных слагаемых. Для установления связи данного класса разбиений с классом разбиений с ограничением на величину частей в работе применяется операция сопряжения диаграмм Юнга. Это позволяет построить явную биекцию и доказать, что количество таких разбиений $r(n,k)$ в точности совпадает с $P((n-k^2)/2,k)$ для числа $n \equiv k \pmod 2$ и $n \geq k^2$, части которых не превосходят k. На основе полученного соотношения, проводится сравнение асимптотик функций разбиений $r(n,k)$, $p(n,k)$ — количество разбиений числа n на ровно k частей, и $q(n,k)$ — количество разбиений числа n на k различных частей. При $k = O(n^{1/3})$ доказано, что отношения $q(n,k)/r(n,k)$ и $p(n,k)/r(n,k)$ асимптотически стремятся к 2^{k-1} при $n \to \infty$. Для численной верификации полученных теорем реализованы два алгоритма на основе динамического программирования. Первый алгоритм основан на рекуррентном соотношении для подсчета разбиений на различные нечетные части $r(n,k)$, второй — на доказанной биекции и рекуррентной формуле для числа разбиений $P(m,k)$, части которых не превосходят k. Вычислительные эксперименты показывают, что алгоритм, использующий установленную биекцию, обеспечивает существенный выигрыш в производительности при увеличении n. Разработанные алгоритмы также применены для проверки гипотезы Каргаполова о рангах группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы A_n, связанных с разбиениями на различные нечетные части при дополнительных ограничениях. Вычисления, проведенные до $n = 100000$, подтверждают асимптотическое поведения величин с относительной погрешностью менее 0.1%.

Ключевые слова: разбиения натуральных чисел, разбиение на различные нечетные части, комбинаторная биекция, асимптотический анализ, динамическое программирование.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Самойлов А.А. Соотношения между классами разбиений с ограничением на число частей // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2026. Т. 15, № 1. С. 96–109. DOI: 10.14529/cmse260105.

Введение

Нахождение количества разбиений натурального числа n — классическая задача комбинаторики и теории чисел. Разбиения находят практическое применение не только в этих областях, но и служат фундаментальным инструментом, в частности, при описании неприводимых представлений симметрических и знакопеременных групп, а также в алгебраической комбинаторике при изучении симметрических функций [1, 2].

Центральной задачей теории разбиений, имеющей фундаментальное значение как для чистой комбинаторики, так и для приложений, является перечислительная проблема: для заданного класса разбиений найти количество всех разбиений числа n, удовлетворяющих определенным условиям. Наиболее изученным объектом является функция разбиения $p(n)$. Она определяется как количество всех разбиений натурального числа n (т.е. представлений n в виде суммы положительных целых чисел, где порядок слагаемых не учитывается).

В данной работе исследуются разбиения натуральных чисел на ровно k попарно различных нечетных слагаемых. Этот класс разбиений лежит на пересечении двух классических классов — разбиений на различные части и разбиений на нечетные части, которые связаны тождеством Эйлера $p_{\text{distinct}}(n) = p_{\text{odd}}(n)$, и характеризуется рядом свойств. Наиболее известным из них является комбинаторное тождество, устанавливающее, что количество разбиений числа n на различные нечетные части (без ограничений на их число k) равно количеству самосопряженных разбиений числа n.

Практическая значимость разбиений на различные нечетные части подтверждается их приложениями в теории представлений симметрической группы через подсчет крюков в самосопряженных разбиениях [3, 4], в аналитической теории чисел при выводе формул для чисел Гурвица и модулярных форм [5], а также в рамках единого подхода, основанного на связи двухстрочных матриц и решетчатых путей [6]. Таким образом, рассматриваемый объект служит связующим звеном между комбинаторикой, теорией чисел и теорией представлений.

Ранее автор исследовал вычислительные аспекты, связанные с задачей вычисления ранга группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы A_n, требующей значительных вычислительных ресурсов. В работе [7] был предложен параллельный алгоритм в общей памяти с использованием вложенного параллелизма, что позволило ускорить расчеты для небольших значений n. В настоящей статье на основе разработанных здесь алгоритмов динамического программирования мы проверяем гипотезы, сформулированные в [8], для существенно больших значений n, что ранее было недоступно из-за вычислительной сложности.

Статья организована следующим образом. Раздел 1 содержит формальные определения и обозначения. Формулировки и доказательства основных результатов приведены в разделах 2 и 3. Раздел 4 описывает алгоритмы подсчета на основе динамического программирования. В разделе 5 приведены результаты вычислительных экспериментов и верификации полученных теорем. Раздел 6 содержит проверку гипотез о рангах. Заключение посвящено сводке результатов.

1. Формальные определения и обозначения

Разбиение натурального числа n — представление n в виде суммы невозрастающей последовательности натуральных чисел, то есть:

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k, \quad a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 1.$$

Числа a_i называются *частями*, k — *длиной* разбиения. Следует отметить, что часто рассматриваются неупорядоченные разбиения. Тогда считается, что разбиения равны или эквивалентны, если упорядоченные наборы их частей совпадают с точностью до перестановки.

Различное нечетное разбиение числа n — разбиение с попарно различными нечетными частями:

$$n = (2m_1 - 1) + (2m_2 - 1) + \cdots + (2m_k - 1), \quad m_1 > m_2 > \cdots > m_k \geq 1.$$

Так как для любого (необязательно различного) разбиения $n = 2(m_1 + m_2 + \cdots + m_k) - k$ или, что эквивалентно, $n + k = 2(m_1 + m_2 + \cdots + m_k)$, то n и k одинаковой четности, то есть $n \equiv k \pmod 2$. Это будет часто использоваться в дальнейшем.

Введем обозначения для некоторых функций разбиений чисел.

1. $r(n,k)$ — количество различных нечетных разбиений n длины k, здесь $n \equiv k \pmod 2$.
2. $p_{\text{odd}}(n,k)$ — количество разбиений n на ровно k нечетных слагаемых (с возможными повторениями), снова $n \equiv k \pmod 2$.
3. $q(n,k)$ — количество разбиений n на ровно k различных частей.
4. $p(n,k)$ — количество разбиений n на ровно k частей (с возможными повторениями).
5. $P(n,k)$ — количество разбиений n с частями, не превышающими k:

$$n = a_1 + \dots + a_m, \quad k \geq a_1 \geq \dots \geq a_m \geq 1.$$

Между этими функциями справедливы следующие комбинаторные тождества:

$$p(n,k) = P(n-k,k), \tag{1}$$

$$q(n,k) = P\left(n - \binom{k+1}{2}, k\right). \tag{2}$$

Эти соотношения отражают известные биекции между классами разбиений и позволяют сводить одни задачи к другим. Например, их использовал Секереш в своей работе [9].

Важно отметить, что известное тождество Эйлера $p_{\text{distinct}}(n) = p_{\text{odd}}(n)$, верное для общего числа разбиений без учета длины k, не выполняется для функций с фиксированным числом частей: $q(n,k) \neq p_{\text{odd}}(n,k)$. Однако суммирование по всем допустимым длинам k восстанавливает тождество:

$$\sum_{k=1}^{n} q(n,k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ n \equiv k \pmod 2}} p_{\text{odd}}(n,k).$$

Наконец, для $k = O(n^{1/3})$ справедлива следующая асимптотическая оценка [10]:

$$P(n,k) = \frac{1}{k!}\binom{n-1}{k-1} \exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right). \tag{3}$$

Рассмотрим известные подходы к нахождению количества разбиений на различные нечетные части. Первым из них является аналитический метод. Для оценки числа таких разбиений для больших n применяется следующая асимптотическая формула [8] при $n \to \infty$:

$$r(n) \sim \frac{1}{2 \cdot (24n^3)^{1/4}} \exp\left(R\sqrt{n}\right), \quad \text{где } R = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Данное соотношение дает приближенное значение и не является точным.

Вторым подходом является рекурсивный алгоритм, основанный на следующих двух операциях над разбиениями на различные нечетные части:

1. Добавление 2 к каждой части разбиения.
2. Добавление 2 к каждой части разбиения и введение нового дополнительного слагаемого.

Рассматривая обратные операции (удаление точек вместо добавления), получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$r(n,k) = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 1, k = 1, \\ 0, & \text{при } n < k, \\ r(n-2k,k) + r(n-(2k-1),k-1), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{4}$$

Алгоритм 1. NrRecDistinctOdd (in n, k; out result)

if $n < k$ **или** $n < 1$ **или** $k < 1$ **then**
    return 0
end if
if $n = 1$ **и** $k = 1$ **then**
    return 1
end if
return NrRecDistinctOdd$(n - 2k, k)$ + NrRecDistinctOdd$(n - (2k - 1), k - 1)$

Алгоритм 1 является простым способом для вычисления количества разбиений на различные нечетные части. Тогда число таких разбиений можно получить путем суммирования по всем допустимым k:

$$r(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ n \equiv k \pmod 2}}^{n} \textsc{NrRecDistinctOdd}(n, k).$$

2. Биекция между нечетными и ограниченными разбиениями

Теорема 1. Пусть n и k — натуральные числа, такие, что $n \equiv k \pmod 2$ и $n \geq k^2$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$r(n, k) = P\left(\frac{n - k^2}{2}, k\right). \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное различное нечетное разбиение числа n на k частей. Поскольку все части нечетны и попарно различны, его можно записать в виде:

$$n = (2m_1 - 1) + (2m_2 - 1) + \cdots + (2m_k - 1),$$

где $m_1 > m_2 > \cdots > m_k \geq 1$ — строго убывающая последовательность натуральных чисел.

Упростим выражение:

$$n = 2\sum_{i=1}^{k} m_i - k \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} m_i = \frac{n + k}{2}. \tag{6}$$

При $n = k^2$ существует единственное минимальное различное нечетное разбиение числа n длины k, достигаемое при значениях:

$$m_i^{\min} = k - i + 1, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Сумма $m_i^{\min}$ в этом минимальном случае равна:

$$\sum_{i=1}^{k} m_i^{\min} = \sum_{i=1}^{k} (k - i + 1) = \sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}. \tag{7}$$

Обозначим разницу между текущей (6) и минимальной (7) суммой как:

$$S = \frac{n + k}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n - k^2}{2}.$$

Число S характеризует «избыток» значений m_i по сравнению с минимальным возможным набором. Теперь представим значения m_i в виде:

$$m_i = m_i^{\min} + a_i,$$

где $a_i \geq 0$ — целые числа, которые описывают «отклонение» от минимального случая и их сумма $S = a_1 + a_2 + \cdots + a_k = (n - k^2)/2$.

Кроме того,

$$\begin{aligned}
&m_i = k - i + 1 + a_i,\\
&m_{i-1} = k - (i-1) + 1 + a_{i-1} = k - i + 2 + a_{i-1},\\
&m_{i-1} - m_i = 1 + a_{i-1} - a_i \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad a_{i-1} - a_i \geq 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, набор $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, где $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_k \geq 0$, задает разбиение числа S на не более чем k частей. В силу сопряжения диаграмм Юнга, количество таких разбиений равно количеству разбиений числа S на части, не превосходящие k. Следовательно, $r(n,k) = P(S,k)$, причем $S = (n-k^2)/2$ является неотрицательным целым числом, то есть $n \geq k^2$ и $n \equiv k \pmod 2$. □

3. Асимптотическое сравнение классов разбиений

Теорема 2. Пусть n и k — натуральные числа, такие, что $n \equiv k \pmod 2$, $n \geq k^2$ и $k = O(n^{1/3})$. Тогда при $n \to \infty$ справедливы следующие асимптотические соотношения:

$$\frac{q(n,k)}{r(n,k)} = 2^{k-1} \exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right) \quad \text{и} \quad \frac{p(n,k)}{r(n,k)} = 2^{k-1} \exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right).$$

Доказательство. Условие $k = O(n^{1/3})$ соответствует области применимости асимптотики (3) для числа ограниченных разбиений $P(n,k)$. Подставляя данную асимптотику с учетом биекций (1), (2), (5) и условий $n \equiv k \pmod 2$, $n \geq k^2$ в выражения для $q(n,k)$ и $r(n,k)$, получаем:

$$\begin{aligned}
q(n,k) &= \frac{1}{k!}\binom{t-1}{k-1} \exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right),\\
r(n,k) &= \frac{1}{k!}\binom{s-1}{k-1} \exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right),
\end{aligned}$$

где

$$t = n - \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{и} \quad s = \frac{n-k^2}{2}.$$

Отношение $q(n,k)/r(n,k)$ принимает вид:

$$\begin{aligned}
\frac{q(n,k)}{r(n,k)} &= \frac{(t-1)!}{(k-1)!(t-k)!} \cdot \frac{(k-1)!(s-k)!}{(s-1)!} \exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right)\\
&= \frac{(t-1)!(s-k)!}{(t-k)!(s-1)!} \exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Тогда при $n \to \infty$ и $k = O(n^{1/3})$:

$$\begin{aligned}
t &= n - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} = n + O(n^{2/3}),\\
s &= \frac{n}{2} - \frac{k^2}{2} = \frac{n}{2} + O(n^{2/3}),\\
t - k &= n - \frac{k^2}{2} - \frac{k}{2} - k = n + O(n^{2/3}),\\
s - k &= \frac{n}{2} - \frac{k^2}{2} - k = \frac{n}{2} + O(n^{2/3}).
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой Стирлинга:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \exp\left(\frac{1}{12n + \theta_n}\right),$$

где $0 < \theta_n < 1$.

Тогда

$$\frac{(t-1)!}{(t-k)!} = \frac{\sqrt{2\pi(t-1)}\left(\frac{t-1}{e}\right)^{t-1}\exp\left(\frac{1}{12(t-1)+\theta_{t-1}}\right)}{\sqrt{2\pi(t-k)}\left(\frac{t-k}{e}\right)^{t-k}\exp\left(\frac{1}{12(t-k)+\theta_{t-k}}\right)} = \sqrt{\frac{t-1}{t-k}} \cdot \frac{(t-1)^{t-1}}{(t-k)^{t-k}} \cdot e^{1-k} \cdot \exp(\Delta_t),$$

где при $n \to \infty$ и $k = O(n^{1/3})$:

$$\begin{aligned}
\Delta_t &= \frac{1}{12(t-1)+\theta_{t-1}} - \frac{1}{12(t-k)+\theta_{t-k}} = \frac{12(1-k) + (\theta_{t-k} - \theta_{t-1})}{(12(t-1)+\theta_{t-1})(12(t-k)+\theta_{t-k})}\\
&= \frac{O(k)}{144n^2 + O(n^{5/3})} = \frac{O(k)}{O(n^2)} = O\left(\frac{k}{n^2}\right) = O(n^{-5/3}).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\frac{(s-k)!}{(s-1)!} = \frac{\sqrt{2\pi(s-k)}\left(\frac{s-k}{e}\right)^{s-k}\exp\left(\frac{1}{12(s-k)+\theta_{s-k}}\right)}{\sqrt{2\pi(s-1)}\left(\frac{s-1}{e}\right)^{s-1}\exp\left(\frac{1}{12(s-1)+\theta_{s-1}}\right)} = \sqrt{\frac{s-k}{s-1}} \cdot \frac{(s-k)^{s-k}}{(s-1)^{s-1}} \cdot e^{k-1} \cdot \exp(\Delta_s),$$

где при $n \to \infty$ и $k = O(n^{1/3})$:

$$\Delta_s = \frac{1}{12(s-k)+\theta_{s-k}} - \frac{1}{12(s-1)+\theta_{s-1}} = O(n^{-5/3}).$$

Далее рассмотрим выражение под знаком корня при $n \to \infty$ и $k = O(n^{1/3})$:

$$\begin{aligned}
\frac{t-1}{t-k} \cdot \frac{s-k}{s-1} &= \frac{n + O(n^{2/3})}{n + O(n^{2/3})} \cdot \frac{\frac{n}{2} + O(n^{2/3})}{\frac{n}{2} + O(n^{2/3})} = \left(1 + O(n^{-1/3})\right) \cdot \left(1 + O(n^{-1/3})\right)\\
&= 1 + O(n^{-1/3}) = \exp\left(\ln[1 + O(n^{-1/3})]\right) = \exp\left(O(n^{-1/3})\right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим:

$$A = \frac{(t-1)^{t-1}}{(t-k)^{t-k}}.$$

Логарифмируем:

$$\ln A = (t-1)\ln(t-1) - (t-k)\ln(t-k).$$

Далее $\ln(t-1) > \ln(t-k)$ при $n \to \infty$ и $k = O(n^{1/3})$, тогда:

$$\ln(t-1) - \ln(t-k) = \ln\left(\frac{t-1}{t-k}\right) = \ln\Big(1 + O(n^{-1/3})\Big) = O(n^{-1/3}).$$

Получаем оценку сверху:

$$\ln A < (t-1)\ln(t-1) - (t-k)\ln(t-1) = (k-1)\ln(t-1).$$

Получаем оценку снизу:

$$\ln A > (t-1)\ln(t-k) - (t-k)\ln(t-k) = (k-1)\ln(t-k).$$

Объединяя две оценки, имеем:

$$(k-1)\ln(t-1) > \ln A > (k-1)\ln(t-k).$$

Разность границ равна при $n \to \infty$ и $k = O(n^{1/3})$ равна:

$$(k-1)[\ln(t-1) - \ln(t-k)] = (k-1) \cdot O(n^{-1/3}) = O(1).$$

Следовательно,

$$\ln A = (k-1)\ln(t-1) + O(1),$$

что дает при $n \to \infty$ и $k = O(n^{1/3})$:

$$A = e^{\ln A} = e^{(k-1)\ln(t-1) + O(1)} = (t-1)^{k-1}\exp\left(O(1)\right).$$

Аналогично для:

$$B = \frac{(s-1)^{s-1}}{(s-k)^{s-k}},$$

при $n \to \infty$ и $k = O(n^{1/3})$:

$$B = e^{\ln B} = e^{(k-1)\ln(s-1) + O(1)} = (s-1)^{k-1}\exp\left(O(1)\right).$$

Все полученные промежуточные результаты подставляем в (8):

$$\begin{aligned}\frac{q(n,k)}{r(n,k)} &= \exp\Big(O(n^{-1/3})\Big) \cdot \frac{(t-1)^{k-1}\exp\left(O(1)\right)}{(s-1)^{k-1}\exp\left(O(1)\right)} \cdot \exp(\Delta_t) \cdot \exp(\Delta_s) \cdot \exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right)\\ &= \left(\frac{t-1}{s-1}\right)^{k-1}\exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right).\end{aligned}$$

Рассмотрим дробь:

$$\begin{aligned}\left(\frac{t-1}{s-1}\right)^{k-1} &= \left(\frac{n + O(n^{2/3})}{\frac{n}{2} + O(n^{2/3})}\right)^{k-1} = \left(2 \cdot \frac{1 + O(n^{-1/3})}{1 + O(n^{-1/3})}\right)^{k-1} = \Big(2 \cdot \Big(1 + O(n^{-1/3})\Big)\Big)^{k-1}\\ &= 2^{k-1}\Big(1 + O(n^{-1/3})\Big)^{k-1} = 2^{k-1}\exp\Big((k-1)\ln(1 + O(n^{-1/3}))\Big)\\ &= 2^{k-1}\exp\Big(O(k \cdot n^{-1/3})\Big) = 2^{k-1}\exp(O(1)).\end{aligned}$$

Тогда:

$$\frac{q(n,k)}{r(n,k)} = 2^{k-1} \exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right).$$

Аналогичные рассуждения можно привести для $p(n,k)/r(n,k)$. Используя обозначения $t = n - k$ и $s = \frac{n-k^2}{2}$, получаем при $n \to \infty$ и $k = O(n^{1/3})$, что:

$$\frac{p(n,k)}{r(n,k)} = 2^{k-1} \exp\left(O\left(\frac{k^3}{n}\right)\right).$$

□

4. Алгоритмы подсчета различных нечетных разбиений

Рассмотрим два алгоритма вычисления числа разбиений на различные нечетные части. Наивный из них, алг. 1, представляет собой прямой рекурсивный вызов. Очевидно, что такой подход неэффективен и приводит к экспоненциальному времени работы, что делает его неприменимым для больших n из-за переполнения стека вызовов.

Алгоритм 2. NrDistinctOddParts (in n, k; out result)

```
Инициализировать матрицу P[1..n][1..k] нулями
P[1][1] ← 1
for i ← 1 to n do
    for j ← 1 to min(k, i) do
        if i > 2j then
            P[i][j] ← P[i][j] + P[i − 2j][j]
        end if
        if i > 2j − 1 и j > 1 then
            P[i][j] ← P[i][j] + P[i − (2j − 1)][j − 1]
        end if
    end for
end for
return P[n][k]
```

Алгоритм 2 вычисляет количество разбиений $r(n,k)$ на различные нечетные части, реализуя формулу (4) методом динамического программирования. Промежуточные результаты сохраняются в матрице P, благодаря чему временная и пространственная сложность составляют $O(n \cdot k)$. Количество всех разбиений числа n на различные нечетные части получается суммированием по всем допустимым k, для которых выполнены условия $n \equiv k \pmod 2$ и (согласно теореме 1) $n \geq k^2$:

$$r(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ n \equiv k \pmod 2}}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \textsc{NrDistinctOddParts}(n,k). \tag{9}$$

Второй алгоритм основан на доказанной биекции (5). Для вычисления $P(n,k)$ воспользуемся рекуррентной формулой:

$$P(n,k)=\begin{cases}1, & \text{при } n=0, k\geq 0,\\ 0, & \text{при } n>0, k=0,\\ P(n,n), & \text{при } k>n,\\ P(n,k-1)+P(n-k,k), & \text{при } 1\leq k\leq n.\end{cases}$$

Алгоритм 3. NrRestrictParts (in n, k; out result)

Инициализировать массив $P[1..n+1]$ нулями
$P[1] \leftarrow 1$
for $m \leftarrow 1$ **to** k **do**
    for $i \leftarrow m+1$ **to** $n+1$ **do**
        $P[i] \leftarrow P[i] + P[i-m]$
    end for
end for
return $P[n+1]$

Алгоритм 3 вычисляет $P(n,k)$ за время $O(n\cdot k)$ и использует $O(n)$ памяти. Следовательно, общее количество разбиений числа n на различные нечетные части можно получить суммированием по всем допустимым k:

$$r(n)=\sum_{\substack{k=1\\ n\equiv k \pmod 2}}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \text{NrRestrictParts}\left(\frac{n-k^2}{2},k\right). \tag{10}$$

5. Вычислительные эксперименты

Описанные в разделе 4 алгоритмы были реализованы на языке программирования Python. Для оценки производительности проведено сравнение двух методов вычисления количества разбиений натурального числа n на различные нечетные части, основанных на формулах (9) и (10) соответственно. Вычисления проводились на компьютере с процессором Intel Core i7-13700K (3.40 ГГц) и 32 ГБ ОЗУ (частота 4000 МГц) под управлением Windows 10 x64. Временные замеры выполнены с использованием встроенного модуля `timeit` при числе повторений 10. Результаты (среднее время исполнения в секундах) представлены в табл. 1. Корректность реализации проверена совпадением результатов с известными последовательностями из базы данных OEIS [11]. Исходные коды свободно доступны в репозитории GitHub [12].

Анализ данных показывает, что второй алгоритм демонстрирует существенно более высокую производительность, особенно с ростом n. При этом оба алгоритма дают идентичные результаты, что подтверждает их корректность. Таким образом, для практических вычислений количества разбиений на различные нечетные части целесообразно использовать подход, основанный на доказанной биекции (5), который обеспечивает значительный выигрыш в скорости.

Численная верификация асимптотики теоремы 2 представлена в табл. 2. Видно, что с ростом n отношение $q(n,k)/r(n,k)$ стремится к 2^{k-1}, а для малых k совпадение почти

Таблица 1. Время выполнения, с.

n	Алг. 2	Алг. 3	$r(n)$
100	< 0.001	< 0.001	2.6×10^3
200	0.002	< 0.001	3.1×10^5
500	0.010	0.001	6.0×10^9
1000	0.037	0.003	5.2×10^{14}
3333	0.439	0.037	7.4×10^{28}
5000	0.993	0.086	9.2×10^{35}
7777	2.402	0.216	3.6×10^{45}
9999	4.065	0.363	1.1×10^{52}
15000	9.258	0.833	2.8×10^{64}
25000	26.469	2.381	1.3×10^{84}
49999	110.745	9.699	2.4×10^{120}

полное уже при небольших n. Заметное влияние $O(k^3/n)$ проявляется при $k \sim n^{1/3}$, но общая тенденция сохраняется, что подтверждает справедливость теоремы.

Таблица 2. Численные значения отношения $q(n,k)/r(n,k)$

$n = 5000$		$n = 20000$		$n = 11111$		$n = 33333$	
k	ratio	k	ratio	k	ratio	k	ratio
2	1.9992	2	1.9998	1	1	1	1
4	8.0048	4	8.0012	3	4	3	3.9999
6	32.1449	6	32.0360	5	16.0144	5	16.004
8	129.8186	8	128.4496	7	64.2430	7	64.0807
10	528.5810	10	516.0597	9	258.5113	9	256.8319
12	2175.5090	12	2078.7677	11	1044.6084	11	1030.7951

6. Проверка гипотез о рангах

Как отмечалось ранее, разбиения на различные нечетные части естественно возникают при вычислении ранга группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы A_n. Для решения данной задачи рассматриваются разбиения $\lambda = (a_1, \ldots, a_k)$ натурального числа n, удовлетворяющие следующему набору условий [13]:

1. a_i нечетно при $1 \leq i \leq k$.
2. $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$.
3. $n \equiv k \pmod 4$.
4. $\prod_{i=1}^{k} a_i$ *не является квадратом* натурального числа.

Число разбиений, удовлетворяющих первым двум условиям, обозначается $r(n)$ — разбиения на различные нечетные части. Количество разбиений, удовлетворяющих первым трем условиям, обозначается $r_4(n)$. Наконец, число разбиений, для которых выполнены все четыре условия, есть $\mathrm{rank}(n)$.

В работе [8] была выдвинута гипотеза о поведении этих величин, а в [7] предпринята попытка ее численной проверки для небольших значений n. Полученные в предыдущих разделах алгоритмы позволяют распространить анализ на значительно большие n. Гипотеза Каргаполова при $n \to \infty$ утверждает, что:

$$\operatorname{rank}(n) \sim r_4(n) \sim \frac{r(n)}{2}.$$

Для количественной оценки введем относительную погрешность:

$$\delta(n) = \frac{|r(n)/2 - r_4(n)|}{r_4(n)},$$

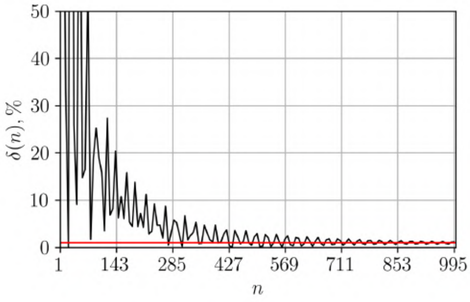
где $r_4(n)$ — точное число разбиений, вычисляемое по формуле:

$$r_4(n) = \sum_{\substack{k=1 \\ n \equiv k \pmod 4}}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \textsc{NrRestrictParts}\left(\frac{n-k^2}{2}, k\right).$$

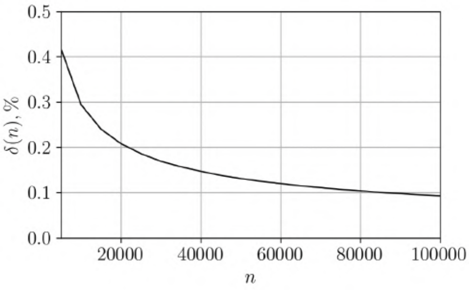
Результаты расчетов сведены в табл. 3. При малых n относительная погрешность $\delta(n)$ испытывает заметные колебания, однако с ростом n они быстро сглаживаются. Начиная с $n = 1000$ относительная погрешность монотонно убывает и при $n \geq 90000$ становится менее 0.1%. На рис. 1 показана динамика $\delta(n)$ в двух масштабах. Красной горизонтальной линией отмечен уровень 1%. Таким образом, во всем исследованном диапазоне гипотеза Каргаполова подтверждается.

Таблица 3. Значения $r_4(n)$ и относительной погрешности $\delta(n)$ при различных n

n	$r_4(n)$	$\delta(n), \%$	n	$r_4(n)$	$\delta(n), \%$
100	1.01×10^3	31.349	10 000	5.65×10^{51}	0.294
200	1.72×10^5	7.327	20 000	3.97×10^{74}	0.208
300	6.52×10^6	6.530	30 000	1.48×10^{92}	0.169
400	1.73×10^8	0.939	40 000	1.00×10^{107}	0.147
500	3.04×10^9	0.088	50 000	1.20×10^{120}	0.131
600	4.01×10^{10}	2.123	60 000	8.06×10^{131}	0.120
700	4.46×10^{11}	1.533	70 000	6.14×10^{142}	0.111
800	4.24×10^{12}	0.627	80 000	8.31×10^{152}	0.104
900	3.50×10^{13}	0.772	90 000	2.74×10^{162}	0.098
1000	2.58×10^{14}	1.105	100 000	2.77×10^{171}	0.093



а) в диапазоне $n \in [1, 1000]$



б) в диапазоне $n \in [5000, 100000]$

Рис. 1. Относительная погрешность гипотезы

Заключение

В работе исследованы разбиения натурального числа n на ровно k попарно различных нечетных слагаемых. Установлено, что количество $r(n,k)$ таких разбиений выражается через классическую функцию разбиений $P((n-k^2)/2,k)$ с ограничением на части, не превосходящие k, что позволяет сводить задачи о различных нечетных разбиениях к хорошо изученному объекту. При $k = O(n^{1/3})$ доказано, что отношения $q(n,k)/r(n,k)$ и $p(n,k)/r(n,k)$ асимптотически стремятся к 2^{k-1} при $n \to \infty$.

На основе полученных результатов предложены два алгоритма динамического программирования для вычисления $r(n,k)$ с временной сложностью $O(n \cdot k)$. Первый алгоритм основан на рекуррентном соотношении различных нечетных разбиений. Второй алгоритм, использующий биекцию с функцией $P(n,k)$, обладает оптимизированной пространственной сложностью $O(n)$ против $O(n \cdot k)$ и на практике показывает существенно более высокую производительность. Проведенные вычислительные эксперименты подтвердили корректность алгоритмов и справедливость асимптотических формул.

Разработанные алгоритмы позволили провести проверку гипотезы Каргаполова о рангах группы центральных единиц целочисленного группового кольца знакопеременной группы A_n, связанных с разбиениями на различные нечетные части с дополнительными ограничениями. Вычисления, выполненные до $n = 100000$, подтвердили справедливость гипотезы на исследованном диапазоне, причем относительная погрешность $\delta(n)$ после начальных колебаний монотонно убывает и начиная с $n = 90000$ не превышает 0.1%

В качестве перспективного направления можно выделить исследование связи между разбиениями числа n на ровно k нечетных частей (с возможными повторениями) и функциями $r(n,k)$ и $P(n,k)$.

Литература

1. Sagan B.E. The Symmetric Group. Vol. 203. New York, NY: Springer New York, 2001. Graduate Texts in Mathematics. DOI: 10.1007/978-1-4757-6804-6.

2. Szalay M., Turán P. On some problems of the statistical theory of partitions with application to characters of the symmetric group. I // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1977. Sept. Vol. 29, no. 3–4. P. 361–379. DOI: 10.1007/BF01895857.

3. Cossaboom C.H. Hook length biases for self-conjugate partitions and partitions with distinct odd parts // Journal of Number Theory. 2025. Vol. 277. P. 290–324. DOI: 10.1016/j.jnt.2025.02.002.

4. Amdeberhan T., Andrews G., Ono K., Singh A. Hook lengths in self-conjugate partitions // Proceedings of the American Mathematical Society, Series B. 2024. July. Vol. 11, no. 31. P. 345–357. DOI: 10.1090/bproc/220.

5. Dawsey M., Sharp B. Self-conjugate t-core partitions and applications // Australasian Journal of Combinatorics. 2022. Jan. Vol. 82. P. 212–227.

6. Santos J.P.O., Matte M.L. A New Approach to Integer Partitions // Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series. 2018. Dec. Vol. 49, no. 4. P. 811–847. DOI: 10.1007/s00574-018-0082-z.

7. Самойлов А.А. Распределение квадратов и проверка гипотез в нечетных разбиениях чисел // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2024. Т. 13, № 1. С. 22—37. DOI: 10.14529/cmse240102.

8. Каргаполов А.В. Центральные единицы целочисленных групповых колец знакопеременных групп: дис. канд. физ.-мат. наук. Южно-Уральский государственный университет, Россия, 2012. 87 с.
9. Szekeres G. Some asymptotic formulae in the theory of partitions (II) // The Quarterly Journal of Mathematics. 1953. Jan. Vol. 4, no. 1. P. 96–111. DOI: `10.1093/qmath/4.1.96`.
10. Canfield E.R. From Recursions to Asymptotics: On Szekeres' Formula for the Number of Partitions // The Electronic Journal of Combinatorics. 1996. Nov. Vol. 4, no. 2. R6. DOI: `10.37236/1321`.
11. Inc. O.F. Sequence A000700: Number of partitions of n into distinct odd parts. 2026. URL: `https://oeis.org/A000700` (дата обращения: 23.03.2026).
12. Самойлов А.А. Исследование разбиений на различные нечетные части. URL: `https://github.com/SashaSamoilov/NrDistinctOddParts` (дата обращения: 21.04.2026).
13. Ferraz R.A. Simple components and central units in group algebras // Journal of Algebra. 2004. Vol. 279, no. 1. P. 191–203. DOI: `10.1016/j.jalgebra.2004.05.005`.

Самойлов Александр Андреевич, аспирант, кафедра системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (Челябинск, Российская Федерация)

DOI: 10.14529/cmse260105

ON RELATIONS BETWEEN PARTITION CLASSES WITH A RESTRICTED NUMBER OF PARTS

© 2026 A.A. Samoilov

South Ural State University (pr. Lenina 76, Chelyabinsk, 454080 Russia)

E-mail: samoilovaa@susu.ru

Received: 27.01.2026

This paper investigates relations between classes of partitions of a positive integer n with restricted number of parts. The main focus is on partitions into exactly k distinct odd parts. To relate this class of partitions to those with restricted part size, we employ conjugation of Young diagrams. This allows one to construct an explicit bijection and prove that the number of such partitions $r(n,k)$ exactly equals $P((n-k^2)/2,k)$ for $n \equiv k \pmod 2$ and $n \geq k^2$, where the parts of the latter do not exceed k. Using this relation, we compare the asymptotic behavior of the partition functions $r(n,k)$, $p(n,k)$ — the number of partitions of n into exactly k parts, and $q(n,k)$ — the number of partitions of n into k distinct parts. For $k = O(n^{1/3})$, it is proved that the ratios $q(n,k)/r(n,k)$ and $p(n,k)/r(n,k)$ asymptotically tend to 2^{k-1} as $n \to \infty$. For the numerical verification of the obtained theorems, two algorithms based on dynamic programming are implemented. The first algorithm relies on the recurrence relation for counting partitions into distinct odd parts $r(n,k)$. The second one relies on the proved bijection and the recurrence formula for the number of partitions $P(m,k)$ whose parts do not exceed k. Computational experiments show that the algorithm based on the established bijection provides a significant performance gain as n increases. The developed algorithms are also applied to verify the Kargapolov conjecture concerning the ranks of the group of central units of the integer group ring of the alternating group A_n, which are related to partitions into distinct odd parts under additional constraints. Computations performed up to $n = 100000$ confirm the asymptotic behavior, with a relative error below 0.1%.

Keywords: integer partitions, partitions into distinct odd parts, combinatorial bijection, asymptotic analysis, dynamic programming.

FOR CITATION

Samoilov A.A. On Relations between Partition Classes with a Restricted Number of Parts. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2026. Vol. 15, no. 1. P. 96–109. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse260105.

References

1. Sagan B.E. The Symmetric Group. Vol. 203. New York, NY: Springer New York, 2001. Graduate Texts in Mathematics. DOI: 10.1007/978-1-4757-6804-6.
2. Szalay M., Turán P. On some problems of the statistical theory of partitions with application to characters of the symmetric group. I. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1977. Sept. Vol. 29, no. 3–4. P. 361–379. DOI: 10.1007/BF01895857.
3. Cossaboom C.H. Hook length biases for self-conjugate partitions and partitions with distinct odd parts. Journal of Number Theory. 2025. Vol. 277. P. 290–324. DOI: 10.1016/j.jnt.2025.02.002.
4. Amdeberhan T., Andrews G., Ono K., Singh A. Hook lengths in self-conjugate partitions. Proceedings of the American Mathematical Society, Series B. 2024. July. Vol. 11, no. 31. P. 345–357. DOI: 10.1090/bproc/220.
5. Dawsey M., Sharp B. Self-conjugate t-core partitions and applications. Australasian Journal of Combinatorics. 2022. Jan. Vol. 82. P. 212–227.
6. Santos J.P.O., Matte M.L. A New Approach to Integer Partitions. Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series. 2018. Dec. Vol. 49, no. 4. P. 811–847. DOI: 10.1007/s00574-018-0082-z.
7. Samoilov A.A. Distribution of Squares and Hypothesis Verification in Odd Integer Partitions. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2024. Vol. 13, no. 1. P. 22–37. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse240102.
8. Kargapolov A.V. Central units of integral group rings of alternating groups: PhD thesis. South Ural State University, Russia, 2012. 87 p. (in Russian).
9. Szekeres G. Some asymptotic formulae in the theory of partitions (II). The Quarterly Journal of Mathematics. 1953. Jan. Vol. 4, no. 1. P. 96–111. DOI: 10.1093/qmath/4.1.96.
10. Canfield E.R. From Recursions to Asymptotics: On Szekeres' Formula for the Number of Partitions. The Electronic Journal of Combinatorics. 1996. Nov. Vol. 4, no. 2. R6. DOI: 10.37236/1321.
11. Inc. O.F. Sequence A000700: Number of partitions of n into distinct odd parts. 2026. URL: https://oeis.org/A000700 (accessed: 23.03.2026).
12. Samoilov A.A. Study of integer partitions into distinct odd parts. URL: https://github.com/SashaSamoilov/NrDistinctOddParts (accessed: 21.04.2026) (in Russian).
13. Ferraz R.A. Simple components and central units in group algebras. Journal of Algebra. 2004. Vol. 279, no. 1. P. 191–203. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2004.05.005.