

## КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ ФЛЮИДОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

*Н. Равшанов, Н.М. Курбонов*

Для ускорения разработки нефтегазовых месторождений, повышения их технико-экономических показателей с целью максимального извлечения продуктов из старых нефтегазовых залежей, необходимо проведение комплексных исследований с помощью математического инструментария. Примером такого математического аппарата является триада «математическая модель, численный алгоритм и программно-инструментальный комплекс» для реализации задачи и проведения вычислительных экспериментов на ЭВМ при различных входных технологических параметрах объекта исследования. В настоящей работе рассматриваются математическая модель, консервативный численный алгоритм и программное средство для проведения вычислительных экспериментов, разработанные на основе основных законов гидродинамики. Созданные математическое и программное обеспечения служат цели исследования, прогнозирования и принятия решений по разработке и проектированию нефтяных и газовых месторождений. Также в работе приведены результаты вычислительных экспериментов в виде графиков при неустановившейся фильтрации флюидов в пористых средах.

*Ключевые слова:* компьютерное моделирование, численный метод, вычислительный эксперимент, пористая среда, флюид, программное средство.

### Введение

На настоящем уровне научно-технического прогресса ведущую роль в энергетическом и сырьевом балансе мирового сообщества играют нефтеуглеводороды. Для удовлетворения нужд реального сектора экономики этим ресурсом необходимо ускорение процессов проектирования, разработки и ввода в действие новых нефтяных и газовых месторождений, а также наиболее полное извлечение продуктов из старых залежей.

Достижение указанной цели невозможно без разработки соответствующих математических моделей, эффективных консервативных конечно-разностных методов и программных средств для комплексного исследования процессов, происходящих при разнообразных естественных и искусственных условиях воздействия на продуктивные пласты.

В нефтепромысловой практике для поддержания пластового давления широко используется закачка сухого, попутного газа в нефтяной пласт. С другой стороны, границы нефтяных залежей связаны с естественным напором водных пластов, что в некотором смысле повышает энергию разрабатываемого пласта. Тем самым на нефтяную залежь воздействуют силы с двух сторон: с одной стороны — сила закачиваемого газа, с другой стороны — сила напора грунтовых вод.

Поддерживая давление в пласте, эти силы увеличивают время бескомпрессорной эксплуатации нефтеуглеводородных пластов. Однако они могут отрицательно влиять на обводненные эксплуатационные скважины. В связи с этим возникает задача о необходимости определения значений дебитов эксплуатационных и нагнетательных скважин и их регулирования. А это уже непосредственно связано с разработкой математических моделей, адекватно описывающих указанные процессы и с созданием соответствующих алгоритмов, а также программно-инструментальных средств для проведения вычислительных экспериментов, в том числе на высокопроизводительных платформах. Матема-

тические модели этих сложных процессов, происходящих в пластовых условиях, основаны на методах механики многофазных сред. Они, как правило, формулируются в виде задач типа Стефана.

Конструктивная системная методология математического моделирования и вычислительный эксперимент необходимы для подробного и глубокого изучения процесса фильтрации жидкости и газа в многослойных системах. Так как в них изменяется состояния объекта по пространственной и временной переменным, а так же имеет место переход энергии из одного вида в другой.

В настоящей статье проведен краткий анализ ряда работ, посвященных моделированию процесса массопереноса в пористых средах, и дана их критическая оценка. Приведена постановка задачи трехфазной фильтрации при воздействии на продуктивный пласт объемом газа и продвижения жидкости. Рассматриваются полученные математическая модель и консервативный численный алгоритм решения задачи. Приведены результаты вычислительных экспериментов, проведенных с помощью программного обеспечения, реализующего разработанную модель и алгоритм расчёта, и дан анализ полученных результатов.

Надо отметить, что проблемами моделирования с целью исследования процесса массопереноса в пористых средах занимаются многие исследователи. К настоящему времени получен ряд значительных теоретических и прикладных результатов.

В работе [1] предлагается математическая модель течения в нано-пористых породах. В математической модели предполагается, что фильтрационный слой состоит из двух компонентов: трещиновато-пористой среды и специфических органических включений, состоящих из керогена, содержащих большую часть жидкости: нефти и газа. Вывод модели процесса основан на гипотезе, что проницаемость включений существенно зависит от градиента давления.

Усовершенствованная математическая модель для неравновесных двухфазных (например, вода – масло) потоков в пористых средах приведена в работе [2]. Полученные результаты проведенных расчетов сопоставлены с экспериментальными данными.

В работе [3] приведена модель процесса фильтрации многокомпонентных сред, в которой относительная фазовая проницаемость газовой фазы заменена новым выражением, учитывающим влияние вязкости, плотности и капиллярного эффекта смеси.

Изучение капиллярных давлений, соответствующих треугольному тензору капиллярной диффузии в трехфазной жидкости рассмотрено в работе [4]. Приведенная система — интегродифференциальная, так как искомыми являются суммарный расход и распределение фазовых насыщенных в условиях заданного перепада давления в одной из фаз на границах области течения. Показано, что в задаче капиллярного вытеснения вырождающаяся система может быть исследована на основе специального принципа максимума.

В работе [5] приведена математическая модель для разработки нефтегазовых месторождений с учетом вероятностного распределения параметров процесса.

Проблемы построения интегрированных (комплексных) математических моделей фильтрации флюидов в пластах и течения газожидкостных смесей в нефтегазосборных сетях трубопроводов рассмотрены в работе [6]. Моделирование такой комплексной системы определяется как процесс вычисления обобщенного решения начально-краевой задачи для системы уравнений, описывающей реальные физические процессы в нефте-

носных пластах, стволах (лифтах) скважин и наземных нефтегазосборных сетях трубопроводов. Предложены и исследованы методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений, получаемых после дискретной (сеточной) пространственно-временной аппроксимации начально-краевых задач рассматриваемого класса.

Вопросы математического моделирования процесса неизотермической фильтрации в пористой среде в случае, когда задан полный расход смеси  $v = v(t)$  рассматриваются в работе [7].

В работе [8] рассматривается задача о распространении поля давления в низкопроницаемой пористой среде с двумя скважинами, которые соединены техногенной трещиной гидроразрыва. Получено приближенное численное решение этой задачи.

В работе [9] рассмотрена задача переноса в пористой среде трехфазной смеси «вода – газ – нефть» в случае, когда вода содержит мелкодисперсную газовую фазу в виде пузырьков микро- или наноразмеров. Предполагается, что перенос пузырьков, в основном, определяется течением дисперсной фазы (воды). При этом крупные скопления газовой фазы в поровом пространстве, а также вода и нефть переносятся в соответствии с модифицированным законом Дарси для многофазных смесей. Построена математическая модель движения смеси, когда основные фазы (вода, газ, нефть) подчиняются уравнениям фильтрации, а мелкодисперсная газовая фаза описывается кинетическим уравнением типа Больцмана.

Задача фильтрации трех вязких, несжимаемых и взаимно несмешивающихся жидкостей в пористой среде без учета массовых сил и капиллярных давлений между фазами рассмотрена в работе [10]. Там же получено решение для трехфазного течения, аналогичное решению Баклея—Левретта для двух фаз, и показано, что характер распределения насыщенностей существенно зависит от начального насыщения пористого пласта и фазового состава нагнетаемой смеси.

В работе [11] численно решается и исследуется задача одномерной трехфазной фильтрации в неоднородном пласте с учетом растворимости газа в нефтяной и водной фазах, сжимаемости фаз и пористой среды, а также силы тяжести.

Анализ указанных источников показал, что в исследованиях авторов не рассмотрен процесс двухстороннего вытеснения нефти газом и водой с двух сторон, в результате которого образуются зоны чистого газа, смеси нефти – газа – воды, чистой нефти. В настоящей работе предприняты усилия для восполнения данного пробела. Как было упомянуто выше, математическую модель процесса, происходящего в пластовых условиях, необходимо сформулировать на основе положений механики многофазных сред в виде задачи типа Стефана с неизвестными границами фаз.

Обычно, при моделировании таких процессов используются два принципиально различных подхода. В первом случае, строятся модели поршневого вытеснения с четким выделением границы вытесняемой и вытесняющей фаз, а во втором — строятся модели непоршневого вытеснения без четкого выделения границы.

Во втором случае, считается, что в каждой точке пласта имеется определенное количество из всех фаз, но некоторые из них имеют насыщенность больше, чем остальные и участвуют в движении, а остальные считаются в среде без движения. Таким образом, образуются зоны чистого газа, смеси нефти – газа – воды, чистой нефти.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим сложные динамические процессы, происходящие в пластовых условиях при двухстороннем вытеснении нефти газом и водой в одномерной постановке в условиях пренебрежения капиллярными давлениями между фазами, растворимостью газа и гравитационными силами. С учетом выказанного, представим для простоты понимания сути рассматриваемого процесса, пласт, в следующем виде (рис. 1). Здесь  $\Gamma$  — газ,  $\text{в}$  — вода,  $q_\Gamma$  и  $q_{\text{ж}}$  — соответственно интенсивности работы нагнетательной и эксплуатационной скважин.

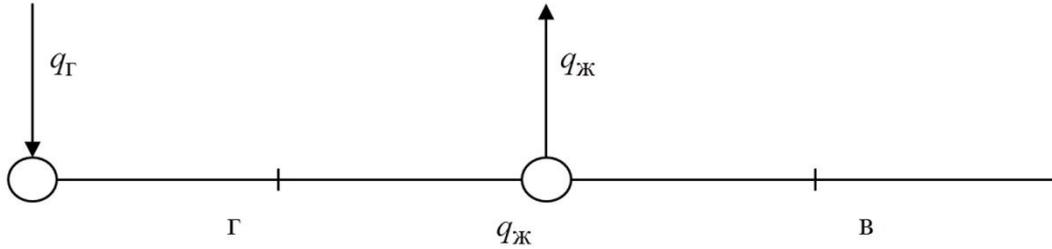


Рис. 1. Продуктивный пласт

Тогда, используя законы газогидродинамики, можно сформулировать математическую модель процесса воздействия на пласт объемом газа и продвижения жидкости в пласте, которая приводится к решению следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 P^2}{\partial x^2} = \frac{K \rho_{\text{н}} RTZ \mu_{\Gamma}}{K_{\Gamma} P_{\text{н}} \mu_{\text{н}} P} \frac{\partial P^2}{\partial \tau}, \quad 0 < x < \frac{l(\tau)}{L}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} (PS_{\Gamma}) + B \frac{\partial}{\partial \tau} (S_{\text{н}} + B_{\text{вн}} + S_{\text{в}}), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( K_{\text{н}} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = B \frac{\partial S_{\text{н}}}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( K_{\text{в}} \frac{\partial P}{\partial x} \right) = B \frac{\mu_{\text{в}}}{\mu_{\text{н}}} \frac{\partial S_{\text{в}}}{\partial \tau}, \quad \frac{l(\tau)}{L} < x < 1, \\ S_{\text{н}} + S_{\text{в}} + S_{\Gamma} = 1, \end{cases} \quad (2)$$

$$P(x, \tau) = f(x, \tau), \quad 1 < x < \infty, \quad \tau > 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial P^2}{\partial x} \right|_{x=0} = -\alpha \frac{L}{P_{\text{н}}} q_{\Gamma}, \quad (4)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\zeta_{\Gamma}+0} - \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\zeta_{\Gamma}-0} = \beta \frac{L}{P_{\text{н}}} q_{\text{ж}}, \quad (5)$$

$$\left. \frac{K_{\Gamma} P_{\text{н}}}{2 \rho_{\Gamma} RTZ} \frac{\partial P^2}{\partial x} \right|_{x=\frac{l(\tau)}{L}-0} = K \left( \frac{\rho_{\text{н}} K_{\text{н}}}{\mu_{\text{н}}} + \frac{\rho_{\text{в}} K_{\text{в}}}{\mu_{\text{в}}} + \frac{K_{\Gamma} P_{\text{н}} P}{RTZ \mu_{\Gamma}} \right) \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=\frac{l(\tau)}{L}+0}, \quad (6)$$

$$\frac{dl}{d\tau} = - \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=\frac{l(\tau)}{L}+0}, \quad (7)$$

$$P_{\Gamma} \Big|_{x=\frac{l(\tau)}{L}-0} = P_{\text{н}} \Big|_{x=\frac{l(\tau)}{L}+0}, \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} P(x, 0) = P_n, S_n(x, 0) = S_n^0, S_r(x, 0) = S_r^0, \\ S_b(x, 0) = S_b^0, l(0) = l^0, 0 < x < 1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

В формулах (1) – (9) приняты следующие обозначения:  $P(x, \tau)$  — давление;  $S_r, S_n, S_b$  — насыщенность породы газом, нефтью и водой;  $K$  — абсолютная проницаемость породы;  $K_r, K_n, K_b, \mu_r, \mu_n, \mu_b$  — соответственно фазовые и вязкости газа, нефти и воды;  $P(x, 0) = P_n, S_r(x, 0) = S_r^0, S_n(x, 0) = S_n^0, S_b(x, 0) = S_b^0$  — соответственно начальные распределения давления, газонасыщенности, нефтенасыщенности и водонасыщенности;  $\rho_r, \rho_n, \rho_b$  — соответственно плотность газа, нефти и воды;  $R$  — газовая постоянная;  $T$  — абсолютная температура;  $Z$  — сжимаемость газа;  $P_n$  — начальное пластовое давление;  $m$  — пористость пласта;  $\zeta_i$  — внутренняя особая точка (нагнетательная или эксплуатационная скважина);  $x=l(\tau)$  — граница раздела;  $L$  — длина пласта;  $q_r, q_n$  — соответственно интенсивности работы нагнетательной и эксплуатационной скважин;  $\alpha, \beta$  — некоторые постоянные величины для приведения в размерность.

Таким образом, получена замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая функционирование системы «пласт – скважина», которая состоит из трех частей: первая описывает функционирование воздействия через нагнетательные скважины, вторая описывает динамику продвижения смеси нефти, воды и газа в пласте, а третья динамику продвижения краевой воды.

## 2. Метод решения

Для численного решения рассматриваемой задачи применим основные идеи метода выпрямления фазовых фронтов.

Пусть требуется найти функции  $P(x, \tau), S_r(x, \tau), S_n(x, \tau), S_b(x, \tau), l(\tau)$ , удовлетворяющие условиям (1) – (9). Для решения данной задачи введем новые независимые переменные

$$\xi = \frac{x}{l(\tau)} \text{ и } \zeta = 1 + \frac{x-l(\tau)}{1-l(\tau)}$$

и получим:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 P^2}{\partial \xi^2} &= \frac{\lambda l(\tau)}{P} \left[ l(\tau) \frac{\partial P^2}{\partial \tau} - l'(\tau) \xi \frac{\partial P^2}{\partial \xi} \right], 0 < \xi < 1, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_n \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) &= (1-l(\tau))^2 \left[ \frac{\partial (PS_r)}{\partial \tau} + B \frac{\partial}{\partial \tau} (S_n + CS_b) \right] - \\ &- (1-l(\tau))(2-\zeta) l'(\tau) \left[ \frac{\partial (PS_r)}{\partial \tau} + B \frac{\partial}{\partial \tau} (S_n + CS_b) \right], \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_n \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) &= B(1-l(\tau))^2 \left[ \frac{\partial (S_n)}{\partial \tau} - l'(\tau) \frac{2-\zeta}{1-l(\tau)} \frac{\partial S_n}{\partial \zeta} \right], \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_b \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) &= B(1-l(\tau))^2 \frac{\mu_b}{\mu_n} \left[ \frac{\partial S_b}{\partial \tau} - l'(\tau) \frac{2-\zeta}{1-l(\tau)} \frac{\partial S_b}{\partial \zeta} \right], \\ S_r + S_n + S_b &= 1, 0 \leq \zeta \leq 1, P(L, \tau) = 1, l(\tau) \leq x \leq L. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial P^2}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -\alpha_n q_r, \quad (11)$$

$$\frac{dl}{d\tau} = - \left. \frac{\partial P}{l(\tau) \partial \xi} \right|_{\xi=l-0}, \quad (12)$$

$$D \left. \frac{\partial P^2}{l(\tau) \partial \xi} \right|_{\xi=l-0} = \frac{1}{1-l(\tau)} \left[ K \left( \frac{\rho_n K_n}{\mu_n} + \frac{\rho_b K_b}{\mu_b} + \frac{K_r P_n P}{RTZ \mu_r} \right) \right] \left. \frac{\partial P}{\partial \xi} \right|_{\xi=l+0}, \quad (13)$$

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq x \leq l(\tau),$$

где  $\lambda = \frac{K \rho_n RZT \mu_r}{K_r P_n \mu_n P}$ ;  $B = \frac{\rho_n RZT}{P_n}$ ;  $C = \frac{\rho_b}{\rho_n}$ ;  $\alpha_n = \alpha \frac{l(\tau)L}{P_n}$ ;  $D = \frac{K_r P_n}{2\rho_r RZT}$ ;  $P_n$  — начальное рас-  
пределение функции состояния.

Система уравнений, описывающая сформулированную задачу, нелинейная относительно искомых функций  $l(\tau)$ ,  $P(x, \tau)$ ,  $S_n(x, \tau)$ ,  $S_b(x, \tau)$ ,  $S_r(x, \tau)$ . Поэтому получить точное аналитическое решение задачи невозможно. Для ее решения применяем метод конечной разности.

Дискретный алгоритм решения задачи (10) – (13) основан на применении интегро-интерполяционного метода, позволяющего построить консервативную разностную схему, которая удовлетворяет закону сохранения в каждом узле пространственно-временной сетки.

Для первого уравнения системы (10) запишем интегральный закон сохранения на отрезке  $\xi_{i-1/2} \leq \xi \leq \xi_{i+1/2}$ ,  $\xi_{i-1/2} = \xi_i - h/2$ ,  $x_i = ih$ :

$$\int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \frac{\partial^2 P^2}{\partial \xi^2} d\xi = \lambda l^2 \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \frac{1}{P} \frac{\partial P^2}{\partial \tau} d\xi - \lambda l l' \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \frac{\xi}{P} \frac{\partial P^2}{\partial \xi} d\xi. \quad (14)$$

В результате получаем следующую систему конечно-разностных уравнений:

$$A_i P_{i-1}^2 - C_i P_i^2 + B_i P_{i+1}^2 = -F_i, \quad i = \overline{2, N}. \quad (15)$$

В (15) коэффициенты трехточечных уравнений определяются из следующих выражений

$$A_i = 1 - \frac{\xi l h \lambda (l_k - \bar{l}_k)}{2P_i^0 \tau}, \quad B_i = 1 + \frac{\xi l h \lambda (l_k - \bar{l}_k)}{2P_i^0 \tau}, \quad C_i = 2 + \frac{h^2 l^2 \lambda}{\tau P_i^0}, \quad F_i = \frac{h^2 l^2}{\tau P_i^0} \lambda \bar{P}_i^2.$$

Применяя интегро-интерполяционный метод для второго уравнения системы (10), получим

$$\int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( K \frac{\partial P}{\partial \xi} \right) d\xi = (1-l)^2 \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} \left[ \frac{\partial (PS_r)}{\partial \tau} + B \frac{\partial}{\partial \tau} (S_n + CS_b) \right] d\xi -$$

$$-(1-l)l' \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} (2-\xi) \left[ \frac{\partial (PS_r)}{\partial \xi} + B \frac{\partial}{\partial \xi} (S_n + CS_b) \right] d\xi.$$

Для правых частей интеграла применяем теорему о среднем и получаем:

$$\int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i+1/2}} (2-\xi) \frac{\partial (PS_r)}{\partial \xi} d\xi = \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i-0}} (2-\xi) \frac{\partial (PS_r)}{\partial \xi} d\xi + \int_{\xi_{i+0}}^{\xi_{i+1/2}} (2-\xi) \frac{\partial (PS_r)}{\partial \xi} d\xi = (2-\xi_i) \int_{\xi_{i-1/2}}^{\xi_{i-0}} \frac{\partial (PS_r)}{\partial \xi} d\xi +$$

$$+(2-\xi_{i_2}) \int_{\xi_{i+0}}^{\xi_{i+1/2}} \frac{\partial (PS_r)}{\partial \xi} d\xi = (2-\xi_i) \frac{(PS_r)_i - (PS_r)_{i-1}}{2} + (2-\xi_{i_2}) \frac{(PS_r)_{i+1} - (PS_r)_{i_2}}{2};$$

$$\begin{aligned} & \int_{\varsigma_{i-1/2}}^{\varsigma_{i+1/2}} (2-\varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}}) d\varsigma = \int_{\varsigma_{i-1/2}}^{\varsigma_{i-0}} (2-\varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}}) d\varsigma + \\ & + \int_{\varsigma_{i+0}}^{\varsigma_{i+1/2}} (2-\varsigma) \frac{\partial}{\partial \varsigma} (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}}) d\varsigma = (2-\varsigma_1) \int_{\varsigma_{i-1/2}}^{\varsigma_{i-0}} \frac{\partial}{\partial \varsigma} (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}}) d\varsigma + \\ & + (2-\varsigma_2) \int_{\varsigma_{i+0}}^{\varsigma_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial \varsigma} (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}}) d\varsigma = (2-\varsigma_1) \frac{(S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_i - (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_{i-1}}{2} + \\ & + (2-\varsigma_2) \frac{(S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_{i+1} - (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_i}{2}. \end{aligned}$$

С учетом полученных результатов для второго уравнения системы (10) получаем

$$\begin{aligned} & \left[ K_{i-1/2} - h^2 (1-l) l' (2-\varsigma_i) \frac{S_{\tau_{i+1}}}{2} \right] P_{i-1} - \left[ K_{i-1/2} + K_{i+1/2} + (1-l)^2 \frac{h^2}{\tau} S_{\tau_i} + \right. \\ & \left. + h^2 (1-l) l' \frac{S_{\tau_i}}{2} (\varsigma_i - \varsigma_{i_2}) \right] P_i + \left[ K_{i+1/2} + h^2 (1-l) l' (2-\varsigma_{i_2}) \frac{S_{\tau_{i+1}}}{2} \right] P_{i+1} = \\ & = -(1-l)^2 \frac{h^2}{\tau} (\overline{PS}_{\tau})_i + (1-l)^2 Bh^2 \frac{(S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_i - (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_{i+1}}{\tau} - \\ & - h^2 (1-l) l' \left\{ B(2-\varsigma_1) \frac{(S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_i - (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_{i-1}}{2} + B(2-\varsigma_2) \frac{(S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_{i+1} - (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_i}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующую трехточечную систему уравнений

$$A_i P_{i-1} - C_i P_i + B_i P_{i+1} = -F_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (16)$$

В ((16) коэффициенты  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$ ,  $F_i$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} A_i &= K_{i-1/2} - h^2 (1-l) l' (2-\varsigma_i) \frac{S_{\tau_{i+1}}}{2}; \quad B_i = K_{i+1/2} + h^2 (1-l) l' (2-\varsigma_{i_2}) \frac{S_{\tau_{i+1}}}{2}; \\ C_i &= K_{i-1/2} + K_{i+1/2} + (1-l)^2 \frac{h^2}{\tau} S_{\tau_i} + h^2 (1-l) l' \frac{S_{\tau_i}}{2} (\varsigma_i - \varsigma_{i_2}); \\ F_i &= (1-l)^2 \frac{h^2}{\tau} (\overline{PS}_{\tau})_i + (1-l)^2 Bh^2 \frac{(S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_i - (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_{i+1}}{\tau} - \\ & - h^2 (1-l) l' \left\{ B(2-\varsigma_1) \frac{(S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_i - (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_{i-1}}{2} + B(2-\varsigma_2) \frac{(S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_{i+1} - (S_{\text{H}} + CS_{\text{B}})_i}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Применяя интегро-интерполяционный метод, для третьего уравнения системы (10), получаем

$$\int_{\varsigma_{i-1/2}}^{\varsigma_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial \varsigma} \left( K_{\text{H}} \frac{\partial P}{\partial \varsigma} \right) d\varsigma = B(1-l)^2 \int_{\varsigma_{i-1/2}}^{\varsigma_{i+1/2}} \frac{\partial S_{\text{H}}}{\partial \tau} d\varsigma - \frac{l'}{1-l} \int_{\varsigma_{i-1/2}}^{\varsigma_{i+1/2}} (2-\varsigma) \frac{\partial S_{\text{H}}}{\partial \varsigma} d\varsigma.$$

Для второго интеграла правых частей применяем теорему о среднем

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_{i-1/2}}^{\zeta_{i+1/2}} (2-\zeta) \frac{\partial S_{\text{H}}}{\partial \zeta} d\zeta = \int_{\zeta_{i-1/2}}^{\zeta_{i-0}} (2-\zeta) \frac{\partial S_{\text{H}}}{\partial \zeta} d\zeta + \int_{\zeta_{i+0}}^{\zeta_{i+1/2}} (2-\zeta) \frac{\partial S_{\text{H}}}{\partial \zeta} d\zeta = \\ & = (2-\zeta_1) \int_{\zeta_{i-1/2}}^{\zeta_{i-0}} \frac{\partial S_{\text{H}}}{\partial \zeta} d\zeta + (2-\zeta_2) \int_{\zeta_{i+0}}^{\zeta_{i+1/2}} \frac{\partial S_{\text{H}}}{\partial \zeta} d\zeta = (2-\zeta_1)(S_{\text{H}_{i-0}} - S_{\text{H}_{i-1/2}}) + (2-\zeta_2)(S_{\text{H}_{i+1/2}} - S_{\text{H}_{i+0}}) = \\ & = (2-\zeta_1) \left( \frac{S_{\text{H}_i} - S_{\text{H}_{i-1}}}{2} \right) + (2-\zeta_2) \left( \frac{S_{\text{H}_{i+1}} - S_{\text{H}_i}}{2} \right) = (2-\zeta_1) \frac{S_{\text{H}_i} - S_{\text{H}_{i-1}}}{2} + (2-\zeta_2) \frac{S_{\text{H}_{i+1}} - S_{\text{H}_i}}{2}, \end{aligned}$$

и получаем в итоге следующую систему конечно-разностных уравнений

$$\begin{aligned} & Bh^2(1-l)l' \frac{2-\zeta_1}{2} S_{\text{H}_{i-1}} - \left[ Bh^2(1-l)l' \frac{2-\zeta_1}{2} - Bh^2(1-l)l' \frac{2-\zeta_2}{2} - B \frac{h^2(1-l)^2}{\tau} \right] S_{\text{H}_i} - \\ & - Bh^2(1-l)l' \frac{2-\zeta_2}{2} S_{\text{H}_{i+1}} = K_{\text{H}_{i+1/2}}(P_{i+1} - P_i) - K_{\text{H}_{i-1/2}}(P_i - P_{i-1}) + B \frac{h^2(1-l)^2}{\tau} \bar{S}_{\text{H}_i}, \end{aligned}$$

которую можно записать в виде трехточечного уравнения относительно нефтенасыщенности

$$A_i S_{\text{H}_{i-1}} - C_i S_{\text{H}_i} + B_i S_{\text{H}_{i+1}} = -F_i. \quad (17)$$

В (17) коэффициенты полученного трехточечного уравнения определяются с помощью следующих выражений:

$$\begin{aligned} & A_i = Bh^2(1-l)l' \frac{2-\zeta_1}{2}; \quad B_i = -Bh^2(1-l)l' \frac{2-\zeta_2}{2}; \\ & C_i = Bh^2(1-l)l' \frac{2-\zeta_1}{2} - Bh^2(1-l)l' \frac{2-\zeta_2}{2} - B \frac{h^2(1-l)^2}{\tau}; \\ & F_i = K_{\text{H}_{i-1/2}}(P_i - P_{i-1}) - K_{\text{H}_{i+1/2}}(P_{i+1} - P_i) - B \frac{h^2(1-l)^2}{\tau} \bar{S}_{\text{H}_i}. \end{aligned}$$

Применяя аналогично интегро-интерполяционный метод для четвертого уравнения системы (10), получаем

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_{i-1/2}}^{\zeta_{i+1/2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( K_{\text{B}} \frac{\partial P}{\partial \zeta} \right) d\zeta = B(1-l)^2 \frac{\mu_{\text{B}}}{\mu_{\text{H}}} \int_{\zeta_{i-1/2}}^{\zeta_{i+1/2}} \frac{\partial S_{\text{B}}}{\partial \tau} d\zeta - \\ & - Bl'(1-l) \frac{\mu_{\text{B}}}{\mu_{\text{H}}} \int_{\zeta_{i-1/2}}^{\zeta_{i+1/2}} (2-\zeta) \frac{\partial S_{\text{B}}}{\partial \zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (18)$$

Для второго интеграла правых частей, применяя теорему о среднем, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\zeta_{i-1/2}}^{\zeta_{i+1/2}} (2-\zeta) \frac{\partial S_{\text{B}}}{\partial \zeta} d\zeta = \int_{\zeta_{i-1/2}}^{\zeta_{i-0}} (2-\zeta) \frac{\partial S_{\text{B}}}{\partial \zeta} d\zeta + \int_{\zeta_{i+0}}^{\zeta_{i+1/2}} (2-\zeta) \frac{\partial S_{\text{B}}}{\partial \zeta} d\zeta = \\ & = (2-\zeta_1) \int_{\zeta_{i-1/2}}^{\zeta_{i-0}} \frac{\partial S_{\text{B}}}{\partial \zeta} d\zeta + (2-\zeta_2) \int_{\zeta_{i+0}}^{\zeta_{i+1/2}} \frac{\partial S_{\text{B}}}{\partial \zeta} d\zeta = (2-\zeta_1)(S_{\text{B}_{i-0}} - S_{\text{B}_{i-1/2}}) + \\ & + (2-\zeta_2)(S_{\text{B}_{i+1/2}} - S_{\text{B}_{i+0}}) = (2-\zeta_1) \left( \frac{S_{\text{B}_i} - S_{\text{B}_{i-1}}}{2} \right) + (2-\zeta_2) \left( \frac{S_{\text{B}_{i+1}} - S_{\text{B}_i}}{2} \right). \end{aligned}$$

С учетом приведенного выше, получим следующую систему конечно-разностных уравнений

$$K_{B_{i+1/2}} \frac{P_{i+1} - P_i}{h} - K_{B_{i-1/2}} \frac{P_i - P_{i-1}}{h} - \delta_j q_B = hB(1-l)^2 \frac{\mu_B}{\mu_H} \frac{S_{B_i} - \bar{S}_{B_i}}{\tau} -$$

$$-hB(1-l)^2 \frac{\mu_B}{\mu_H} \frac{S_{B_i} - \bar{S}_{B_i}}{\tau} - hB(1-l)l' \frac{\mu_B}{\mu_H} \left[ (2 - \zeta_1) \frac{S_{B_i} - S_{B_{i-1}}}{2} + (2 - \zeta_2) \frac{S_{B_{i+1}} - S_{B_i}}{2} \right].$$

После некоторых преобразований, получим

$$\frac{\mu_B}{\mu_H} Bh^2(1-l)l' \frac{2 - \zeta_1}{2} S_{B_{i-1}} - \left[ \frac{\mu_B}{\mu_H} Bh^2(1-l)l' \frac{2 - \zeta_1}{2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_B}{\mu_H} Bh^2(1-l)l' \frac{2 - \zeta_2}{2} - \frac{\mu_B}{\mu_H} B \frac{h^2(1-l)^2}{\tau} \right] S_{B_i} - \frac{\mu_B}{\mu_H} Bh^2(1-l)l' \frac{2 - \zeta_2}{2} S_{B_{i+1}} =$$

$$= K_{B_{i+1/2}} (P_{i+1} - P_i) - K_{B_{i-1/2}} (P_i - P_{i-1}) + \frac{\mu_B}{\mu_H} B \frac{h^2(1-l)^2}{\tau} \bar{S}_{B_i}.$$

или

$$A_i S_{B_{i-1}} - C_i S_{B_i} + B_i S_{B_{i+1}} = -F_i. \quad (19)$$

В (19) коэффициенты определяются следующими равенствами:

$$A_i = \frac{\mu_B}{\mu_H} Bh^2(1-l)l' \frac{2 - \zeta_1}{2}, \quad B_i = -\frac{\mu_B}{\mu_H} Bh^2(1-l)l' \frac{2 - \zeta_2}{2},$$

$$C_i = \frac{\mu_B}{\mu_H} Bh^2(1-l)l' \frac{2 - \zeta_1}{2} - \frac{\mu_B}{\mu_H} Bh^2(1-l)l' \frac{2 - \zeta_2}{2} - \frac{\mu_B}{\mu_H} B \frac{h^2(1-l)^2}{\tau},$$

$$F_i = K_{B_{i-1/2}} (P_i - P_{i-1}) - K_{B_{i+1/2}} (P_{i+1} - P_i) - \frac{\mu_B}{\mu_H} B \frac{h^2(1-l)^2}{\tau} \bar{S}_{B_i},$$

где  $\zeta_{i_1} \in [\zeta_{i-1/2}, \zeta_{i-0}]$ ,  $\zeta_{i_2} \in [\zeta_{i+0}, \zeta_{i+1/2}]$  и принято  $\zeta_{i_1} = \xi - \frac{h_2}{4}$ ,  $\zeta_{i_2} = \xi + \frac{h_2}{4}$ .

Используя условия, при которых закачивается газ (10)

$$\frac{-3P_0^2 + 4P_1^2 - P_2^2}{2hl_k} = -\alpha_n q_r$$

и при  $i = 0$  находим на границе прогоночные коэффициенты

$$\alpha_1 = \frac{C_1 - 4B_1}{A_1 - 3B_1}, \quad \beta_1 = -\frac{B_1}{A_1 - 3B_1} \left( 2hl_k \alpha_n q_r + \frac{F_1}{B_1} \right).$$

Граница раздела определяется следующей формулой

$$l_k = \sqrt{l_k^2 - \frac{\tau}{h} (3P_{\zeta_i} - 4P_{\zeta_{i-1}} + P_{\zeta_{i-2}})}.$$

Исходя из условий (13), получаем

$$D \frac{3P_l^2 - 4P_{l-1}^2 + P_{l-2}^2}{2hl_k} = \frac{1}{2h(1-l_k)} \left[ \frac{K_r}{\mu_r} + \frac{K_H}{\mu_H} + \frac{K_B}{\mu_B} \right] (4P_2 - 3P_1 + P_3).$$

После некоторых преобразований будем иметь

$$\frac{(1-l_k)D}{l_k \left( \frac{K_r}{\mu_r} + \frac{K_H}{\mu_H} + \frac{K_B}{\mu_B} \right)} [3 - \alpha_l (4 - \alpha_{l-1})] P_l^2 +$$

$$+ \frac{(1-l_k)D}{l_k \left( \frac{K_r}{\mu_r} + \frac{K_H}{\mu_H} + \frac{K_B}{\mu_B} \right)} [\beta_{l-1} - \beta_l (4 - \alpha_{l-1})] = -[3 - (4 - \alpha_3) \alpha_2] P_1 + (4 - \alpha_3) \beta_2 - \beta_3.$$

Из условия (11) получаем  $P_i = P_1 = P$ , откуда относительно неизвестных давлений – квадратное уравнение

$$D_1 P^2 + D_2 P + D_3 = 0,$$

где

$$D_1 = \frac{(1-l_k)D}{l_k \left( \frac{K_r}{\mu_r} + \frac{K_n}{\mu_n} + \frac{K_b}{\mu_b} \right)} [3 - \alpha_l (4 - \alpha_{l-1})], \quad D_2 = 3 - (4 - \alpha_3) \alpha_2,$$

$$D_3 = \frac{(1-l_k)D}{l_k \left( \frac{K_r}{\mu_r} + \frac{K_n}{\mu_n} + \frac{K_b}{\mu_b} \right)} [\beta_{l-1} - \beta_l (4 - \alpha_{l-1})] - (4 - \alpha_3) \beta_2 - \beta_3.$$

Решая квадратное уравнение, находим в этой точке давления

$$P_{1,2} = \frac{-D_2 \pm \sqrt{D_2^2 - 4D_1 D_3}}{2D_1}.$$

Полученная нелинейная система уравнений решена методом прогонки в каждом шаге с применением метода простой итерации. При этом организуются внутренняя и внешняя итерации. Во внутренней за критерий точности при определении давлений берем

$$\max_i |P_i^{(S)} - P_i^{(S-1)}| < \varepsilon_1.$$

При определении нефтенасыщенности за критерий точности берем

$$\max_i |S_{n_i}^{(\sigma_1)} - S_{n_i}^{(\sigma_1-1)}| < \varepsilon_2.$$

При определении водонасыщенности за критерий точности берем

$$\max_i |S_{b_i}^{(\sigma_2)} - S_{b_i}^{(\sigma_2-1)}| < \varepsilon_3.$$

За критерий точности при определении продвижения границы раздела берем

$$|l_k^{\sigma_3} - \bar{l}_k^{(\sigma_3-1)}| < \varepsilon_4,$$

где  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — число итерационных процессов по давлению, насыщенности и продвижению границы раздела, а  $\varepsilon_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ), некоторые постоянные величины.

Здесь для определения фазовой проницаемости в одномерной и двухмерной постановках используются зависимости приведенные в работе [12].

Для определения количества извлеченной воды, нефти и газа, можно использовать обобщенный закон Дарси

$$Q_n = -A \frac{\kappa K_n}{\mu_n} \frac{P_n}{L} \text{grad} P, \quad Q_r = -A \frac{\kappa K_r}{\mu_r} \frac{P_n}{L} \text{grad} P, \quad Q_b = -A \frac{\kappa K_b}{\mu_b} \frac{P_n}{L} \text{grad} P.$$

Умножая объемные расходы фаз на соответствующие плотности и суммируя их, получаем массовый расход

$$Q_m^M = \rho_n Q_n + \rho_r Q_r + \rho_b Q_b = -A \kappa \frac{P_n}{L} \left( \frac{K_n}{\mu_n} \rho_n + \frac{K_r}{\mu_r} \rho_r + \frac{K_b}{\mu_b} \rho_b \right) \frac{\partial P}{\partial x} =$$

$$= -A \kappa \frac{P_n}{L} \left( \frac{K_n}{\mu_n} \rho_n + \frac{K_b}{\mu_b} \rho_b + \frac{K_r}{\mu_r} \frac{P_n P}{RTZ} \right) \frac{\partial P}{\partial x} = -A \kappa \frac{P_n}{L} \frac{\rho_n}{\mu_n} \left( K_n + \frac{\mu_n}{\rho_n} \frac{P_n}{\mu_r RTZ} K_r P + \frac{\mu_n}{\rho_n} \frac{\rho_b}{\mu_b} K_b \right) \frac{\partial P}{\partial x}.$$

Отсюда

$$Q_m^M = -A \kappa \frac{\rho_n P_n}{\mu_n L} K \text{grad} P.$$

Исходя из общего количества извлеченной жидкости, определяем отдельно нефть, газ и воду соответственно для внутренних галерей:

$$q_n = \frac{K_n(S_{n_i}, S_{b_i})}{2h} [-6P_i + 4(P_{i+1} + P_{i-1}) - (P_{i+2} + P_{i-2})],$$

$$q_r = \frac{A_{rn} P_i K_r(S_{n_i}, S_{b_i})}{2h} [-6P_i + 4(P_{i+1} + P_{i-1}) - (P_{i+2} + P_{i-2})],$$

$$q_b = \frac{A_{bn} K_b(S_{n_i}, S_{b_i})}{2h} [-6P_i + 4(P_{i+1} + P_{i-1}) - (P_{i+2} + P_{i-2})].$$

Когда галерея находится на левой границе, количества извлеченной жидкости для каждой фазы определяем следующими формулами

$$q_n = \frac{K_n(S_{n_i}, S_{b_i})}{2h} (-3P_0 + 4P_1 - P_2), \quad q_r = \frac{A_{rn} P_i K_r(S_{n_i}, S_{b_i})}{2h} (-3P_0 + 4P_1 - P_2),$$

$$q_b = \frac{A_{bn} K_b(S_{n_i}, S_{b_i})}{2h} (-3P_0 + 4P_1 - P_2).$$

Аналогичными формулами определяются количества извлеченных жидкостей для каждой фазы, когда галерея скважин находится на правой границе области определения.

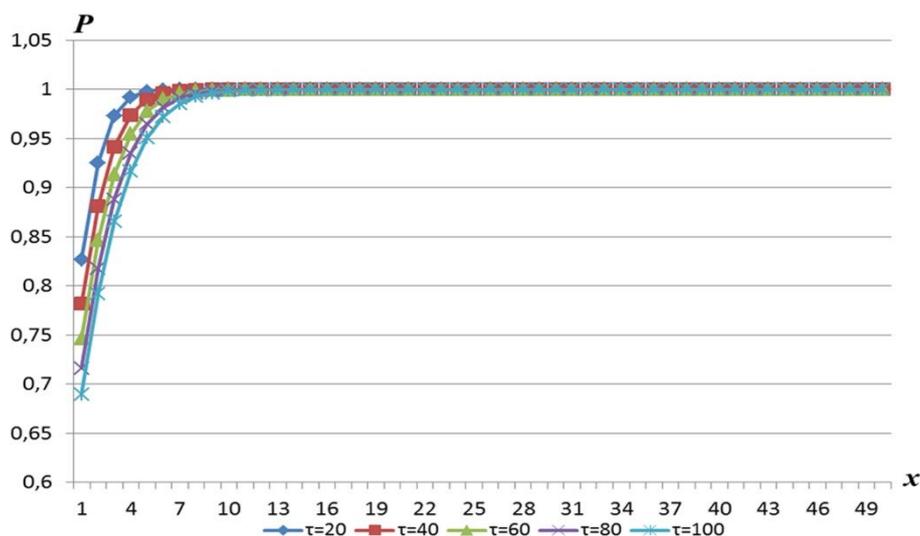
Таким образом, получены математическая модель и вычислительный алгоритм процесса совместной фильтрации нефти, газа и воды в пласте, при помощи которых можно изучать данный процесс при упругом расширении газовой зоны, а также при воздействии на нефтяной пласт газом.

### 3. Обсуждение результатов

На основе описанного алгоритма было разработано программное обеспечение для анализа динамического состояния и управления объектом с учетом совместного движения трехфазной среды при различных условиях функционирования пластовой системы. Программное обеспечение разработано на языке программирования Delphi для ОС Windows и включает в себя управляющий модуль для ввода данных, модуль произведения расчетов и модуль анализа и интерпретации результатов расчетов.

Вычислительные эксперименты проводили при следующих входных значениях программы: протяженность пласта  $L = 10$  км; мощность  $B = 6$  м; ширина  $H = 700$  м; вязкость нефти  $\mu_n = 4$  сП; количество добываемой жидкости  $q_m = 1000$  т/сутки;  $m = 0,2$ ;  $K = 0,1$  дарси;  $\mu_r = 0,2$  сП;  $P_n = 200$  ат;  $\rho_n = 0,85$  г/см<sup>3</sup>;  $R = 8,31$  Дж/(моль · К);  $T = 273$  К;  $Z = 40$ ;  $N = 50$ ;  $EPS = 0,0001$ .

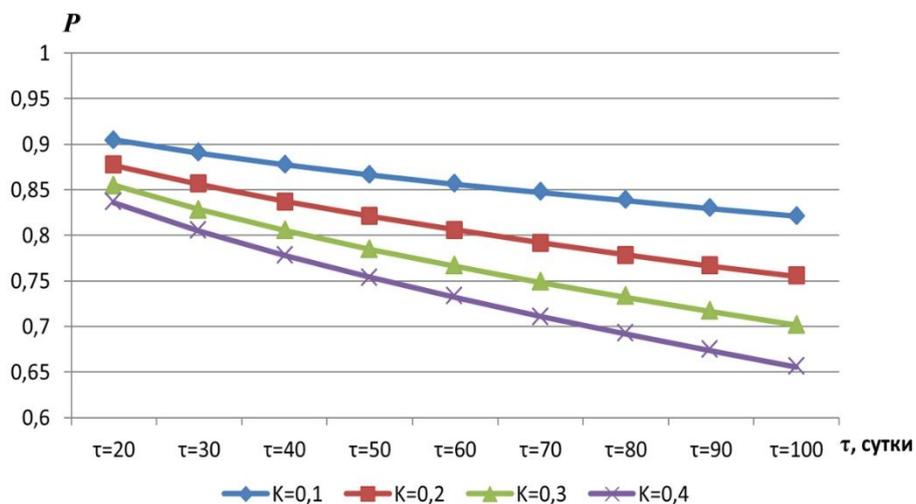
Результаты проведенных вычислительных экспериментов приведены в работах [13-15] и на рис. 2-7.



**Рис. 2.** Динамика перераспределения давления в пласте со временем (время в сутках)

В ходе экспериментов было принято, что система пластов разрабатывается одной галереей, расположенной в начале и в середине координат. Пласт разрабатывается при следующих краевых условиях: на левой границе  $K \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{x=0} = q_{ж}$  и на правой —  $P|_{x=1} = P_{н}$ , т.е. поддерживается начальное пластовое давление.

Как следует из рис. 2, с течением времени работы скважины давление внутри области фильтрации пропорционально снижается за счет отбора флюидов на границе. Такое снижение значения давления зависит от коэффициента фильтрации и пористости среды.



**Рис. 3.** Динамика перераспределения давления в пласте при различных значениях коэффициента фильтрации

Проведенные численные расчеты показали, что существенными параметрами, влияющими на технологию разработки добычи углеводородов из пластовых систем, являются коэффициент фильтрации и структура пористых пород (рис. 3).

Когда отбор флюидов происходит внутри области фильтрации (рис. 4–5) наблюдается симметричный перепад давления относительно местонахождения скважин.

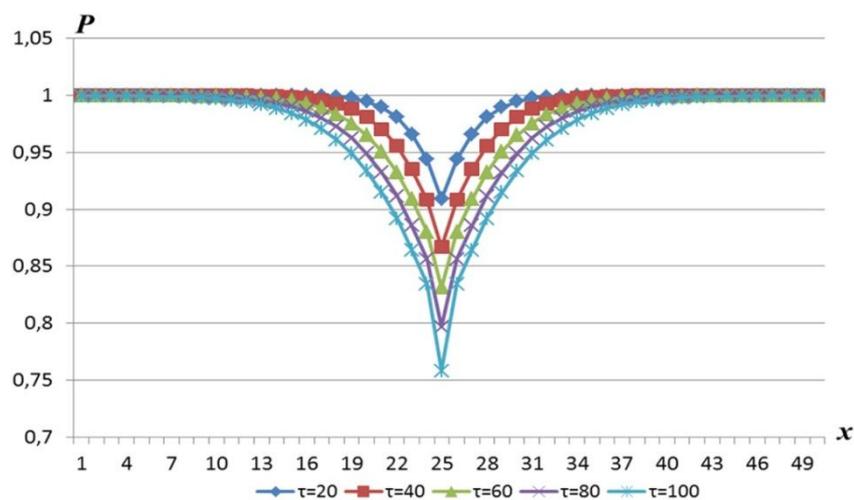


Рис. 4. Перераспределение давления в пласте (в сутках) при работе одной скважин

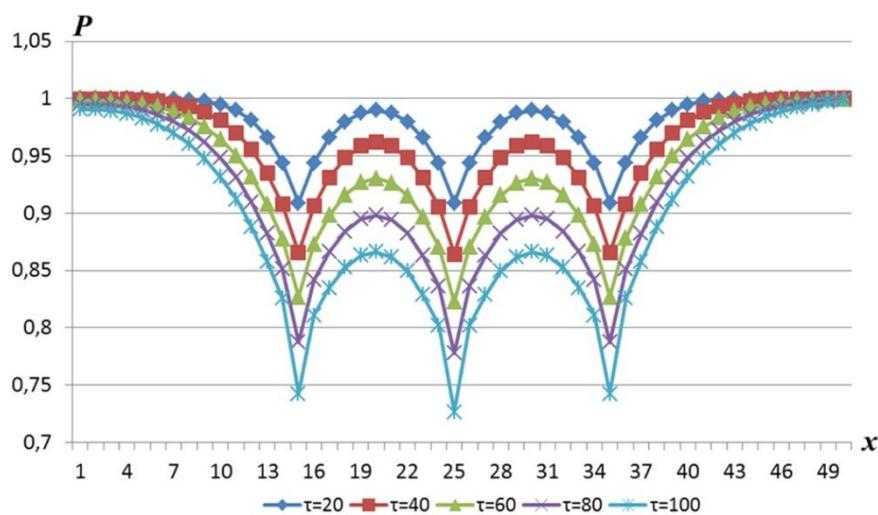


Рис. 5. Перераспределение давления в пласте (в сутках) при работе трех скважин

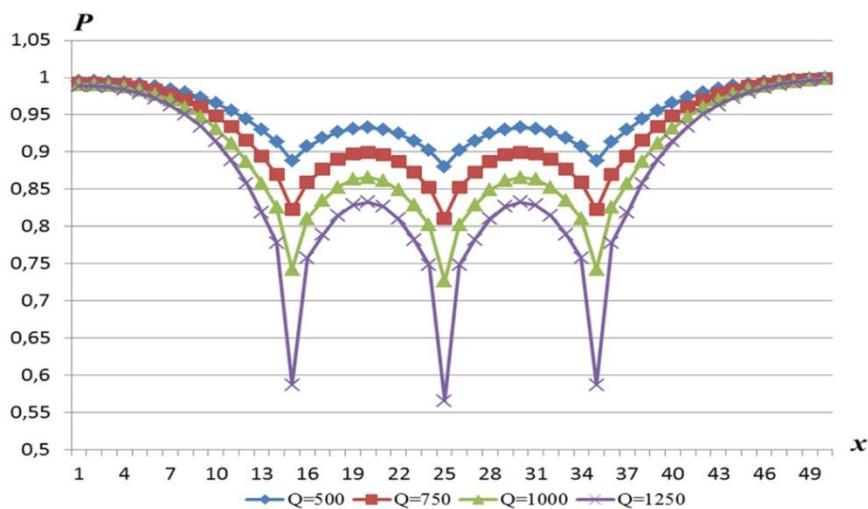


Рис. 6. Перераспределение давления в пласте при различных значениях дебитов в скважинах ( $\tau = 100$  сут.)

Вычислительные эксперименты были проведены при различных значениях дебитов скважин. Как следует из кривых на рис. 6, давление в фильтрационной области пропорционально уменьшается в зависимости от роста дебитов скважин.

Анализ полученных результатов проведенных численных экспериментов показывает, что при одинаковой интенсивности добычи падение давления на скважине быстрее при фильтрации нефти, чем при фильтрации с газом, а при рассмотрении в условиях наличия газа в составе нефти увеличивается текучесть смеси. Скорость падения давления на галерее при больших вязкостях нефти всё быстрее по времени, а при небольших вязкостях нефти — сначала быстрее, достигая некоторого небольшого значения, затем начинает падать.

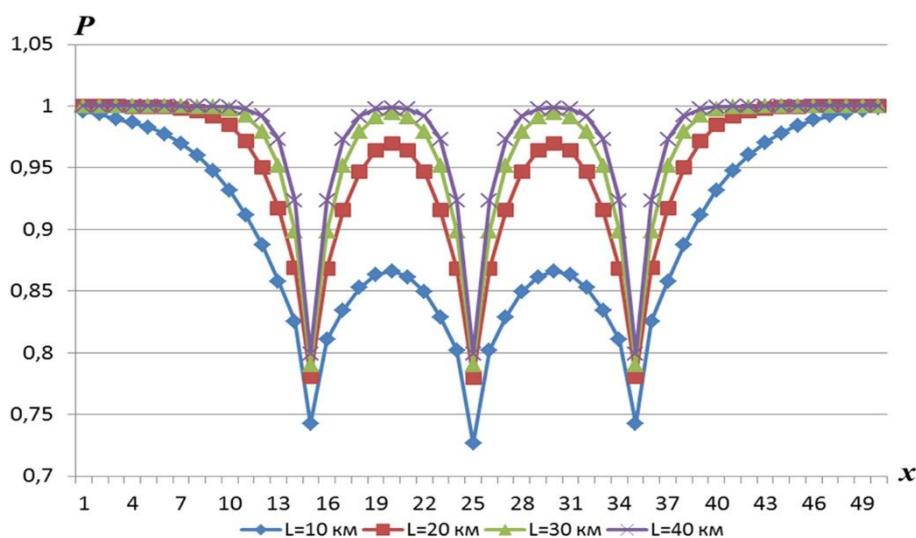


Рис. 7. Перераспределение давления в пласте при различных значениях длины пласта ( $\tau = 100$  сут.)

В целом, можно отметить, что динамика перераспределения давления пласта существенно зависит от мощности пласта. С увеличением мощности пласта давление в скважине и соседних точках уменьшается. А время эксплуатации продуктивного пласта (рис. 7) существенно зависит от его длины, мощности, числа скважин и их дебитов.

## Заключение

В качестве заключения можно отметить следующее. В настоящей работе были рассмотрены сложные динамические процессы, происходящие в пластовых условиях при двухстороннем вытеснении нефти газом и водой. Были рассмотрены модель и численный алгоритм решения задачи трехфазной фильтрации нефти, газа и воды в пористой среде при воздействии на продуктивный пласт объемом газа и продвижения жидкости. Для обоснования адекватности разработанных модели и алгоритма, согласно гидродинамическим законам взаимосвязанных систем, были проведены вычислительные эксперименты на ЭВМ.

Анализ результатов вычислительных экспериментов при широких изменениях фильтрационных параметров для решения различных тестовых задач, показывает адекватность построенных математических моделей, сходимость и устойчивость построенных вычислительных алгоритмов.

Результаты подтверждают пригодность алгоритма и программы для расчетов полей давлений и насыщенных, а также показателей разработки месторождений в системе нефть – газ, нефть – вода, нефть – газ – вода.

Разработанные математическая модель, вычислительный алгоритм и программное средство могут быть использованы для анализа функционирования, оперативного управления и прогнозирования разработки нефтегазовых месторождений при различных условиях воздействия на пласт и принятия конкретных практических рекомендаций.

## Литература

1. Monteiro P.J., Rycroft Ch.H., Barenblatt G.I. A mathematical model of fluid and gas flow in nanoporous media / P.J. Monteiro, Ch.H. Rycroft, G.I. Barenblatt // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. — 2012. — Vol. 109, No. 50. — P. 20309–20313. DOI: 10.1073/pnas.1219009109
2. Barenblatt G.I., Patzek T.W., Silin D.B. The mathematical model of nonequilibrium effects in water-oil displacement / G.I. Barenblatt, T.W. Patzek, D.B. Silin // Society of Petroleum Engineers. — 2003. — Vol. 8, No. 4. — P. 409–416. DOI: 10.2118/87329-pa
3. Chraïbi M., Zaleski S., Franco F. Modeling the solution gas drive process in heavy oils / M. Chraïbi, S. Zaleski, F. Franco // Записки Горного института. — 2008. — № 174. — С. 36–40.
4. Шелухин В.В. Задача капиллярного вытеснения для одной модели трехфазной фильтрации / В.В. Шелухин // Прикладная механика и техническая физика. — 2003. — Т. 44, № 6. — С. 95–106.
5. Atkinson C., Isangulov R. A mathematical model of an oil and gas field development process / C. Atkinson, R. Isangulov // European Journal of Applied Mathematics. — Vol. 21, No. 3. — P. 205–227. DOI: 10.1017/s095679251000001x
6. Ахметзянов А.В., Ибрагимов И.И., Ярошенко Е.А. Интегрированные гидродинамические модели при разработке нефтяных месторождений / А.В. Ахметзянов, И.И. Ибрагимов, Е.А. Ярошенко // Управление большими системами. — 2010. — № 29. — С. 167–183.
7. Ахмед-Заки Д.Ж. Об одной задаче двухфазной фильтрации смеси в пористой среде с учетом теплового воздействия // Научные труды НИПИ Нефтегаз ГНКАР. — 2010. — № 3. — С. 29–33.
8. Давлетбаев А.Я. Фильтрация жидкости в пористой среде со скважинами с вертикальной трещиной гидроразрыва пласта / А.Я. Давлетбаев // Инженерно-физический журнал. — 2012. — Т. 85, № 6. — С. 919–924.
9. Демьянов А.Ю., Динариев О.Ю., Иванов Е.Н. Моделирование переноса воды с мелкодисперсной газовой фазой в пористых средах / А.Ю. Демьянов, О.Ю. Динариев, Е.Н. Иванов // Инженерно-физический журнал. — 2012. — Т. 85, № 6. — С. 1145–1154.
10. Василев Ю.Н. Автоматизированная система управления разработкой газовых месторождений / Ю.Н. Василев. — Москва: Недра, 1987. — 141 с.
11. Шалимов Б.В. О фильтрации трехфазной жидкости (модель Баклера—Левретта) / Б.В. Шалимов // Механика жидкости и газа. — 1972. — № 1. — С. 39–44.

12. Ravshanov N., Abilkasimov B., Kurbonov N. The Model and Numerical Algorithm, to Research the Filtration processes in porous media taking into account the phase transitions of multicomponent mixtures / N. Ravshanov, B. Abilkasimov, N. Kurbonov // International Multidisciplinary Journal European researcher. — 2012. — No. 1. — P. 5–11.
13. Равшанов Н., Курбонов Н. Моделирование процесса фильтрации трехфазной смеси «нефть-газ-вода» в пористых средах / Н. Равшанов, Н. Курбонов // Технология материалов. — Москва: ИНГН, 2014. — № 3. — С. 3–13.
14. Курбонов Н.М. Алгоритм оптимальной добычи газа из пластовых систем / Н.М. Курбонов // Отраслевые аспекты технических наук. — Москва: ИНГН, 2013. — № 10. — С. 15–19.
15. Равшанов Н., Курбонов Н.М. Моделирование процесса фильтрации жидкостей и газа в пористых средах / Н. Равшанов, Н.М. Курбонов // Информатика: проблемы, методология, технологии : сборник трудов XIV международной конференции. — Воронеж, 2014. — Т. 1. — С. 243–247.

Равшанов Нормакмад, д.т.н., заведующий лабораторией «Моделирование сложных систем» Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов, Ташкентский университет информационных технологий (Ташкент, Узбекистан), ravshanzade-09@mail.ru.

Курбонов Нозим Мухаммадрашитович, младший научный сотрудник лаборатории «Моделирование сложных систем» Центра разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов, Ташкентский университет информационных технологий (Ташкент, Узбекистан), nozim\_kurbonov@mail.ru.

*Поступила в редакцию 13 января 2015 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series "Computational Mathematics and Software Engineering"  
2015, vol. 4, no. 2, pp. 89–106*

---

DOI: 10.14529/cmse150207

## COMPUTER MODELING OF PROCESSES OF FLUID FILTRATION IN POROUS MEDIA

**N. Ravshanov**, Tashkent University of Information Technologies (Tashkent, Uzbekistan)  
ravshanzade-09@mail.ru,

**N. Kurbonov**, Tashkent University of Information Technologies (Tashkent, Uzbekistan)  
nozim\_kurbonov@mail.ru

To intensify the development of oil and gas fields, to enhance their technical and economic parameters in order to maximize product extraction from old oil and gas deposits, it is necessary to conduct comprehensive research using mathematical tools. As an example of such a mathematical tool there is a triad - "mathematical models, numerical algorithms and software" related to solving of problems and to conduct computational experiments with different input technological

parameters of the object of study. This paper considers mathematical model, conservative numerical algorithms and software for computational experiments based on the basic laws of hydrodynamics. Created mathematical and software serves the purpose of research, forecasting and decision-making on designing and development of oil and gas fields. Also the paper presents the results of computational experiments with unsteady filtration of fluids in porous media.

*Keywords: computer modeling, numerical method, computational experiment, porous media, fluid, software.*

## References

1. Monteiro P.J., Rycroft Ch.H., Barenblatt G.I. A mathematical model of fluid and gas flow in nanoporous media // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 2012. Vol. 109, No. 50. P. 20309–20313. DOI: 10.1073/pnas.1219009109
2. Barenblatt G.I., Patzek T.W., Silin D.B. The mathematical model of nonequilibrium effects in water–oil displacement // Society of Petroleum Engineers. 2003. Vol. 8, No. 4. P. 409–416. DOI: 10.2118/87329-pa
3. Chraïbi M., Zaleski S., Franco F. Modeling the solution gas drive process in heavy oils // Zapiski Gornogo instituta [Notes of the Mining Institute]. 2008. No. 174. P. 36–40.
4. Sheluhin V.V. Zadacha kapilljarnogo vytesnenija dlja odnoj modeli trehfaznoj fil'tracii prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika [The problem of capillary displacement for one model of three-phase filtering] // Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika [Applied Mechanics and Technical Physics]. 2003. Vol. 44, No. 6. P. 95–106.
5. Atkinson C., Isangulov R. A mathematical model of an oil and gas field development process // European Journal of Applied Mathematics. Vol. 21, No. 3. P. 205–227. DOI: 10.1017/s095679251000001x
6. Ahmetzjanov A.V., Ibragimov I.I., Jaroshenko E.A. Integrirovannye gidrodinamičeskije modeli pri razrabotke neftjanyh mestorozhdenij upravlenie bol'shimi sistemami [Integrated hydrodynamical models of oil field development processes] // Upravlenie bol'shimi sistemami [Large-scale Systems Control]. 2010. No. 29. P. 167–183.
7. Ahmed–Zaki D.Zh. Ob odnoj zadache dvuhfaznoj fil'tracii smesi v poristoj srede s uchetom teplovogo vozdejstvija [About one problem of biphasic filtration of mix in porous media with thermal influence] // Nauchnye trudy NIPI Neftgaz GNKAR [Matters of Research Project Institute Neftgaz]. 2010. No. 3. P. 29–33.
8. Davletbaev A.Ja. Fil'tracija zhidkosti v poristoj srede so skvazhinami s vertikal'noj treshhinoj gidrorazryva plasta [Fluid filtration in a porous medium with wells with vertical hydraulic fracture of the formation] // Inženerno-fizičeskij zhurnal [Journal of Engineering Physics and Thermophysics]. 2012. Vol. 85, No 6. P. 919–924.
9. Dem'janov A.Ju., Dinariev O.Ju., Ivanov E.N. Modelirovanie perenosa vody s melkodispersnojgazovoj fazoj v poristyh sredah [Simulation of water with finely dispersed gas phase in porous media] // Inženerno-fizičeskij zhurnal [Journal of Engineering Physics and Thermophysics]. 2012. Vol. 85, No 6. P. 1145–1154.
10. Vasilev Ju.N. Avtomatizirovannaja sistema upravlenija razrabotkoj gazovyh mestorozhdenij [Automated system for managing the development of gas fields]. 1987. 141 p.
11. Shalimov B.V. O fil'tracii trehfaznoj zhidkosti (model' Baklerja—Leveretta) [About three-phase fluid filtration (model Buckler—Leverett)] // Mehanika zhidkosti i gaza [Fluid and gas mechanics]. 1972. No. 1. P. 39–44.

12. Ravshanov N., Abilkasimov B., Kurbonov N. The Model and Numerical Algorithm, to Research the Filtration processes in porous media taking into account the phase transitions of multicomponent mixtures // Journal European researcher. 2012. No. 1. P. 5–11.
13. Ravshanov N., Kurbonov N. Modelirovanie processa fil'tracii trehfaznoj smesi «neft'-gaz-voda» v poristyh sredah [Modeling of process of a filtration of the three-phase mix "oil-gas-water" in porous spheres] // Tehnologija materialov [Technology of materials]. 2014. No. 3. P. 3–13.
14. Kurbonov N.M. Algoritm optimal'noj dobychi gaza iz plastovyh sistem [The algorithm for optimal gas production from stratal systems] // Otrasleyve aspekty tehniceskikh nauk [Sectoral aspects of technical sciences]. 2013. No. 10. P. 15–19.
15. Ravshanov N., Kurbonov N.M. Modelirovanie processa fil'tracii zhidkostej i gaza v poristyh sredah [Modelling of the process liquid and gas filtration in porous media] // Informatika: problemy, metodologija, tehnologii : sbornik trudov XIV mezhdunarodnoj konferencii [Proceedings of the conference Computer science: problems, methodology, technology]. 2014. Vol. 1. P. 243–247.

*Received January 13, 2015.*