

## ПРИМЕНЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ В ПРОЕКТИРОВАНИИ АНТЕННЫХ СИСТЕМ

*А.Б. Хашимов, Р.Р. Салихов, Р.С. Альметов*

Предложены эффективные вычислительные методы для исследования математических моделей антенных систем. Для построения математических моделей используются строгие электродинамические принципы и уравнения. Применение квадратурных формул повышенной точности для решения интегрального уравнения Поклингтона и специальной регуляризирующей процедуры для интегрального уравнения II рода позволяет получить устойчивые результаты моделирования с заданной точностью и высокими динамическими характеристиками.

*Ключевые слова: математическая модель, интегральные уравнения, квадратурные формулы Гаусса – Лежандра.*

Построение эффективных математических моделей (ММ) сложных антенных систем предполагает использование строгих электродинамических принципов и уравнений, а также обоснование используемой формализации граничных условий, оценку погрешностей, вызванных численными методами исследования и конечными ресурсами вычислительной техники. Необходимость строгого электродинамического подхода в задачах проектирования антенных систем вызвана, в первую очередь, необходимостью повышения точности моделирования, так как возрастающие требования к функциональным характеристикам сложных антенных систем (гибридные зеркальные антенны, многоэлементные фазированные антенные решетки, цифровые антенные решетки) приводят к необходимости учета большого числа различных факторов, например, обеспечение параметров электромагнитной совместимости, работа в сложной помеховой обстановке. При этом в ряде случаев помимо требований высокой точности моделирования антенных систем важное практическое значение приобретают вопросы повышенной скорости получения результатов вычислений.

Широко используемый метод интегральных уравнений (ИУ) для построения ММ задач проектирования антенных систем имеет свои особенности и области применения [1]. Метод ИУ является альтернативным методом решения краевых задач, поэтому в одних задачах его применение эффективно, а в других нет. Одним из критериев целесообразности применения ИУ является определенное соответствие электрических размеров исследуемых объектов длине волны возбуждающего электромагнитного поля. Важно отметить, что ИУ формулируются на основе строгих электродинамических уравнений и принципов, например, с использованием леммы Лоренца в интегральной форме. В работе [2] отмечено, что ИУ электродинамики позволяют представить краевую задачу как задачу с нелокальными граничными условиями. Тогда для неоднородных объектов внутреннее поле может быть выражено непосредственно через возбуждающее поле, а поле рассеяния определяется на втором этапе построения решения.

Организация вычислительных схем исследования ММ на основе ИУ требует рационального подхода к формированию систем линейных алгебраических уравнений

(СЛАУ), к которым приводят прямые методы дискретизации ИУ, например, метод моментов [3]. Использование дискретных форм представления решения в виде системы базисных и пробных функций приводит к необходимости выполнения операций численного интегрирования с возможно большей точностью при минимальных временных затратах. В первую очередь это относится к ММ крупноразмерных объектов, когда генерируемая СЛАУ имеет размерность порядка  $10^5 \times 10^5$  элементов. В таких задачах быстро нарастающие погрешности округления при выполнении большого количества операций по обработке коэффициентов СЛАУ приводят к появлению неконтролируемых осциллирующих ошибок решения. Фильтрация таких ошибок может быть проведена аппроксимацией решения базисными функциями, отвечающих требованиям физической реализуемости и априорной информации о свойствах решения, например, принадлежности к определенным функциональным пространствам (Соболева, Гельдера) [4].

Так как основной характерной чертой исследования ММ на основе ИУ является редукция к СЛАУ, часто очень большой размерности, то вопросы вычисления, адресации и последовательности обработки коэффициентов СЛАУ приобретают важное практическое значение. При этом необходимо отметить, что ММ задач проектирования антенных систем имеют векторный комплексный характер. Это приводит к выраженной блочной структуре СЛАУ, так как дискретная форма ИУ предполагает последовательный перебор всех фиксированных точек наблюдения в области построения решения. Для решения СЛАУ могут быть использованы как прямые, так и итерационные методы, выбор которых определяется размерностью задачи и компьютерными ресурсами. Например, использование суперкомпьютерного моделирования для прямых методов позволяет анализировать поле излучения антенных систем, установленных на среднеразмерных аэродинамических объектах. Еще большие возможности появляются при использовании итерационных методов, но здесь быстро нарастает время решения задачи.

Вычисление коэффициентов СЛАУ основано на использовании квадратурных формул – Симпсона, Ньютона-Котеса, Гаусса-Лежандра. Общая оценка погрешности ММ рассматриваемых задач напрямую связана с погрешностями используемых квадратурных формул, следовательно, вопросы выбора и рациональной программной реализации численного интегрирования также имеют важное практическое значение.

Таким образом, разработка вычислительных схем повышенной точности расширяет возможности моделирования сложных антенных систем, когда появляется возможность учета большого количества факторов, влияющих на точность результатов исследования. Такие вычислительные схемы предполагают оптимизацию как методов формирования СЛАУ, так и программной реализации методов численного интегрирования с высокими динамическими свойствами и с заданной точностью.

Рассмотрим некоторые примеры применения вычислительных схем повышенной точности.

## **1. ММ вибраторных излучателей в тонкопроволочном приближении**

Вибраторные излучатели являются одними из наиболее часто используемых при проектировании антенных систем. Простота конструкции, компактность, высокая

технологичность изготовления определяют широкое применение таких излучателей как в виде отдельных антенн, так и в составе сложных многоэлементных систем – ФАР, многолучевых и активных антенных решеток. Детальное изучение ММ вибраторных излучателей позволяет исследовать с высокой степенью достоверности зависимости входного сопротивления в полосе частот с учетом взаимного влияния для сканирующих антенных решеток. Это позволяет проектировать оптимальные согласующие устройства, исследовать поведение ДН, коэффициента направленного действия (КНД) антенной системы в секторе сканирования и заданной полосе частот.

Рассмотрим ММ вибраторного излучателя в тонкопроволочном приближении, когда радиус проводников плеч вибраторов  $a \ll \lambda$ , где  $\lambda$  – длина волны возбуждающего поля. Строгая электродинамическая формулировка ММ в этом случае приводит к ИУ Поклингтона [5]. В основной декартовой системе координат  $x, y, z$  и связанной с ней сферической системой координат  $R, \theta, \varphi$  выделим точку  $(x_0, y_0, z_0)$ , совпадающую с центром симметричного вибраторного излучателя. Введем единичный орт  $\vec{i}_d$ , определяющий произвольную пространственную ориентацию оси излучателя:

$$\vec{i}_d = \vec{i}_x \cdot \sin \theta_d \cdot \cos \varphi_d + \vec{i}_y \cdot \sin \theta_d \cdot \sin \varphi_d + \vec{i}_z \cdot \cos \theta_d, \quad (1)$$

где  $\theta_d, \varphi_d$  – угловые координаты оси. В точку  $(x_0, y_0, z_0)$  поместим начало вспомогательной цилиндрической системы координат  $\zeta, \rho, \psi$ , где  $\zeta$  – координата высоты;  $\rho$  – координата радиуса;  $\psi$  – азимутальная координата точки наблюдения. Выбор этой системы координат обусловлен только внутренней структурой численного решения ИУ Поклингтона, все остальные геометрические операции производятся в основной системе координат. Будем использовать ИУ Поклингтона следующего вида:

$$\int_{-h}^h I_d(\zeta') \left[ \frac{d^2}{d\zeta'^2} + k^2 \right] G(\zeta - \zeta') d\zeta' = \frac{4\pi i k}{Z_c} \vec{i}_d \cdot \vec{E}_i(\zeta), \quad -h \leq \zeta \leq h, \quad (2)$$

где  $I_d$  – распределение линейного тока по оси вибратора,  $I_d(\pm h) = 0$ ;  $h = l/2$ ;  $l$  – длина вибратора;  $k = 2\pi/\lambda$ ;  $G(\zeta - \zeta') = \exp(-ikr)/r$  – функция, определяющая ядро ИУ;  $r = \sqrt{(\zeta - \zeta')^2 + a^2}$ , штрих означает принадлежность к точке интегрирования;  $\vec{E}_i$  – вектор напряженности электрического поля возбуждения;  $Z_c = \sqrt{\mu_a/\varepsilon_a}$  – волновое сопротивление среды. Следуя одной из наиболее часто используемых схем численного решения ИУ (2), рассмотрим следующее представление функции  $G$  в выбранной системе координат [5]:

$$G(\zeta, \rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikr}}{r} d\psi', \quad (3)$$

где  $r = \sqrt{\zeta^2 + \rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos \psi'}$ . При решении ИУ (2) для тонкопроволочного приближения  $\rho = a$ . Необходимо отметить, что численное решение ИУ (2) с сильной особенностью требует нахождения значений функции (3) с высокой точностью, особенно для случая  $|\zeta| \rightarrow 0$ , который в основном и определяет устойчивость и точность

всего решения [3]. Производя замену переменных в (3) для случая  $\rho = a$  ядро ИУ можно представить следующим образом [5]:

$$G(\zeta) = \frac{2K(\kappa)}{\pi r_{\max}} \int_0^1 \frac{\exp\left(-ikr_{\max} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \theta}\right)}{\sqrt{1 - \kappa^2 \cdot \sin^2 \theta}} d\theta, \quad (4)$$

где  $K(\kappa)$  – полный эллиптический интеграл I рода;  $\kappa = 2a/\sqrt{\zeta^2 + 4a^2}$ ;  $r_{\max} = 2a/\kappa$ ;  $\theta = (\psi' - \pi)/2$ . Такое представление дает возможность получить асимптотическую оценку для случая  $|\zeta| \rightarrow 0$ :

$$G(\kappa) \approx \frac{1}{\pi a} \ln \frac{8a}{|\zeta|}. \quad (5)$$

Далее производится аппроксимация второй производной в ядре ИУ методом конечных разностей:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} G(\zeta_m) = \frac{G(\zeta_{m-1}) - 2G(\zeta_m) + G(\zeta_{m+1}))}{\Delta l^2} + o(\Delta l^2), \quad (6)$$

где  $\Delta l$  – интервал разбиения длины плеча вибраторного излучателя. Необходимо отметить, что критерии корректности численного решения ИУ предполагают одинаковый порядок погрешности вычислительных процедур, поэтому разные оценки погрешности при вычислении (5), (6) для произвольного расположения точек наблюдения и источников затрудняют получение общей оценки погрешности численного решения ИУ (2). Кроме того, формирование СЛАУ потребует в этом случае дополнительного блока для определения случая совпадения этих точек, что приводит к увеличению времени вычислений.

Рассмотрим вариант прямого вычисления коэффициентов СЛАУ с использованием квадратурных формул Гаусса-Лежандра повышенной точности без выделения особенностей (5) и без аппроксимации (6). В этом случае прямые вычисления производятся по одной и той же однородной схеме с общим порядком погрешности. Вычислительные эксперименты показывают, что квадратурные формулы Гаусса-Лежандра с числом узлов 32 (четное количество узлов гарантирует отсутствие особенности при  $\zeta = \zeta'$ ) обеспечивают высокую устойчивость численного решения при малых затратах компьютерного времени. Программная реализация квадратурной формулы Гаусса-Лежандра построена для инвариантного интервала  $[-1, 1]$  с использованием программы *legendre* системы MATLAB. На рис. 1 приведены результаты расчета распределения тока симметричного вибратора длиной  $l = 0.485\lambda$ , радиус  $a = 0.007\lambda$ . Для объективной оценки эффективности вычислительной схемы повышенной точности дискретизация ИУ (2) проведена для одного и того же возбуждающего поля в зазоре вибратора в виде  $\delta$ -функции, и для одного и того же набора базисных функций метода моментов.

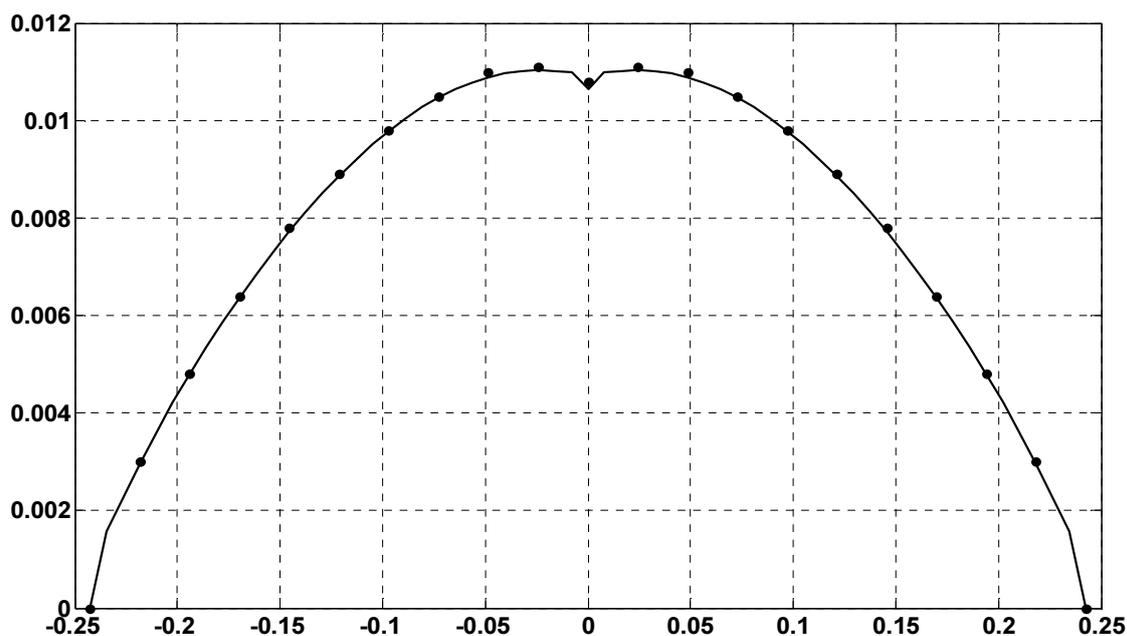


Рис. 1. Распределение тока вибраторного излучателя

Вычислительные эксперименты показывают, что при одних и тех же исходных данных вычислительная схема повышенной точности и рациональной организации формирования СЛАУ обеспечивает уменьшение времени расчетов до 20%. Следовательно, при решении более сложных задач, например синтез ДН многоэлементной ФАР с вибраторными излучателями, когда в целевой функции на каждом шаге минимизации необходимо рассчитывать токовые распределения вибраторов с учетом взаимного влияния, такая экономия компьютерного времени может существенно уменьшить общее время расчетов.

## 2. Двумерные задачи рассеяния электромагнитных полей на идеально проводящих объектах

В задачах проектирования антенных систем часто возникает необходимость учета влияния объекта установки (башни и мачты радио-телевизионных передающих центров, телекоммуникационных систем) на ДН в вертикальной и горизонтальной плоскости. В работе [6] показано, что для антенных систем вертикальной поляризации, размещаемых вблизи системы параллельных однородных протяженных цилиндрических объектов, оси которых параллельны плоскости поляризации антенной системы, асимптотическая оценка ДН в горизонтальной плоскости для дальней зоны может быть определена через поле рассеяния плоской волны на этой системе цилиндрических объектов. Практическая значимость такого подхода объясняется тем, что решение трехмерной задачи рассеяния возбуждающего поля сложной антенной системы на протяженных цилиндрических объектах намного сложнее решения двумерной задачи рассеяния плоской волны на контурах, образованных сечением цилиндрических объектов горизонтальной

плоскостью. Кроме того, при проектировании антенной системы заданные требования к ДН предъявляются именно для дальней зоны. С помощью такого подхода можно реализовать решение достаточно сложных инженерных задач [7]. Таким образом, решение двумерной задачи рассеяния плоской волны имеет важной практическое значение.

Рассмотрим задачу рассеяния поля антенной системы, вектор напряженности электрического поля которой параллелен осям цилиндрических объектов. Пусть оси объектов параллельны оси  $z$ , а сами объекты представляют собой идеально проводящие поверхности. Если эти поверхности удовлетворяют условию непрерывности Гельдера [4] – в любых точках  $p, q$  принадлежащих поверхности рассеивающего препятствия  $S$ , существуют векторы нормалей  $\vec{n}_p, \vec{n}_q$ , для которых выполняется неравенство

$$|\vec{n}_p - \vec{n}_q| \leq c|p - q|^\alpha, \quad (7)$$

где  $c, 0 < \alpha \leq 1$  – произвольные числа. В рассматриваемом варианте это условие должно быть трансформировано для контуров, образованных сечением объектов плоскостью, перпендикулярной оси  $z$ . Тогда для нахождения распределения поверхностных токов на системе  $N$  контуров  $L_m, m = \overline{1, N}$ , можно использовать ИУ I рода [3]:

$$E_z(x, y) = -\frac{i}{4} \sum_{m=1}^N \int_{L_m} j_{zm}(x', y') H_0^2(kr) dl', \quad (8)$$

где  $E_z(x, y)$  – скалярная компонента напряженности электрического поля, определяемая амплитудно-фазовым распределением (АФР) возбуждения проектируемой антенной системой;  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ ;  $H_0^2(kr)$  – функция Ганкеля второго рода нулевого порядка. Численное решение уравнения (8) дает возможность прогнозировать поведение (АФР) токов тех объектов, влияние которых может приводить к наибольшим искажениям поля излучения. Уменьшить такое влияние можно, например, изменением расположения проектируемой антенной системы относительно цилиндрических объектов. В частности, учет влияния поясов и опор башни (мачты) в общей структуре поля излучения антенной системы дает возможность синтеза АФР токов, формирующих ДН в наибольшей степени приближенной к заданной ДН.

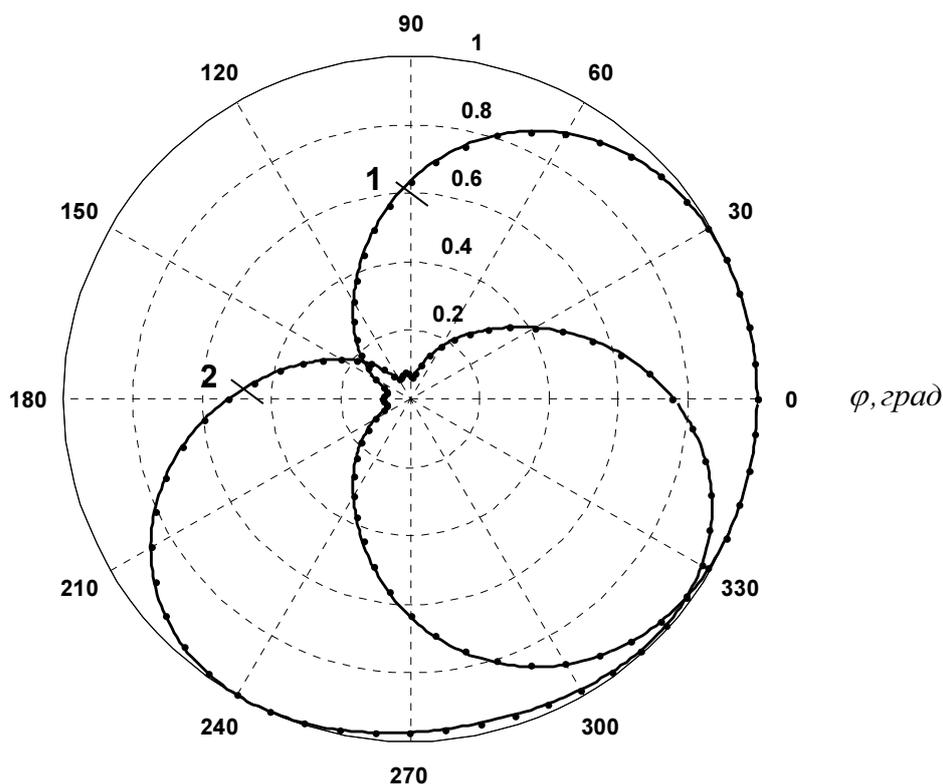
Численное исследование ММ рассматриваемой задачи может быть получено как прямыми, так и итерационными методами, которые имеют свои особенности и области применения. Для задач большой размерности широкое применение получили итерационные методы, например, минимизации обобщенных невязок, Ньютона – Гаусса. Используемый программный комплекс MATLAB предоставляет разработчикам ММ широкие возможности для составления программ с использованием эффективного представления матричных форм *Function Handle*, а рациональная организация блочной структуры СЛАУ с использованием неявных вложенных циклов дает возможность значительно повысить быстродействие программ. Важным достоинством итерационных методов является возможность пошагового контроля скорости сходимости и нормы невязки решения. Кроме того, предварительные численные эксперименты для однотипных задач могут дать практический интервал значений нормы невязки, при которых достигаются как удовлетворительная точность решения, так и приемлемое время расчетов.

Значительно расширяет возможности математического моделирования обратных задач рассеяния использование суперкомпьютеров. Большое количество вычислительных экспериментов, проведенных на кластере «СКИФ-Урал» Южно-Уральского государственного университета, показывают, что полный цикл моделирования электродинамических задач, включающий в себя формирование СЛАУ размерностью порядка  $1,3 \cdot 10^9$  элементов и решение прямым методом исключения Гаусса не превышает 3 минут. Перспективным направлением здесь является использование итерационных методов, позволяющих увеличить размерность задачи в десятки раз.

В отличие от гиперсингулярного ИУ Поклингтона (2) ИУ (8) относится к классу уравнений с интегрируемой логарифмической особенностью при совпадении координат точек наблюдения и интегрирования. Асимптотическое поведение функции Ганкеля при  $r \rightarrow 0$  приводит к следующему представлению ядра ИУ (8):

$$H_0^{(2)}(kr) \Big|_{r \rightarrow 0} \approx 1 - i \frac{2}{\pi} \ln \frac{k\gamma\Delta l}{4e}, \quad (9)$$

где  $\gamma = 0,5772\dots$  – постоянная Эйлера;  $\Delta l$  – интервал дискретизации контура  $L_m$  при выделении особенности. Подчеркнем, что здесь, как и в первом примере, вводится только лишь асимптотическая оценка ядра ИУ, оторванная от оценки поведения ядра для всех остальных интервалов, где возможно применение квадратурных формул с четко определенными оценками погрешности вычислений. Для устранения такой неопределенности для вычисления коэффициентов блочной СЛАУ будем для всех интервалов дискретизации контуров  $L_m$  использовать одну и ту же квадратурную формулу повышенной точности Гаусса-Лежандра с четным количеством узлов. В этом случае автоматически блокируется возможность вычислений  $NaN$ , количество узлов можно выбирать с помощью следующей адаптивной процедуры. Выбирается начальное количество узлов  $N_q$ , проводится численное исследование ММ. Далее количество узлов последовательно увеличивается на 2, новые результаты сравниваются с полученными на предыдущем шаге для проверки критерия заданной относительной погрешности вычислений. Большое количество вычислительных экспериментов показывает, что для количества узлов  $N_q = 16, 18, \dots, 32$  предложенная вычислительная схема работает на 15...18% быстрее, чем традиционный подход с выделением особенности (9). Сравнение производилось для одного и того же уровня относительной погрешности при решении тестовой задачи теории рассеяния электромагнитных полей – рассеяние плоской волны на идеально проводящем круговом цилиндре. Существенное сокращение времени исследования ММ рассматриваемой задачи обусловлено однородной структурой программного комплекса вычисления коэффициентов блочной СЛАУ и рациональной организацией формирования блоков СЛАУ. На рис. 2 приведены примеры расчета двух ДН электрического диполя, расположенного вблизи идеально проводящего эллиптического цилиндра (сплошные линии), большая ось эллипса параллельна оси  $x$ .



**Рис. 2.** ДН электрического диполя вблизи эллиптического цилиндра

Расстояние между фокусами эллипса  $0,65\lambda$ , эксцентриситет эллипса равен  $0,72$ ; координаты расположения диполя  $(x_i, y_i), i=1,2$ . ДН 1 соответствует координатам  $x_1 = 0,67\lambda; y_1 = 0$ , для ДН 2  $x_2 = 0,13\lambda; y_2 = -0,61\lambda$ . Точками на соответствующих ДН приведены результаты расчета ДН по аналитическим представлениям в виде рядов по функциям эллиптического цилиндра Матье, Матье-Бесселя, Матье-Ганкеля. Сравнение этих ДН показывает четкое соответствие результатов исследования ММ антенны вблизи цилиндрического объекта и известных тестовых расчетов.

### 3. Оценка эффективности ММ панельного излучателя с рефлектором конечной толщины

Для получения ДН, максимально приближенной к заданной ДН, и обеспечению требуемого КНД, в задачах проектирования антенных систем очень часто используются панельные излучатели. Панельные излучатели представляют собой полуволновые симметричные вибраторные антенны, расположенные над панелью-рефлектором, который из соображений минимизации массо-габаритных характеристик и уменьшения ветровой нагрузки обычно проектируется решетчатым. При этом ширина и частота расположения полос выбирается из условий необходимого коэффициента экранирования электромагнитного поля в теневой области рефлектора.

Разработка ММ такого излучателя опять приводит к необходимости использования строгой электродинамической постановки задачи формирования общего поля излучения

антенной системы, так как приближенные методы, основанные на приближении бесконечного идеально проводящего экрана, дают достаточно большие ошибки определения ДН. Необходимо подчеркнуть, что ограниченные размеры панельного излучателя приводят к тому, что вследствие дифракции электромагнитного поля вибраторных излучателей уровень поля излучения в теневой области (за панельным излучателем) может превышать заданный уровень ДН. Кроме того, характерной особенностью панельных излучателей является наличие металлической поверхности конечной толщины  $t$ , в некоторых случаях достаточно малой в сравнении с длиной волны  $\lambda$ . В первом приближении для математического моделирования поля излучения панельного излучателя можно считать, что поверхность панели-рефлектора является сплошной. В работе [7] показано, что переход к обоснованной геометрии решетчатой панели-рефлектора не приводит к заметному расхождению результатов, но существенно уменьшает временные затраты математического моделирования. С другой стороны, в ряде случаев толщина металлической поверхности может принимать большие значения, например, для обеспечения заданной механической прочности конструкции антенны. В связи с этим необходимо использование унифицированного подхода к построению ММ рассматриваемых антенн, общего для металлических поверхностей разной толщины  $t$  и произвольной геометрии. Кроме того, ММ исследуемых антенн должны учитывать влияние металлических поверхностей сложной формы на характеристики согласования в заданной полосе частот, поляризационные свойства поля излучения, параметры электромагнитной совместимости.

Рассмотрим метод построения ММ проектируемого панельного излучателя с использованием ИУ Фредгольма II рода, у которых ядро имеет интегрируемую слабую особенность. Вместе с тем, использование ИУ II рода затруднительно для очень малых значений  $t$ , особенно для плоских пластин. Это связано с тем, что для определенного расположения точек наблюдения и источников ядро ИУ стремится к нулю, что требует очень высокой точности вычисления подынтегральных функций для выбранного метода перехода к дискретной схеме. В связи с этим, большой практический интерес представляет исследование предельной величины  $t$ , при которой численное решение ИУ II рода для тонких металлических пластин произвольной геометрии соответствует заданным требованиям к точности и устойчивости решения для трехмерных задач. В качестве примера введем систему ИУ II рода для вибраторного излучателя:

$$\begin{aligned} \vec{j}_s &= \frac{1}{2\pi} \vec{n}_p \times \int_S \vec{j}_s \times \text{grad}' \varphi ds' - \frac{1}{2\pi} \vec{n}_p \times \int_{-h}^h I_x \vec{i}_x \times \text{grad}' \varphi dx'; \\ -\frac{4\pi ik}{Z_c} \int_S (j_{sx} K_{x'p} + j_{sy} K_{y'p} + j_{sz} K_{z'p}) ds' + \int_{-h}^h I_x K_{x'x} dx' &= -\frac{4\pi ik}{Z_c} E_x^i, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\vec{j}_s = \vec{i}_x j_{sx} + \vec{i}_y j_{sy} + \vec{i}_z j_{sz}$  – распределение поверхностного тока на рефлекторе;  $\varphi = \exp(-ikr)/r$ ;  $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + t^2}$ ; вибратор параллелен оси  $x$ ;  $I_x$  – АФР тока на вибраторе, которое определяется заданным возбуждением  $E_x^i$  и решением ИУ Поклингтона – второе слагаемое второго уравнения системы (10). В первом уравнении системы (10) точка наблюдения располагается на поверхности рефлектора, во втором уравнении – на вибраторе, при этом АФР тока  $I_x$  учитывает влияние поля рассеяния от

поверхности рефлектора на возбуждение вибратора. Это дает возможность анализировать характеристики согласования антенны в заданной полосе частот. Конкретный вид компонент ядра ИУ (10) определяется строгими электродинамическими соотношениями для векторов напряженности электрического и магнитного поля.

Численное решение системы (10) позволяет определить АФР как торцевых токов рефлектора, так и АФР токов на «теневого» поверхности, что значительно усложняет вычислительные процедуры анализа ММ антенны, но такое решение позволяет оценить тонкие эффекты взаимодействия в исследуемой антенне. Это особенно важно, если панельная антенна входит в состав антенной решетки. Определение минимального значения  $t/\lambda$ , при котором не нарушаются физически достоверные результаты моделирования, можно получить с помощью процедуры динамической стабилизации. Для этого выбирается начальное значение параметра  $t/\lambda$ , находится численное решение системы (10). Отметим, что для вычисления матричных коэффициентов, следующих из выбранного метода дискретизации задачи, здесь требуется использование квадратурных формул повышенной точности, вследствие особенностей поведения ядра ИУ. Вычислительные эксперименты показывают, что приемлемые результаты можно получить с помощью квадратурных формул Гаусса-Лежандра с числом узлов от 16 до 32, в зависимости от величины параметра  $t/\lambda$ . Затем производится пошаговое уменьшение параметра  $t/\lambda$  с одновременным контролем устойчивости численного решения, до резкого изменения АФР поверхностных токов рефлектора. Численные эксперименты показывают, что такой пошаговый процесс является достаточно монотонным и нарушение стабильного изменения токовых распределений начинаются со значений  $t/\lambda < 0,005$ . Например, для диапазона 880 – 1100 МГц минимальная толщина рефлектора равна 1,3...1,7 мм, что вполне соответствует параметрам практических конструкций панельных антенн. Таким образом, предложенная вычислительная схема повышенной точности совместно с рациональной организацией формирования блочной структуры СЛАУ для трехмерной задачи на основе вложенных неявных циклов дает возможность исследования широкого класса ММ проектируемой антенной системы. Полученные результаты хорошо согласуются с известными экспериментальными исследованиями.

#### **4. Коррекция амплитудной ДН ФАР в заданном секторе бокового излучения**

При проектировании антенных систем часто приходится учитывать ряд дополнительных ограничений, вызванных требованиями электромагнитной совместимости, особенно при расположении антенной системы на ограниченном объекте малых электрических размеров. Для компенсации влияния помеховых полей рассеяния, вызванных влиянием близкорасположенных объектов, соседних антенных систем, в амплитудной ДН необходимо минимизировать уровень боковых лепестков в заданном угловом секторе, в пределах которого проектируемая антенная система может принимать помеховые электромагнитные поля. Наиболее эффективно такая задача

может быть решена для ФАР, так как для таких антенных систем существует возможность адаптивно управлять фазовым распределением (ФР) с помощью аналоговых или дискретных фазовращателей. Применение дискретных диодных фазовращателей обеспечивает очень высокий темп переключений, при котором каждый такт соответствует своей ДН. Но при этом дискретный характер ФР не вполне соответствует оптимальному распределению, синтез которого может обеспечить наиболее точное воспроизведение требуемой ДН с минимальным уровнем в заданном угловом секторе. Амплитудное распределение (АР) возбуждения ФАР в большинстве случаев считается постоянным, так как формирование динамических АР является сложной практической задачей.

Рассмотрим следующую задачу. В рамках рассмотренных выше предположений о соответствии асимптотических решений двумерных и трехмерных задач представим ММ ФАР в виде системы  $N=32$  нитей электрического тока, параллельных оси  $z$ , образующих линейную антенную решетку вертикальной поляризации над идеально проводящим плоским рефлектором. В качестве исходного АФР возбуждения ФАР используем типовой вариант спадающего к краям АР и синфазное ФР. Расстояние между излучателями для сканирующей ФАР  $d=0,65\lambda$ , длина рефлектора  $L=20,94\lambda$ , толщина  $t$  выбирается аналогично изложенной выше адаптивной процедуре, при которой обеспечивается устойчивое численное исследование ММ. Введем АФР токов в виде  $j_{z,n}^{cm}(x,y,z)=I_n\delta(x-x_n)\delta(y-y_n)$ ,  $n=\overline{1,N}$ . При построении ММ задачи необходимо учитывать, что комплексная амплитуда  $I_n(p_n)$  определяется как сумма двух функций:

$$I_n(p_n)=I_n^{cm}(p_n)+I_n^s(p_n), \quad n=\overline{1,N}, \quad (11)$$

где  $p_n$  – координата расположения излучателя;  $I_n^{cm}(p_n)$  – собственное АФР излучателя с номером  $n$ , создаваемое внешним (сторонним) источником;  $I_n^s(p_n)$  – наведенная часть АФР, источником которой является поле рассеяния и поля других излучателей (взаимное влияние излучателей).

Введем скалярные функции  $u_{i,s}(x,y)$  – продольные компоненты поля излучения антенной системы  $\vec{E}_i$  и поля рассеяния  $\vec{E}_s$ , ( $E$ -поляризация):

$$\vec{E}=\{0,0,u(x,y)\}; \quad \vec{H}=\left\{-\frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \frac{i}{\omega\mu}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, 0\right\}, \quad (12)$$

где  $\omega$  – циклическая частота электромагнитного поля. Общее поле излучения антенной системы определим следующим образом:

$$u_i(p)=\sum_{n=1}^N\left[I_n^{cm}+I_n^s\right]G(p,q_n); \quad G(p,q_n)=-iH_0^2\left(kr_{pq_n}\right)/4. \quad (13)$$

Аналогично введем поле рассеяния, источниками которого являются распределения токов на контуре рефлектора  $L$ :

$$u_s(p)=\int_L j_s(q)G(p,q)dl_q. \quad (14)$$

Последовательно применяя к области построения решения вторую формулу Грина с учетом соответствующих граничных условий для полного поля  $u = u_i + u_s$  на контуре  $L$  и свойств непрерывности потенциала простого слоя, получим следующую систему сумматорно-интегральных уравнений I рода:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N I_n^s G(p, q_n) + \int_L j_s(q) G(p, q) dl_q = 0; \quad p \in p_n; \quad n = \overline{1, N}; \\ \sum_{n=1}^N I_n^s G(p, q_n) + \int_L j_s(q) G(p, q) dl_q = - \sum_{n=1}^N I_n^{cm} G(p, q_n); \quad p \in L. \end{aligned} \quad (15)$$

Функция Грина в (15) имеет логарифмическую особенность, поэтому все условия существования и непрерывности решения удовлетворяют требованиям для интегральных уравнений Фредгольма I рода. Таким образом, аналогично рассмотренным выше примерам, на первый план выходят вопросы достижения заданной точности вычислений при минимальных затратах компьютерного времени. После решения системы (15) асимптотическая оценка поля излучения антенной системы в дальней зоне, и в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ , определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} u = \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \exp(-i\pi/4) \left[ \sum_{n=1}^N (I_n^{cm} + I_n^s) \exp(-ik[x_n \cos \varphi + y_n \sin \varphi]) + \right. \\ \left. + \int_L j_s(q) \exp(-ik[x_q \cos \varphi + y_q \sin \varphi]) dl_q \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\varphi$  – азимутальный угол расчета ДН. Коррекция ФР производится на основании минимизации целевой функции следующего вида [8]:

$$\Phi(\psi) = \sum_{\varphi \in \Phi_{zl}} |F(\varphi) - F^*|^2 + w \sum_{\varphi \in \Phi_{nod}} [F(\varphi) - F^*]^+ \rightarrow \min, \quad (17)$$

где вектор  $\psi = \arg I^{cm}$  – фазовое распределение возбуждения ФАР;  $F(\varphi)$  – нормированная амплитудная ДН ФАР, определяемая из (16);  $F^*$  – требуемая амплитудная ДН с подавлением бокового излучения в секторе азимутальных углов  $\Phi_{nod}$ ;  $\Phi_{zl}$  – сектор углов, занимаемый главным лепестком ДН;  $w$  – адаптивный весовой коэффициент, регулирующий вклад в целевую функцию отклонений только в области главного лепестка, символ  $[ ]^+$  означает суммирование только положительных отклонений от заданного уровня бокового излучения в секторе  $\Phi_{nod}$ .

Следовательно, на каждом шаге процедуры минимизации целевой функции  $\Phi(\psi)$  производится решение системы уравнений (15), поэтому повышенные требования к точности и скорости вычислений для рассматриваемой задачи имеют принципиальное значение. Вычислительные эксперименты показывают, что приемлемые результаты можно получить с помощью квадратурных формул Гаусса-Лежандра с числом узлов от 16 до 32, в зависимости от величины параметра  $t/\lambda$ . Для минимизации целевой функции  $\Phi(\psi)$  используются программы *fminsearch* и *fminunc* системы MATLAB.

На рис. 3 приведены результаты коррекции нормированной амплитудной ДН с подавлением бокового излучения в секторе углов  $4,2^\circ < \varphi < 10^\circ$ .



погрешностей для однородного характера вычислительных процедур. При этом отмечается заметное уменьшение времени вычислений, что представляет практический интерес при проведении очень большого количества циклических расчетов ДН, особенно при решении СЛАУ высоких порядков, проведении оптимизации поля излучения антенной системы.

2. Рациональная организация формирования блочной структуры СЛАУ, к которым редуцируются ИУ, существенно ускоряет процесс заполнения матриц ММ. Это расширяет возможности математического моделирования сложных антенных систем. Сравнение полученных результатов с известными тестовыми решениями показывает высокую эффективность и универсальность предложенных вычислительных схем повышенной точности.

## Литература

1. Ильинский, А.С. Математические модели электродинамики / А.С. Ильинский, В.В. Кравцов, А.Г. Свешников — М: Высшая школа, 1991. — 224 с.
2. Хижняк, Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. — Киев: Наукова думка, 1986. — 280 с.
3. Вычислительные методы в электродинамике / Под ред. Р. Митры. М.: Мир, 1977. — 488 с.
4. Колтон, Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. — М.: Мир, 1987. — 312 с.
5. S Sophocles J. Orfanidis. Electromagnetic Waves and Antennas. — 2008. ~ [www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa](http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa).
6. Войтович, Н.И. О соответствии асимптотических решений двумерных и трехмерных задач в антенной технике / Н. И. Войтович, А. Б. Хашимов // Радиотехника и электроника. — 2010. — Т.55, № 12. — С. 1471-1476.
7. Воробьев, М.С. Особенности диаграммы направленности антенной системы, расположенной на башне / М.С. Воробьев, Л. П. Кудрин, А.П. Медведев, А.Б. Хашимов // Электросвязь. — 2014. — № 1. — С. 23–29.
8. Малакшинов, Н.П. Численное решение некоторых задач прикладной электродинамики с применением методов аппроксимации и оптимизации / Н.П. Малакшинов Н.П., В.Г. Ерихов, В.Н. Гармаш, А.Н. Егоров // Сборник научно-методических статей по прикладной электродинамике. — М.: Высшая школа, 1980. — Вып. 4. — С. 68–94.

Хашимов Амур Бариевич, канд.физ.-мат. наук, доцент кафедры конструирования и производства радиоаппаратуры, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); [xab@kirg.susu.ac.ru](mailto:xab@kirg.susu.ac.ru).

Салихов Ринат Рафикович, главный конструктор ООО «НПО РТС», (г. Челябинск); [sal\\_gr@mail.ru](mailto:sal_gr@mail.ru).

Альметов Руслан Салаватович, студент кафедры конструирования и производства радиоаппаратуры, Южно-Уральский государственный университет (г. Челябинск); [ruslannss@mail.ru](mailto:ruslannss@mail.ru).

*Поступила в редакцию 9 апреля 2014 г.*

## USING OF THE HIGH PRECISION NUMERICAL TECHNIQUES FOR ANTENNA SYSTEM DESIGN

**A.B. Khashimov**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation, xab@kipr.susu.ac.ru.

**R.R. Salikhov**, JSC «NPO RTS», Chelyabinsk, Russian Federation, sal\_rr@mail.ru.

**R.S. Al'metov**, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation.

This paper proposes the some effective numerical methods for studing mathematical models of antenna system. Formulation of mathematical models is used the rigorous electromagnetic principles and equations. Using the high precision quadrature formulas for solving Pocklington's integral equation and special regularizing procedure is provided the stable modeling results with given accuracy and high speed.

*Keywords: mathematical model, integral equations, quadrature formulas of Gauss-Legendre.*

### References

1. Il'insky A.S., Kravtsov V.V., Sveshnikov A.G. *Matematicheskie modeli elektrodinamiki* [Mathematical Models of the Electromagnetics], Moscow, Vysshaya Shkola, 1991, 224 p.
2. Khizhnyak N.A. *Integralnyie uravneniya makroskopicheskoi elektrodinamiki* [Integral Equations of Electromagnetics], Kiev, Naukova dumka, 1986, 280 p.
3. *Computing Techniques for Electromagnetics*. Edited by R. Mittra. Pergamon Press. Oxford, New York, Toronto, Sydney, Braunschweig. 1973. – 488 p.
4. Colton D., Kress R. *Integral Equation Method in Scattering Theory*. John Wiley & Sons. New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore. 1983. – 312 p.
5. Sophocles J. Orfanidis. *Electromagnetic Waves and Antennas*. – 2008. ~ [www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa](http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa).
6. Voitivich N.I., Khashimov A.B. On the Correspondence of Asymptotic Solutions to 2D and 3D Problems in Antenna Engineering, *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2010, Vol. 55, No. 12, pp. 1374–1379. Pleiades Publishing, Inc., 2010.
7. Vorob'ev M.S., Kudrin L.P., Medvedev A.P., Khashimov A.B. Osobennosti diagrammy napravlenosti antennoi sistemy, raspolozhennoi na bashne [Radtion Pattern Features of the Antenna System Disposed on a Tower] // *Elektrosvyaz*. – 2014. – № 1. – pp. 23–29.
8. Malakshinov N.P., Erikhov V.G., Garmash V.N., Egorov A.N. Chislennoe reshenie nekotoryh zadach prikladnoi elektrodinamiki s primeneniem metodov approksimatsii i optimizatsii // *Sbornik nauchno-metodicheskikh statei po prikladnoi elektrodinamike*. – Moscow, Vysshaya Shkola, 1980. – pp. 68–94.

*Received 9 April 2014.*