

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ТРЕЩИНЫ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО РАЗРЫВА ПЛАСТА*

© 2026 О.С. Борщук¹, Р.К. Газизов^{1,2}, Н.С. Белевцов^{1,2}

¹ООО «РН-Технологии»

(119607 Москва, Раменский б-р, д. 1),

²Уфимский университет науки и технологий

(450076 Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32)

E-mail: os_borshchuk@rosneft.ru, rk_gazizov2@rosneft.ru, nsbelevtsov@rn-t.ru

Поступила в редакцию: 20.04.2026

Рассматриваются методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) специального вида, возникающих при численном моделировании гидродинамических процессов в пористых средах и развития трещины гидравлического разрыва пласта (ГРП). Обсуждаемые методы используются в корпоративной линейке программного обеспечения, развиваемой в ПАО «НК «Роснефть». Особое внимание уделяется параллельным методам решения разреженных систем, применяемым в корпоративных симуляторах. Приводится математическая постановка задачи Академического турнира ПАО «НК «Роснефть» 2025 года, связанная с моделированием процесса ГРП. Особенностью задачи является совместное моделирование упругого поведения породы и течения жидкости в трещине, что приводит к необходимости многократного решения систем с матрицей блочного вида, содержащей как разреженные блоки, так и заполненный, отвечающий за уравнения геомеханики. Наличие заполненного блока существенно отличается рассматриваемые системы от классических разреженных систем гидродинамического моделирования и требует разработки специализированных алгоритмов. В рамках турнира участникам предлагалось решить последовательность из 551 СЛАУ специального вида. Проводится сравнительный анализ решений команд-финалистов с точки зрения эффективности используемых параллельных методов решения линейных систем.

Ключевые слова: системы линейных алгебраических уравнений, гидравлический разрыв пласта, предобуславливание, итерационные методы, разреженные матрицы, параллельные вычисления, академический турнир.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Борщук О.С., Газизов Р.К., Белевцов Н.С. Сравнительный анализ методов решения систем линейных алгебраических решений специального вида в задаче моделирования развития трещины гидравлического разрыва пласта // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2026. Т. 15, № 2. С. 47–64. DOI: 10.14529/cmse260203.

Введение

Во многих задачах моделирования залежей углеводородов наиболее трудоемким является решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), имеющих специальный вид и большую размерность, которое занимает до 90 % общего времени моделирования. Поэтому использование параллельных вычислений является необходимым условием эффек-

*Статья рекомендована к публикации Программным комитетом Всероссийской научной конференции с международным участием «Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ) 2026».

тивности решения задач моделирования процессов нефтедобычи, которые часто требуют значительных вычислительных ресурсов.

НК «Роснефть», занимающаяся созданием собственной линейки симуляторов для моделирования физических процессов, происходящих в нефтяных резервуарах, начиная с 2000 года активно использует технологии параллельного программирования. Развитие этих технологий в компании за последние 25 лет тесно связано с развитием параллельных вычислений: от использования многопроцессорных кластерных систем с интерфейсом MPI и технологий многопоточного вычисления OpenMP до современных технологий распараллеливания на видеокартах с использованием технологии CUDA.

Разработка высокопроизводительных алгоритмов решения СЛАУ приобретает особую актуальность в условиях постоянного усложнения геологических, геофизических и гидродинамических моделей. Например, гидродинамическое моделирование месторождений порождает разреженные СЛАУ огромной размерности, число неизвестных в которых может достигать сотен миллионов. Не менее значимую роль решение СЛАУ играет при численном моделировании гидравлического разрыва пласта (ГРП), где дискретизация связанных уравнений механики деформируемого твердого тела, фильтрации жидкости разрыва и распространения трещины приводит к необходимости многократного решения систем с изменяющейся на каждом шаге структурой матрицы. С ростом объемов данных сейсморазведки, геофизического исследования скважин (ГИС) и данных мониторинга эксплуатации месторождений размерность систем также достигает миллионов уравнений. При этом матрицы СЛАУ, возникающие в рассматриваемых задачах, зачастую обладают специфическими свойствами — высокой обусловленностью, определенным характером разреженности, блочной структурой и др. Все вышперечисленное обуславливает высокую важность разработки и программной реализации эффективных параллельных алгоритмов решения СЛАУ и построения предобуславливателей для цифрового моделирования нефтегазовых месторождений.

С целью привлечения внимания специалистов в области прикладной математики из вузов и академической среды к решению задач нефтегазодобывающей отрасли ПАО «НК «Роснефть» с 2023 года проводит Академические турниры. На турнирах формулируются задачи, представляющие научный и практический интерес для НК «Роснефть». Участникам турнира 2025 года было предложено разработать эффективные алгоритмы численного решения систем линейных алгебраических уравнений специального вида, возникающих в задаче моделирования развития трещины гидравлического разрыва пласта.

Анализ результатов участников турнира показал, что применявшиеся алгоритмы и технологии во многом схожи с теми, которые регулярно применяются при решении СЛАУ с разреженными матрицами. В частности, многие методы использовались нами ранее в задачах моделирования фильтрационных течений многофазных жидкостей в пористых средах, решаемых в корпоративном симуляторе «РН-КИМ». Опыт практического применения таких методов для решения соответствующих СЛАУ обсуждается в разделе 1. Оставшаяся часть статьи посвящена задаче Академического турнира 2025 года: в разделах 2 и 3 приводится математическая модель гидравлического разрыва пласта и формулируется постановка задачи Академического турнира; в разделе 4 обсуждаются подходы к ее решению, предложенные участниками соревнования. Основные результаты работы сформулированы в разделе «Заключение».

1. Решение систем линейных уравнений в задачах гидродинамического моделирования

Основным процессом, рассматриваемым в задачах моделирования нефтедобычи, является фильтрация флюида в пористой среде. Решение таких задач связано с колоссальным объемом вычислений. Поэтому развитие параллельных технологий в ПАО «НК «Роснефть» тесно связано с их использованием в задачах фильтрации. Важно отметить, что параллельные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, используемые в корпоративном гидродинамическом симуляторе, также могут быть использованы для решения соответствующих задач в других областях нефтегазового инжиниринга.

Известны несколько подходов к численной реализации математической модели многофазных фильтрационных течений углеводородов в пористой среде (см., например, [1]). В настоящее время наиболее эффективной признана полностью неявная схема (Fully Implicit), реализация которой приводит к необходимости решения СЛАУ с не более чем семью блочными элементами в строке, где размерность блока определяется моделью фильтрации. Так как матрицы соответствующих СЛАУ на практике являются сильно разреженными и плохо обусловленными, для решения принято использовать предобусловленные итерационные методы подпространства Крылова [2], например, метод бисопряженных градиентов со стабилизацией (BiCGStab) или метод обобщенных минимальных невязок (GMRES).

Одним из эффективных предобуславливателей, применяемых в задаче численного моделирования многофазной фильтрации углеводородов, является неполное LU-разложение без заполнения (с нулевым заполнением) — ILU(0), также используются и другие предобуславливатели класса ILU. Более сложный, но в то же время и более эффективный подход заключается в применении специализированного двухступенчатого предобуславливателя CPR (Constrained Pressure Residual) и его модификаций. В рамках CPR выделяется локальный предобуславливатель, в качестве которого часто используется алгебраический многосеточный метод (Algebraic Multigrid Method, AMG), а также глобальный предобуславливатель, например, упомянутый выше ILU(0). Такой подход позволяет эффективно распараллеливать основную часть вычислений. Так, например, в корпоративном гидродинамическом симуляторе «РН-КИМ» для MPI-версии полностью неявной схемы для модели с 1900000 активных ячеек достигнуто ускорение в 12.66 раз на 16 процессорах.

В работе [3] предложена модификация двухступенчатого предобуславливателя CPR (Constrained Pressure Residual) для решения разреженных СЛАУ, возникающих при численном моделировании многофазной фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде. Предложенная модификация ACPR (Adaptive CPR) основана на декомпозиции расчетной области на устойчивую и неустойчивую части по критерию CFL, что позволяет строить неполное LU-разложение не для всей матрицы, а лишь для подмножества неустойчивых ячеек. Тестирование на реальных двух- и трехфазных моделях размерностью до 1122000 ячеек показало сокращение времени решения линейных систем в среднем на 20% и снижение требуемого объема оперативной памяти на 35–40% по сравнению со стандартным CPR.

Новый этап в решении СЛАУ, возникающих в задаче фильтрации, начался с распространения гибридных вычислительных систем, в которые наряду с центральными процессорами (CPU) привычной архитектуры x86 устанавливались массивно-параллельные ускорители (графические процессоры (GPU) производства компаний NVIDIA, AMD или Intel). В работах [4, 5], посвященных применению графических процессоров для решения разрежен-

ных СЛАУ в рамках той же задачи гидродинамического моделирования, было показано, что решение рассматриваемых систем итерационным методом BiCGStab с предобуславливателем BILU(0) (блочное неполное LU-разложение) позволяет существенно сократить время решения таких систем (в 4.3–7.7 раза).

Кроме того, в [5] было предложено на первом шаге двухступенчатого предобуславливателя CPR вместо AMG использовать метод AIPS (Approximate Inverse Power Series), аппроксимирующий обратную матрицу на основе степенного разложения в ряд Неймана. Проведенное сравнение предобуславливателей BILU(0), CPR-AMG и CPR-AIPS показало, что CPR-AIPS имеет преимущество на некоторых СЛАУ. В частности, в [6] показано преимущество использования такого предобуславливателя за счет применения ориентированного на архитектуру GPU параллельного алгоритма решения линейных систем с трехдиагональной матрицей, состоящей из независимых блоков различного размера.

Другой способ применения метода AIPS приведен в работе [7]. А именно, предложено применять предобуславливатель AIPS на графических процессорах в качестве альтернативы неполному LU-разложению без заполнения ILU(0) при решении СЛАУ. Предпосылкой работы является низкий ресурс параллелизма метода ILU(0), быстродействие которого на GPU зачастую уступает реализации на CPU. Проведена адаптация алгоритмов построения и применения предобуславливателя AIPS с учетом блочной структуры матриц, при этом в параллельном алгоритме задействован метод блочной прогонки для пакетного решения систем с трехдиагональными матрицами. На наборе СЛАУ с размерностью от 2 до 18 миллионов на GPU NVIDIA A100 применение AIPS обеспечило снижение времени решения до 3.6 раза относительно ILU(0) в режиме одноступенчатого предобуславливателя и до 1.5 раза в качестве замены на второй ступени двухступенчатого предобуславливателя CPR.

Рассмотренные подходы реализуются в корпоративном гидродинамическом симуляторе «РН-КИМ». Для рабочих станций реализована многопоточная версия симулятора, которая эффективно задействует все ядра процессора. На практике это дает сокращение времени расчета до 9.5 раз при использовании 16 ядер — решение, оптимальное для повседневной работы с моделями малого и среднего масштаба. Для задач высокой детализации — модели с сотнями миллионов ячеек и десятками тысяч скважин — симулятор поддерживает распределенные вычисления на кластерных и суперкомпьютерных системах. При запуске на 32 узлах кластера достигнуто ускорение до 24 раз, что делает возможным расчет полномасштабных моделей в приемлемые сроки. Также использование кластерной версии позволяет снять ограничение по оперативной памяти для расчета гигантских моделей. Отдельное внимание уделено поддержке графических процессоров. Использование GPU NVIDIA позволяет ускорить расчеты в 1.5–3.4 раза по сравнению с классическим CPU-режимом. Для максимальной производительности доступна гибридная схема на основе технологий MPI и CUDA, обеспечивающая одновременную работу нескольких GPU в рамках одной задачи.

Следует отметить, что во всех перечисленных работах рассматриваются эффективные параллельные реализации итерационных методов и предобуславливателей для решения разреженных СЛАУ, возникающих при дискретизации уравнений фильтрации. В отличие от этого, СЛАУ, получаемые в процессе моделирования ГРП, обладают иной структурой: помимо разреженных блоков, связанных с уравнениями гидродинамики, система содержит плотный блок, отвечающий за уравнения геомеханики, что существенно усложняет задачу построения эффективных решателей.

2. Моделирование процесса развития трещин гидравлического разрыва пласта

Даже в своей самой простой форме гидравлический разрыв пласта является сложным процессом для моделирования, поскольку включает в себя взаимодействие по меньшей мере трех процессов: (1) механическую деформацию, вызванную давлением жидкости на поверхность трещины; (2) течение жидкости внутри трещины; (3) рост самой трещины. Деформация твердого тела (горной породы) моделируется с использованием теории линейной упругости, которая представлена интегральным уравнением, определяющим нелокальную зависимость между шириной трещины и давлением жидкости. Поток жидкости моделируется с использованием теории смазки, представленной нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных, которое связывает скорость потока жидкости, ширину трещины и градиент давления. С другой стороны, критерий распространения трещины обычно определяется традиционным подходом к скорости выделения энергии в рамках теории линейной механики упругого разрушения (Linear Elastic Fracture Mechanics, LEFM), т.е. трещина растет, если коэффициент интенсивности напряжений на кончике трещины равен прочности породы.

Таким образом, рассматривается задача совместного моделирования упругого поведения породы и течения жидкости в трещине ГРП [8].

2.1. Уравнение упругости

Уравнения упругости используются для расчета ширины трещины в зависимости от «чистого» давления (локальное давление жидкости минус локальное минимальное смыкающее напряжение) в каждой точке поверхности трещины. Уравнения упругости в 3D для одной плоской трещины могут быть записаны в виде интегрального уравнения вида

$$Fw = \int_{\Omega(t)} C(x, y, \xi, \eta) w(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = p(x, y, t) - \sigma_c(x, y), \quad (1)$$

где $p(x, y, t)$ — давление жидкости внутри трещины, σ_c — локальное минимальное смыкающее напряжение, $w(x, y, t)$ — раскрытие трещины (толщина). Ядро C содержит всю информацию об упругих свойствах среды. Предполагается, что $\Omega(t)$ — площадь, занимаемая трещиной в момент времени t .

2.2. Уравнение гидродинамики

В рассматриваемой задаче считается, что трещина является «плоской», т.е. радиус кривизны трещины много больше ее раскрытия.

Для плоской трещины, которая растет в трехмерной упругой среде, используют двумерные уравнения Рейнольдса движения жидкости

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot [D(w, p)(\nabla p - \rho \mathbf{g})] + Q, \quad (2)$$

где ρ — плотность жидкости; $\mathbf{g} = (0, g)^T$, g — ускорение свободного падения; $Q = Q(x, y, t)$ — функция, связанная с источниками и утечками.

Для неньютоновской (степенной) жидкости:

$$D(w, p) = N' w^{\frac{2n'+1}{n'}} |\nabla p - \rho \mathbf{g}|^{\frac{1-n'}{n'}}, \quad (3)$$

$$N' = \left(\frac{n'}{2n' + 1} \right) \left(\frac{1}{2n' + 1 K'} \right)^{\frac{1}{n'}}, \quad (4)$$

$$|\nabla p - \rho \mathbf{g}| = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g_y \right)^2}, \quad (5)$$

где n' — степенной показатель жидкости, обычно изменяется в пределах $0.1 < n' < 2$; K' — индекс консистенции; g_i — компонента вектора $\mathbf{g}$.

Для ньютоновских жидкостей $n' = 1$ и $K' = \mu$, где μ — вязкость жидкости.

2.3. Начальные и граничные условия

Вдоль границы трещины рассматривается граничное условие нулевого потока жидкости, заданное выражением

$$D(w, p) \mathbf{n} \cdot (\nabla p - \rho \mathbf{g}) = 0, \quad (6)$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе трещины.

Начальные условия:

$$w(x, y, 0) = 0, \quad (7)$$

$$p(x, y, 0) = \sigma_c(x, y). \quad (8)$$

2.4. Дискретизация по пространству

Для дискретизации уравнения (1) используется метод граничных элементов. В предположении, что трещина плоская, модель 3D упругости можно свести к плоской системе элементов, покрывающих плоскость трещины [9, 10]. Пример плоской сетки представлен на рис. 1: сетка содержит n_x узлов вдоль горизонтальной оси Ox и n_y узлов вдоль вертикальной оси Oy , через Δx и Δy обозначены шаги сетки по осям Ox и Oy соответственно. Отметим, что без внешнего воздействия трещины ГРП на вертикальных скважинах обладают симметрией относительно ствола скважины, поэтому можно рассматривать только половину трещины.

Для дискретизации по пространству уравнения гидродинамики (2) используется 2D метод конечных элементов. Узлы дискретизации для уравнений упругости и гидродинамики совпадают.

После дискретизации по пространству система принимает вид:

$$Fw = p - \sigma_c, \quad (9)$$

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = H(w, p) + Q, \quad (10)$$

где w и p — неизвестные поля давления и раскрытия, Q — содержит все, что относится к источникам и стокам, F — полностью заполненная матрица упругости, $H(w, p)$ — нелинейный оператор, полученный при дискретизации оператора $\nabla \cdot [D(w, p) \nabla p]$ из уравнения (2).

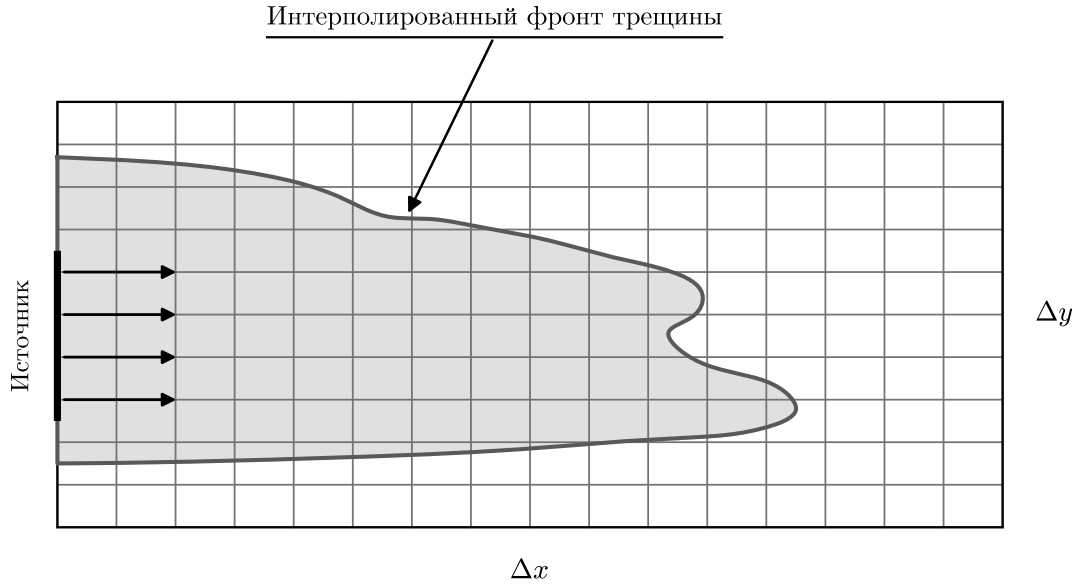


Рис. 1. Расчетная сетка в плоскости трещины

2.5. Дискретизация по времени

Для дискретизации по времени используется полностью неявная схема [8, 11]. Система с учетом начальных условий принимает вид

$$Fw^{k+1} - p^{k+1} + \sigma_c = 0, \quad (11)$$

$$w^{k+1} - w^k - H(w^{k+1}, p^{k+1})\Delta t - Q\Delta t = 0, \quad (12)$$

$$w^0 = 0, \quad (13)$$

$$p^0 = \sigma_c, \quad (14)$$

где w^k — значение поля раскрытия на k -м шаге по времени, w^{k+1} — неизвестное значение на $(k+1)$ -м шаге. Аналогично для давления p .

Система (11)–(14) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений, которую надо решать на каждом шаге по времени.

Стандартом при решении нелинейных алгебраических уравнений $g(x) = 0$ является использование метода Ньютона—Рафсона. Метод базируется на разложении нелинейной функции $g(x)$ в ряд Тейлора в окрестности начального приближения x_0 :

$$g(x) = g(x_0) + g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0). \quad (15)$$

Отбрасывая члены порядка малости $o(x - x_0)$ и используя $g(x) = 0$, получим

$$g'(x_0)\delta x = -g(x_0), \quad (16)$$

где $\delta x = x - x_0$.

Для системы нелинейных алгебраических уравнений $G(\vec{x}) = 0$, итерационный процесс (16) примет вид алгоритма 1, где $J(\vec{x}^k)$ — матрица Якоби для $G(\vec{x})$, элемент в строке i и столбце j равен $J_{ij}(\vec{x}^k) = \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(\vec{x}^k)$, $G_i(\vec{x})$ — i -е уравнение в системе нелинейных алгебраических уравнений G .

Algorithm 1 Алгоритм Ньютона—Рафсона для решения систем нелинейных алгебраических уравнений.

```

 $l \leftarrow 0;$ 
 $\vec{x}^l \leftarrow \tilde{x}$  /* Начальное приближение */
 $\varepsilon \leftarrow \tilde{\varepsilon}$  /* Требуемая точность */
while  $|G(\vec{x}^l)|_2 \geq \varepsilon$  do
    Решить СЛАУ:  $J(\vec{x}^l)\delta\vec{x}^{l+1} = -G(\vec{x}^l);$ 
     $\vec{x}^{l+1} \leftarrow \vec{x}^l + \delta\vec{x}^{l+1};$ 
     $l \leftarrow l + 1;$ 
end while
    
```

Далее, для сокращения записи, будем опускать знаки вектора над переменными, например, будем использовать x вместо $\vec{x}$.

В алгоритме 1 основной операцией является решение системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$Ju = v. \quad (17)$$

Таким образом, на каждой итерации метода Ньютона—Рафсона для системы (11)–(14) необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} F & E \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad (18)$$

где E — единичная матрица, F — заполненная матрица, связанная с уравнениями геомеханики, C и B — разреженные матрицы с одинаковым шаблоном разреженности, т.е. ненулевые элементы находятся в одних и тех же местах. C и B отвечают за уравнения гидродинамики. Блоки в системе (18) обладают следующими свойствами:

- F — строится один раз и не меняется в процессе эволюционного расчета, но для оптимизации из расчета исключены узлы с нулевым раскрытием w , из-за чего почти все системы в тесте имеют различающиеся размерности,
- C и B — меняются на каждом шаге по времени и на каждой итерации нелинейного решателя.

Отметим, что поскольку матрица F является заполненной, то с ростом размерности, сложность операции умножения на вектор для матрицы F растет как $O(n^2)$, где n — число строк матрицы F . Для матриц B и C сложность растет как $O(n)$. Очевидно, что при росте размерности матриц, умножение блока F быстро становится доминирующим. Итерационный метод Ньютона—Рафсона допускает использование приближенной матрицы $\tilde{J}$, что ведет к увеличению количества требуемых итераций для достижения сходимости, но в рассматриваемом случае позволяет значительно сократить трудоемкость решения системы (18).

В итоге решается система

$$\begin{bmatrix} \tilde{F} & E \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta w \\ \delta p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad (19)$$

где $\tilde{F}$ — разреженная матрица, полученная из F занулением элементов f_{ij} , $i \neq j$, таких, что $|f_{ij}| < \varepsilon \sqrt{\sum_{j=0}^n f_{ij}^2}$, $\varepsilon \in (0, 1)$ — параметр, выбираемый из условия минимизации времени расчета.

В задании для Академического турнира 2025 матрица $\tilde{F}$ для упрощения обозначена F .

3. Задача академического турнира 2025

Перед участниками стояла задача разработки алгоритма и его реализации в виде программного модуля, предназначенного для решения последовательности из $M = 551$ системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с матрицами $N \times N$ размером от $N \approx 100$ до $N \approx 22\,000$. Все СЛАУ были получены в рамках решения одной эволюционной задачи развития трещины гидравлического разрыва пласта, математическая постановка которой приведена в предыдущем разделе. Рост размерности систем, как было сказано ранее, связан с ростом трещины ГРП, т.е. увеличением площади ее боковой поверхности. Для сокращения вычислительных затрат в расчет включаются только узлы, влияющие на трещину (на рис. 2 выделены красным); обозначения параметров сетки совпадают с введенными выше.

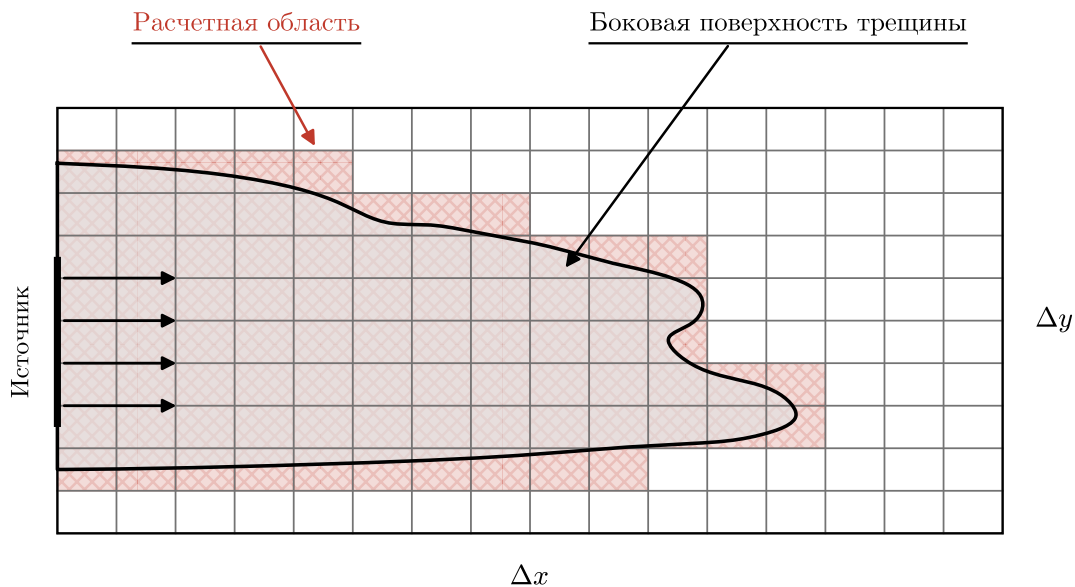


Рис. 2. Расчетная сетка с выделенными активными узлами

Каждая из решаемых систем имеет специальный блочный вид

$$\begin{bmatrix} F & E \\ C & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, \quad (20)$$

в котором блоки F, E, C, B являются квадратными матрицами размерности $N_r \times N_r$, а полная система имеет размерность $N \times N = 2N_r \times 2N_r$, F — разреженная матрица с большим количеством ненулевых элементов в строке, B и C — разреженные матрицы с максимум девятью элементами в строке и совпадающими шаблонами разреженности (ненулевые элементы находятся в одних и тех же местах), E — единичная матрица. Матрицы B и C изначально построены на 9-точечном шаблоне, но в результате исключения строк и столбцов, относящихся к неактивным узлам, не имеют выраженной 9-диагональной структуры.

Систему (20) необходимо было решить с точностью τ относительно l_2 -нормы правой части:

$$\|v - A\tilde{u}\|_2 \leq \tau \|v\|_2, \quad (21)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} F & E \\ C & B \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix},$$

а $\tilde{u}$ — полученное приближенное решение системы.

В качестве исходных данных участникам турнира был предоставлен архив, содержащий $4 \times M$ файлов в формате NPZ библиотеки NumPy, где каждый файл именуется по схеме `prefix_XXXXXX.npz`: префикс `f_`, `b_`, `c_` или `r_` обозначает соответственно F-блок, B-блок, C-блок системы или вектор правой части b , а `XXXXXX` — шестизначный порядковый номер матрицы. Все матричные блоки (F, B, C) хранятся в компактном разреженном формате CSR (Compressed Sparse Row), оптимальном для матриц с высоким уровнем разреженности.

Разрабатываемый участниками программный модуль должен был представлять собой исполняемый файл для операционной системы Linux и обеспечивать решение системы (20) с точностью $\tau = 10^{-8}$. Итоговая оценочная метрика рассчитывалась как

$$T = \sum_{i=1}^M t_i Q(N_i), \quad (22)$$

где t_i — полное время работы модуля (загрузка, решение и вывод вектора) для i -й системы размерности N_i , а весовая функция задана выражением

$$Q(N_i) = \frac{1000.0}{\sqrt{N_i}}. \quad (23)$$

Для автоматического запуска тестирования и вычисления итоговой оценочной метрики разработанных программных модулей на тестовой вычислительной машине был реализован скрипт `run_bench.py`, который последовательно обрабатывает системы из тестового набора, измеряет время выполнения каждого шага, проверяет точность решения и суммирует взвешенную метрику T , отображая в выводе детальную статистику.

Отметим, что тестовый набор СЛАУ и исходные коды программных модулей, разработанных участниками турнира, не могут быть размещены в открытом доступе. Тестовые данные сформированы с помощью корпоративного программного обеспечения ПАО «НК «Роснефть» и относятся к информации ограниченного доступа, а программные реализации участников являются результатами интеллектуальной деятельности, права на которые определены регламентом Академического турнира. По этой причине ниже приводится содержательное описание использованных алгоритмов и результатов их единообразного тестирования, достаточное для самостоятельного воспроизведения рассмотренных подходов.

4. Анализ решений финалистов турнира

В 2025 году в Академическом турнире приняло участие 159 человек, представляющих 66 научных организаций и 44 вуза из 25 городов Российской Федерации. В Финал мероприятия были отобраны 10 команд. Далее в статье обсуждаются результаты 6 лучших команд-финалистов.

4.1. Решения призеров турнира

Команда, занявшая третье место, как и все оставшиеся финалисты Академического турнира, выполняла редукцию исходной блочной системы размерности $2N_r$ к системе с матрицей $S = C - BF$ размерности N_r . Участники использовали правое предобуславливание редукционированной системы $Sx = b$, решая при этом эквивалентную систему $SM^{-1}u = b$ с последующим восстановлением $x = M^{-1}u$. Для построения предобуславливателя $M = C - BF'$ было использовано трехдиагональное приближение F' плотной матрицы F . Построенная таким образом матрица оставалась разреженной — число ее ненулевых элементов не более чем втрое превышало число ненулевых элементов в C . Для приближенного вычисления $M^{-1}x$ было применено ILUT-разложение из библиотеки Eigen. Важной особенностью реализации стал отказ от явного формирования плотной матрицы S : матрично-векторное произведение Sx на каждой итерации вычислялось как действие оператора $Sx = Cx - B(Fx)$ тремя последовательными разреженными умножениями. Членами команды было показано, что при числе итераций, значительно меньшем размерности задачи, такой подход существенно выгоднее предварительного вычисления $S = C - BF$, требующего порядка N разреженных умножений матрицы на вектор. В качестве итерационного метода был выбран GMRES с перезапуском после определенного числа шагов и полученным правым предобуславливанием. Для ускорения процедуры ортогонализации в методе использовался классический алгоритм Грама—Шмидта, обеспечивающий эффективное распараллеливание средствами стандарта OpenMP.

Командой, занявшей второе место, было предложено использование блочно-трехдиагонального предобуславливателя, основанного на расширении ленточной матрицы в смысле максимальной энтропии. Предобуславливатель строился для матрицы $Z = C - BE$, где E — разреженное приближение матрицы F , полученное отсечением элементов по порогу ε . Обратная матрица к Z в смысле максимальной энтропии также имеет блочно-трехдиагональную структуру и представляется в виде суммы трех блочно-диагональных матриц, факторизации блоков которых могут выполняться полностью параллельно с использованием библиотеки SuperLU. В качестве итерационного метода был выбран GMRES, при этом матрично-векторные операции умножения вычислялись без явного формирования матрицы S . Для ускорения наиболее ресурсоемкой операции умножения плотной матрицы F на вектор была реализована параллельная схема с распределением строк между потоками стандарта OpenMP и организацией вычислений блоками по 32 элемента для эффективного использования векторных инструкций процессора. Кроме того, при построении предобуславливателя использовалась арифметика одинарной точности, что позволило улучшить использование кэша без ухудшения сходимости итерационного метода.

Победителем турнира был предложен подход, основанный на предобуславливании алгебраическим многосеточным методом (AMG) в форме V-цикла. Предобуславливатель строился не для точного дополнения Шура $S = C - BF$, а для его диагонального приближения $Q = C - B\text{diag}(F)$, что обеспечило лучшую сходимость итерационного метода. В качестве сглаживателя в AMG использовалась комбинация метода Чебышева четвертого типа и ℓ_1 -Якоби — беспараметрический подход, в котором верхняя оценка спектра получается из теоремы Гершгорина при масштабировании на ℓ_1 -норму строк. Для построения оператора пролонгации применялся расширенный шаблон интерполяции, повышающий устойчивость метода. Редуцированная система $(C - BF)x = b$ решалась методом BiCGStab.

4.2. Подходы остальных финалистов

Помимо призеров соревнования, нельзя не упомянуть еще три команды, предложившие различные подходы к решению поставленной задачи.

Одна из команд-финалистов построила решение на базе библиотеки `hypre`, используя классический алгебраический многосеточный метод в качестве предобуславливателя для методов `BiCGStab` и `Flexible GMRES`. Отличительной чертой данного подхода стал автоматизированный подбор параметров многосеточного метода с помощью разработанного авторами ранее гибридного эволюционного алгоритма оптимизации.

Другая команда разработала оригинальный предобуславливатель на основе ряда Неймана. Идея состояла в аппроксимации обратной матрицы частичными суммами ряда Неймана с использованием масштабированного предобуславливателя Якоби. Для обеспечения сходимости ряда вводился масштабирующий параметр, а матрица упругости заменялась своим диагональным приближением. Авторами были получены теоретические оценки качества аппроксимации и экспериментально подобраны оптимальные параметры с адаптацией для систем различной размерности. Итерационным методом служил `BiCGStab`, реализация выполнена на языке `C++` с использованием стандарта `OpenMP` и библиотеки `OpenBLAS`.

Наконец, третья команда применила нестандартный подход к поиску оптимальной стратегии решения, задействовав около двадцати параллельных ИИ-агентов, каждый из которых итеративно подбирал параметры решателя на основе обратной связи от оценочной метрики турнира. В результате такого автоматизированного перебора агенты независимо сошлись к одному и тому же подходу: `ILU`-предобуславливание с методом `BiCGStab`. В итоговом решении `ILU`-разложение вычислялось в арифметике одинарной точности, а решение методом `BiCGStab` проводилось в два этапа — сначала в арифметике одинарной точности (`float32`) для быстрого получения начального приближения, затем в арифметике двойной точности (`float64`) для достижения требуемой точности. Дополнительное ускорение достигалось за счет JIT-компиляции критичных функций средствами компилятора `Numba` и оптимизации загрузки данных.

4.3. Тестирование результатов

Для сравнительного анализа решений финалистов турнира было проведено единообразное тестирование всех программных модулей на одной и той же вычислительной машине с использованием полного набора из 551 СЛАУ. Помимо измерения общего времени работы модуля и вычисления оценочной метрики (22), каждый программный модуль выводил дополнительную статистическую информацию: число итераций итерационного метода, время построения предобуславливателя, время решения системы и достигнутую нормированную невязку. Это позволило детально проанализировать вклад различных этапов решения в общее время работы.

На рис. 3 представлены графики зависимости числа итераций, времени построения предобуславливателя и общего времени решения от номера системы для шести команд, подходы которых описаны в разделах 4.1 и 4.2. Номер системы монотонно связан с ее размерностью: ранние системы имеют размерность порядка сотен, поздние — порядка 10000. Из графиков числа итераций видно, что подходы на основе AMG-предобуславливания (команды 1 и 4) обеспечивают наименьшее и наиболее стабильное число итераций, тогда как решения на основе ILU-предобуславливания (команды 2 и 3) демонстрируют заметный рост числа итераций с увеличением размерности системы. Решение с предобуславливателем на

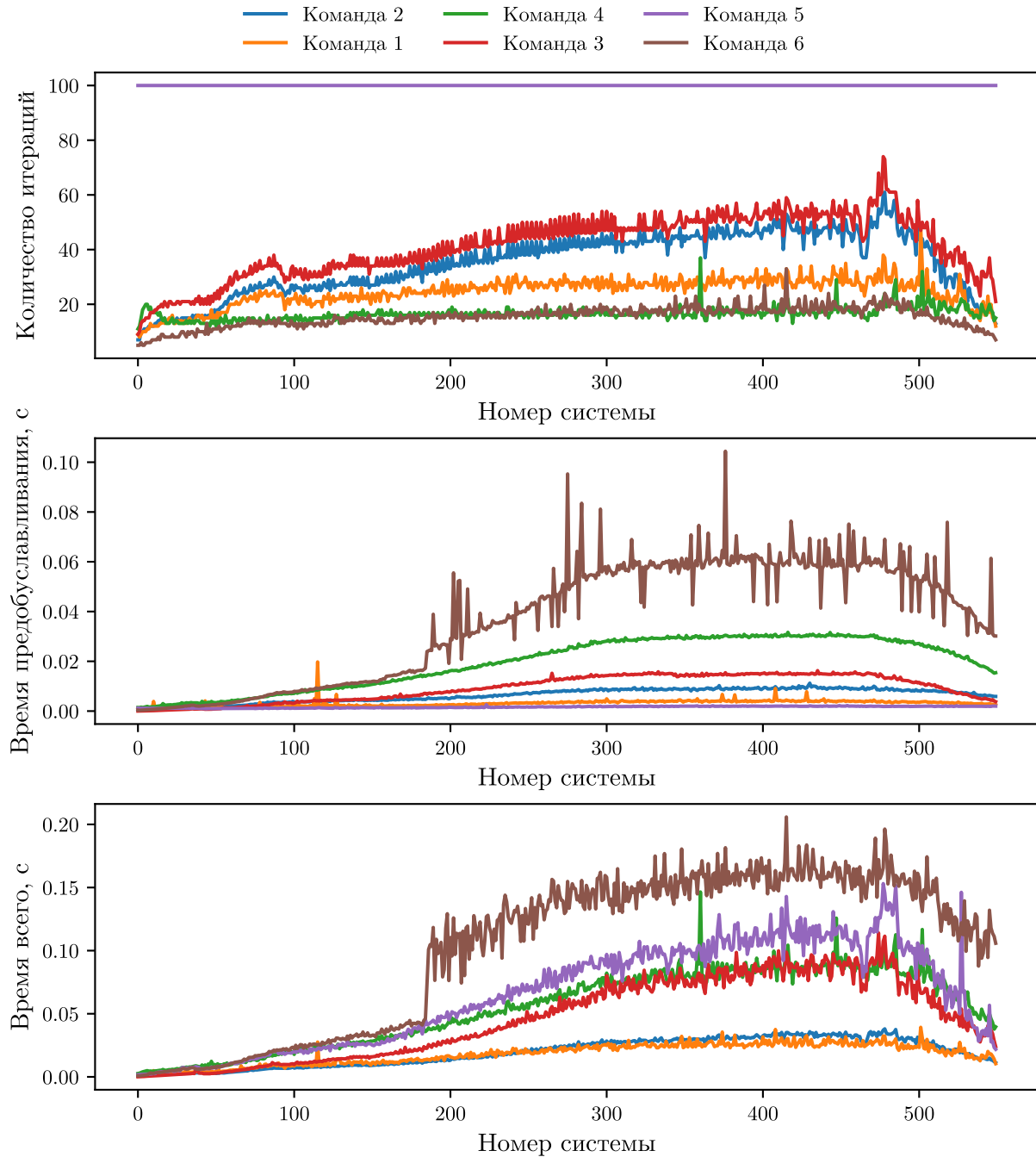


Рис. 3. Результаты тестирования решений шести финалистов турнира

основе разреженного приближения обратной матрицы с фиксированным числом итераций (SPAI) на уровне 100 формально сходилась (команда 5), однако при значительно большем числе итераций по сравнению с остальными подходами.

По времени построения предобуславливателя наиболее затратным оказался подход с ILU-предобуславливанием на основе BiCGStab (команда 6), реализованный на языке Python с использованием компилятора Numba. Наименее затратными оказались подходы, использующие SPAI-предобуславливание (команда 5) и AMG в форме V-цикла (команда 1).

На нижнем графике рис. 3 приведены общие времена решения всех систем для каждой команды. Данный параметр являлся основным критерием при определении победителей

турнира. Отчетливо видно расслоение подходов на несколько групп по быстродействию, при этом разрыв между лидирующей группой и остальными участниками увеличивается с ростом размерности систем.

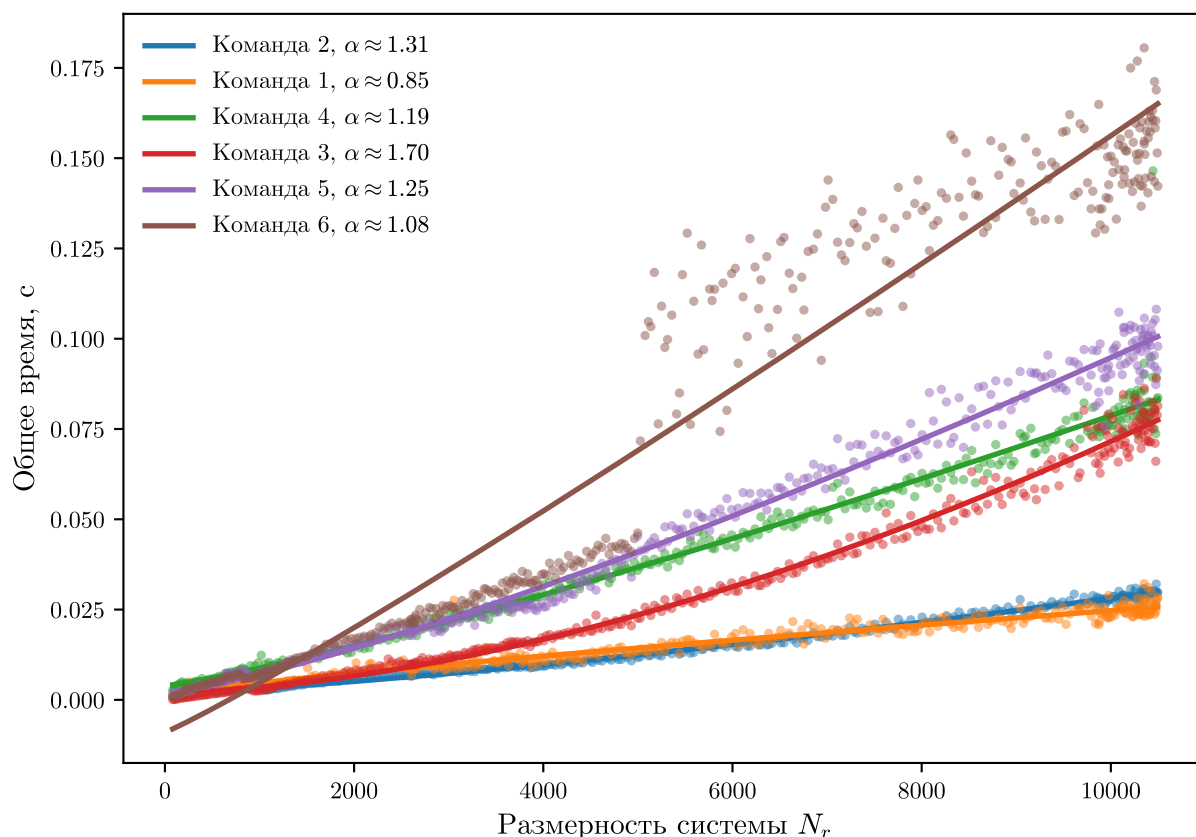


Рис. 4. Зависимость общего времени решения от размерности системы N_r

На рис. 4 представлена зависимость общего времени решения от размерности системы N_r с аппроксимацией степенной функцией вида $t = aN_r^\alpha + b$ (сплошные линии) для каждого из шести финалистов турнира. Показатель степени α характеризует асимптотическую сложность алгоритма. Наилучшую асимптотику демонстрирует подход (команда 1) на основе AMG-предобуславливания с методом BiCGStab ($\alpha \approx 0.85$), что согласуется с близкой к линейной сложности алгебраического многосеточного метода. Решение на основе метода GMRES с блочно-трехдиагональным предобуславливателем (команда 2) показало $\alpha \approx 1.31$.

Из рис. 3 и рис. 4 видно, что два лучших решения оказались чрезвычайно близки по общему времени. Несмотря на принципиально различные подходы — AMG-предобуславливание с BiCGStab (команда 1) против блочно-трехдиагонального предобуславливателя с методом GMRES (команда 2) — оба решения демонстрируют сопоставимое общее время на всем диапазоне размерностей. Кривые общего времени пересекаются в районе размерности $N_r \approx 6000$ (рис. 4): для систем меньшего размера быстрее оказывается решение команды 2, для больших СЛАУ — решение команды 1. Различие в показателях асимптотики ($\alpha = 0.85$ против $\alpha = 1.31$) свидетельствует о том, что при дальнейшем росте размерности преимущество AMG-подхода будет увеличиваться.

Заключение

Рассмотрены системы линейных алгебраических уравнений специального блочного вида, возникающие при численном моделировании развития трещины гидравлического разрыва пласта. Отличительной особенностью этих систем является наличие как заполненного блока, обусловленного уравнениями геомеханики, так и разреженных блоков, отвечающих за гидродинамическую составляющую, что делает плохо применимыми стандартные подходы, ориентированные исключительно на разреженные системы.

Проведен обзор методов решения разреженных СЛАУ, развиваемых в рамках гидродинамического симулятора ПАО «НК «Роснефть», включая двухступенчатые предобуславливатели CPR и AIPS с реализацией на графических процессорах. Описана математическая модель процесса гидравлического разрыва пласта и показано, каким образом дискретизация связанных уравнений упругости и гидродинамики приводит к системам рассматриваемого блочного вида.

На основе результатов Академического турнира 2025 года проведен сравнительный анализ нескольких подходов к решению поставленной задачи. Результаты тестирования продемонстрировали, что наилучшую асимптотическую сложность обеспечивает подход на основе алгебраического многосеточного предобуславливания с методом BiCGStab: зависимость времени решения от размерности системы N_r аппроксимируется степенной функцией с показателем $\alpha \approx 0.85$, что свидетельствует о близкой к линейной сложности алгоритма. Вместе с тем подход на основе блочно-трехдиагонального предобуславливателя с методом GMRES показал сопоставимое быстродействие на системах умеренного размера, что свидетельствует о практической значимости обоих подходов.

Полученные результаты открывают несколько направлений дальнейших исследований. Во-первых, представляет интерес адаптация рассмотренных алгоритмов для выполнения на графических процессорах, что позволит использовать опыт GPU-реализаций, накопленный при решении задач гидродинамического моделирования. Во-вторых, актуальной задачей является исследование эффективности предложенных подходов на системах существенно большей размерности.

Литература

1. Байков В.А., Борщук О.С., Газизов Р.К. и др. Моделирование фильтрационных течений углеводородов в пористой среде на многопроцессорных вычислительных системах // Научный сервис в сети Интернет: многоядерный компьютерный мир. 15 лет РФФИ: Труды Всероссийской научной конференции. 2007. С. 187–189.
2. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. DOI: 10.1137/1.9780898718003.
3. Борщук О.С. О модификации двухступенчатого метода предобуславливания при численном решении задачи многофазной фильтрации вязкой сжимаемой жидкости в пористой среде // Вестник УГАТУ. Серия: Системный анализ, управление и обработка информации. 2009. Т. 12, № 1(30). С. 146–150.
4. Губайдуллин Р.Р., Репин Н.В., Юлдашев А.В. Опыт применения графических процессоров для решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений в рамках задачи гидродинамического моделирования нефтегазовых месторождений // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2015. Т. 19,

№ 4(70). С. 118–123.

5. Газизов Р.К., Губайдуллин Р.Р., Репин Н.В., Юлдашев А.В. Исследование эффективности различных предобуславливателей при параллельном решении разреженных систем линейных алгебраических уравнений на графических процессорах // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2018. Т. 22, № 2(80). С. 105–112.
6. Юлдашев А.В., Репин Н.В., Спеле В.В. Параллельный предобуславливатель на основе степенного разложения обратной матрицы для решения разреженных линейных систем на графических процессорах // Вычислительные методы и программирование. 2019. Т. 20, № 4. С. 444–456. DOI: 10.26089/NumMet.v20r439.
7. Добровольцев А.С., Сохатский М.А., Юлдашев А.В. О возможности применения на GPU предобуславливателя AIPS в качестве альтернативы ILU(0) в задаче гидродинамического моделирования нефтегазовых месторождений // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2025): Труды международной научной конференции. 2025. С. 309.
8. Adachi J., Siebrits E., Peirce A.P., Desroches J. Computer simulation of hydraulic fractures // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2007. Vol. 44, no. 5. P. 739–757. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2006.11.006.
9. Peirce A.P., Siebrits E. Uniform asymptotic approximations for accurate modeling of cracks in layered elastic media // International Journal of Fracture. 2002. Vol. 110. P. 205–239. DOI: 10.1023/A:1010861821959.
10. Peirce A.P., Siebrits E. The scaled flexibility matrix method for the efficient solution of boundary value problems in 2D and 3D layered elastic media // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001. Vol. 190, no. 45. P. 5935–5956. DOI: 10.1016/S0045-7825(01)00206-7.
11. Devloo P., Fernandes P.D., Gomes S.M., *et al.* A finite element model for three dimensional hydraulic fracturing // Mathematics and Computers in Simulation. 2006. Vol. 73, no. 1–4. P. 142–155. DOI: 10.1016/j.matcom.2006.06.020.

Борщук Олег Сергеевич, ООО «РН-Технологии» (Москва, Российская Федерация)

Газизов Рафаил Кавыевич, д.ф.-м.н., профессор, кафедра высокопроизводительных вычислений и дифференциальных уравнений, Уфимский университет науки и технологий (Уфа, Российская Федерация), ООО «РН-Технологии» (Москва, Российская Федерация)

Белевцов Никита Сергеевич, к.ф.-м.н., кафедра высокопроизводительных вычислений и дифференциальных уравнений, Уфимский университет науки и технологий (Уфа, Российская Федерация), ООО «РН-Технологии» (Москва, Российская Федерация)

COMPARATIVE ANALYSIS OF METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS OF A SPECIAL FORM IN THE HYDRAULIC FRACTURE PROPAGATION MODELING PROBLEM

© 2026 O.S. Borshchuk¹, R.K. Gazizov^{1,2}, N.S. Belevtsov^{1,2}

¹*RN-Technologies LLC (blvd Ramenskiy 1, Moscow, 119607, Russia),*

²*Ufa University of Science and Technology (st. Zaki Validi 32, Ufa, 450076 Russia)*

E-mail: os_borshchuk@rosneft.ru, rk_gazizov2@rosneft.ru, nsbelevtsov@rn-t.ru

Received: 20.04.2026

Methods for the numerical solution of systems of linear algebraic equations (SLAE) of a special form arising in the simulation of fluid flow in porous media and of hydraulic fracture propagation are considered. The methods discussed are used in the corporate software product line developed at PJSC Rosneft Oil Company. Particular attention is paid to parallel methods for solving sparse systems that are employed in corporate simulators. The mathematical formulation of the problem of the 2025 Rosneft Academic Tournament, related to the simulation of hydraulic fracturing, is presented. A distinctive feature of the problem is the coupled modeling of the elastic behavior of the rock and of fluid flow within the fracture, which requires the repeated solution of systems with a block matrix containing both sparse blocks and a dense block corresponding to the geomechanics equations. The presence of the dense block substantially distinguishes these systems from the classical sparse systems of reservoir simulation and calls for specialized algorithms. As part of the tournament, participants were asked to solve a sequence of 551 SLAEs of this special form. A comparative analysis of the finalist teams' solutions is carried out in terms of the efficiency of the parallel methods used to solve the linear systems.

Keywords: systems of linear algebraic equations, hydraulic fracturing, preconditioning, iterative methods, sparse matrices, parallel computing, academic tournament.

FOR CITATION

Borshchuk O.S., Gazizov R.K., Belevtsov N.S. Comparative Analysis of Methods for Solving Systems of Linear Algebraic Equations of a Special Form in the Hydraulic Fracture Propagation Modeling Problem. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2026. Vol. 15, no. 2. P. 47–64. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse260203.

This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Non Commercial 4.0 License which permits non-commercial use, reproduction and distribution of the work without further permission provided the original work is properly cited.

References

1. Baykov V.A., Borshchuk O.S., Gazizov R.K., *et al.* Simulation of hydrocarbon filtration flows in porous media on multiprocessor computing systems. Scientific Service on the Internet: Multi-Core Computer World. 15 Years of RFBR: Proceedings of the All-Russian Scientific Conference. 2007. P. 187–189. (in Russian)
2. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. 2nd ed. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. DOI: 10.1137/1.9780898718003.
3. Borshchuk O.S. On the modification of the two-stage preconditioning method for the numerical solution of the multiphase filtration problem of viscous compressible fluid in a porous medium.

- Bulletin of Ufa State Aviation Technical University. Series: System Analysis, Control and Information Processing. 2009. Vol. 12, no. 1(30). P. 146–150. (in Russian)
4. Gubaydullin R.R., Repin N.V., Yuldashev A.V. Experience of using graphics processors for solving sparse systems of linear algebraic equations in the context of hydrodynamic simulation of oil and gas fields. Bulletin of Ufa State Aviation Technical University. 2015. Vol. 19, no. 4(70). P. 118–123. (in Russian)
 5. Gazizov R.K., Gubaydullin R.R., Repin N.V., Yuldashev A.V. Efficiency study of various preconditioners for parallel solution of sparse systems of linear algebraic equations on graphics processors. Bulletin of Ufa State Aviation Technical University. 2018. Vol. 22, no. 2 (80). P. 105–112. (in Russian)
 6. Yuldashev A.V., Repin N.V., Spele V.V. Parallel preconditioner based on power series expansion of the inverse matrix for solving sparse linear systems on graphics processors. Numerical Methods and Programming. 2019. Vol. 20, no. 4. P. 444–456. (in Russian) DOI: 10.26089/NumMet.v20r439.
 7. Dobrovoltsev A.S., Sokhatsky M.A., Yuldashev A.V. On the possibility of applying the AIPS preconditioner on GPU as an alternative to ILU(0) in the problem of hydrodynamic simulation of oil and gas fields. Parallel Computational Technologies (PCT'2025): Proceedings of the International Scientific Conference. 2025. P. 309. (in Russian)
 8. Adachi J., Siebrits E., Peirce A.P., Desroches J. Computer simulation of hydraulic fractures. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. 2007. Vol. 44, no. 5. P. 739–757. DOI: 10.1016/j.ijrmms.2006.11.006.
 9. Peirce A.P., Siebrits E. Uniform asymptotic approximations for accurate modeling of cracks in layered elastic media. International Journal of Fracture. 2002. Vol. 110. P. 205–239. DOI: 10.1023/A:1010861821959.
 10. Peirce A.P., Siebrits E. The scaled flexibility matrix method for the efficient solution of boundary value problems in 2D and 3D layered elastic media. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2001. Vol. 190, no. 45. P. 5935–5956. DOI: 10.1016/S0045-7825(01)00206-7.
 11. Devloo P., Fernandes P.D., Gomes S.M., *et al.* A finite element model for three dimensional hydraulic fracturing. Mathematics and Computers in Simulation. 2006. Vol. 73, no. 1–4. P. 142–155. DOI: 10.1016/j.matcom.2006.06.020.