

ТОЧНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ

А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, М.В. Якобовский

В работе рассмотрены схемы второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации для решения задачи диффузии-конвекции. Для модельной начально-краевой задачи, в случае когда функции правой части и начального условия представимы конечными суммами рядов Фурье по тригонометрическому базису, исследована точность разностных схем. Установлено, что точность численного решения зависит от количества узлов приходящихся на половину длины волны, соответствующей наиболее высокочастотной гармонике в конечной сумме ряда Фурье, необходимой для описания поведения расчетных объектов. Получены зависимости погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности от количества узлов. Выполнено сопоставление результатов расчета двумерной задачи диффузии-конвекции и задачи Пуассона на основе схем второго и четвертого порядков точности. В работе обоснована целесообразность перехода к схемам повышенного порядка точности при решении прикладных задач и из полученных оценок нетрудно получить численные значения выигрышей во времени счета при использовании схем повышенного порядка точности.

Ключевые слова: точность, разностные схемы, уравнение диффузии-конвекции, погрешность аппроксимации.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Якобовский М.В. Точность численного решения уравнения диффузии-конвекции на основе разностных схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 47–62. DOI: 10.14529/cmse160105.

Введение

Работа посвящена изучению дискретных аналогов операторов конвективного и диффузионного переноса второго и четвертого порядков точности. Основной целью данной работы является исследование точности разностных схем, аппроксимирующих операторы конвективного и диффузионного переноса, в зависимости от количества узлов, необходимых для описания объекта изучения. В соответствии с поставленной целью решены следующие задачи: выполнена оценка решения при переходе к сеточным функциям; для схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации выполнены оценки погрешности в зависимости от количества узлов; выполнено сопоставление результатов расчета двумерной задачи диффузии-конвекции и задачи Пуассона на основе схем второго и четвертого порядков точности. В работе обоснована целесообразность перехода к схемам повышенного порядка точности при решении прикладных задач. Из полученных оценок нетрудно получить численные значения выигрышей во времени счета при использовании схем повышенного порядка точности.

Настоящая работа является логическим продолжением работы [1], в которой описана построенная библиотека итерационных методов, предназначенных для решения сеточных уравнений с самосопряженными и несамосопряженными операторами при помощи схем по-

вышенного порядка точности, учитывающими заполненности ячеек на многопроцессорной вычислительной системе. Предложенные схемы были разработаны для решения задачи восстановления рельефа дна акватории на основе гидрографической информации [2], а также применены при разработке программного комплекса, предназначенного для расчета трехмерных полей скоростей течений в мелководных водоемах [3].

1. Аналитическое решение уравнения диффузии

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности вида

$$u_t' = ku_{xx}'' + f, 0 < x < l, 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \quad (2)$$

В отношении функций $u(x, t)$ и $f(x, t)$ будем предполагать их представимость в виде рядов Фурье по тригонометрическому базису:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(u)}(t) \sin(\omega mx), f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)}(t) \sin(\omega mx), \quad (3)$$

где $\omega = \pi/l$, $C_m^{(f)} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\omega mx) dx$, $C_m^{(u)} = \frac{2}{l} \int_0^l u(x) \sin(\omega mx) dx$.

Наряду с задачей (1) – (3), которую будем называть «точной» непрерывной задачей, рассмотрим первую начально-краевую задачу с «усеченной» правой частью

$$f^{(N)}(x, t) = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(f)}(t) \sin(\omega mx), \quad (4)$$

и «усеченными» начальными условиями

$$u_0^{(N)}(x, t) = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(0) \sin(\omega mx), \quad (5)$$

для задачи вида

$$(u^{(N)})_t' = k(u^{(N)})_{xx}'' + f^{(N)}, 0 < x < l, 0 < t < T, \quad (6)$$

$$u^{(N)}(x, 0) = u_0^{(N)}(x), u^{(N)}(0, t) = u^{(N)}(l, t) = 0. \quad (7)$$

Следует отметить, что такая постановка возникает, например, в случае табличного способа задания функции f и u_0 ряды будут ограничены $N - 1$ гармониками т.к. для восстановления непрерывной функции применяется интерполяционный тригонометрический полином [4], где N — количество дискретных значений функции. Оценим «близость» функций $u(x, t)$ и $u^{(N)}(x, t)$ — соответственно решения «точной» и «усеченной» задачи, введя функции

$$w^{(N)}(x, t) \equiv u(x, t) - u^{(N)}(x, t), g^{(N)}(x, t) \equiv f(x, t) - f^{(N)}(x, t), v_0^{(N)}(x) \equiv u_0(x) - u_0^{(N)}(x) \quad (8)$$

имеем вспомогательную задачу

$$(w^{(N)})_t' = k(w^{(N)})_{xx}'' + g^{(N)}, 0 < x < l, 0 < t < T, \quad (9)$$

$$w^{(N)}(x, 0) = v_0^{(N)}(x), w^{(N)}(0, t) = w^{(N)}(l, t) = 0. \quad (10)$$

Для решения задачи (9) – (10) справедлива оценка в гильбертовом пространстве \mathcal{L}_∞ для любого $t > 0$ [5]:

$$\|w^{(N)}(x, t)\|_\infty \leq \|v_0^{(N)}(x)\|_\infty + \int_0^t \|g^{(N)}(x, \theta)\|_\infty d\theta. \quad (11)$$

Известно, что для класса функций периода 2π , имеющих производную порядка α , удовлетворяющий неравенству $|\varphi^{(\alpha)}(x)| \leq K$, имеет место оценка остаточного члена ряда (3) для любого натурального α [6]:

$$\sup_{0 \leq x \leq l} \left| \varphi(x) - \sum_{m=1}^{N-1} C^{(\varphi)} \sin(mx) \right| = \frac{4K \ln N}{\pi^2 N^\alpha} + O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right). \quad (12)$$

Учитывая оценку (12), а также соотношения (9) – (10), из неравенства (11) получим оценку для любого $t > 0$

$$\|w^{(N)}(x/\omega, t)\|_\infty \leq 4 \frac{K_1/N^2 + TK_2 \ln N}{\pi^2 N^{\alpha-2}} + O\left(\frac{1}{N^{\alpha-2}}\right), \quad (13)$$

$$K_1 = \max_{0 \leq x \leq l} |u_0^{(\alpha)}(x/\omega)|, K_2 = \max_{0 \leq x \leq l} |f^{(\alpha-2)}(x/\omega, t)|.$$

Оценка (13) гарантирует сходимость решения «усеченной» задачи к решению точной задачи при $N \rightarrow \infty$ при достаточно гладких входных данных в смысле выполнения неравенства (12), при $\alpha \geq 3$. В дальнейшем $u(x, t)$ предполагается принадлежащей классу $C^{(4)} [0 \leq x \leq l]$ в случае разностной схемы с погрешностью решения $O(h^2 + \tau^\beta)$ (см п. 3) и классу $C^{(6)} [0 \leq x \leq l]$ в случае схемы с погрешностью $O(h^4 + \tau^\beta)$ (см п. 4), где β зависит от веса схемы. Для остальных функций входящих в постановку исходной задачи (1) – (3) также предполагается необходимая гладкость.

Функции $u^{(N)}$ и $f^{(N)}$ при подстановке в (1) приводят к соотношению:

$$\left(\sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)} \sin(\omega mx) \right)'_t = k \left(\sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)} \sin(\omega mx) \right)''_{xx} + \sum_{n=1}^{N-1} C_n^{(f)} \sin(\omega mx).$$

Меняя очередность операции дифференцирования и суммирования ряда получим:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \left(C_m^{(u)}(t) \right)'_t \sin(\omega mx) = \sum_{m=1}^{N-1} k C_m^{(u)} (-\omega^2 m^2 \sin(\omega mx)) + \sum_{n=1}^{N-1} C_n^{(f)} \sin(\omega mx).$$

Принимая во внимание линейную независимость функций $\sin(\omega mx)$, получим:

$$\left(C_m^{(u)}(t) \right)'_t = -k\omega^2 m^2 C_m^{(u)} + C_m^{(f)}. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) примет вид:

$$C_m^{(u)}(t) = \left(C_{m,0}^{(u)} - \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2} \right) e^{-k\omega^2 m^2 t} + \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2}.$$

После проделанных преобразований и вычислений, с учетом заданных начальных и граничных условий, будет найдена искомая функция:

$$u = \sum_{m=1}^{N-1} \left(\left(C_{m,0}^{(u)} - \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2} \right) e^{-k\omega^2 m^2 t} + \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2} \right) \sin(\omega m x). \quad (15)$$

2. Точность численного решение уравнения диффузии на основе разностных схем второго порядка погрешности аппроксимации

Для численного решения задачи (1) покроем расчетную область равномерной сеткой: $w_{h,\tau} = \{t^n = n\tau, x_i = ih; n = \overline{0..N_t}, i = \overline{0..N_x}; N_t\tau = T, N_x h = l\}$, где τ — шаг по времени, h — шаг по пространству, N_t — число шагов по времени, N_x — число узлов по пространственной координате.

Аппроксимация уравнения (1) примет вид [7]:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = k \frac{u_{i+1}^{n+\sigma} - 2u_i^{n+\sigma} + u_{i-1}^{n+\sigma}}{h^2} + f_i, \quad (16)$$

где $c_i^{n+\sigma} = \sigma c_i^{n+1} + (1 - \sigma) c_i^n$, $\sigma \in [0, 1]$ — вес схемы [8].

Будем использовать представления (4), (5) функций u и f при решении задачи (16)

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{m=1}^{N-1} \left(C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n) \right) \sin(\omega m x_i)}{\tau} = \\ & = k \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t^{n+\sigma}) \frac{(\sin(\omega m x_{i+1}) - 2\sin(\omega m x_i) + \sin(\omega m x_{i-1})))}{h^2} + \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(f)} \sin(\omega m x). \end{aligned}$$

Преобразуем полученное выражение и, принимая во внимание линейную независимость функций $\sin(\omega n x)$, получим:

$$\frac{C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n)}{\tau} = k \frac{2(\cos(\omega m h) - 1)}{h^2} C_m^{(u)}(t^{n+\sigma}) + C_m^{(f)}. \quad (17)$$

Лемма 1. При выполнении оценок (12) аппроксимации задачи (1) – (2) разностными схемами (16) для каждой гармоники функции решения u скорость диффузионного обмена k меньше реальных значений и отличаются на величину $\alpha_1 = 1 - 2(1 - \cos(\omega m h)) / (\omega m h)^2$.

Доказательство. Из (6) при $\tau \rightarrow 0$ следует:

$$\left(C_m^{(u)}(t) \right)'_t = -k \left(\frac{2(\cos(\omega m h) - 1)}{\omega^2 m^2 h^2} \right) \omega^2 m^2 C_m^{(u)}(t^{n+\sigma}) + C_m^{(f)}.$$

В силу (14) решение, полученное на основе схемы (5) соответствует решению уравнения $u'_t = k^* u''_{xx} + f$, $k^* = k(1 - \alpha_1)$, $\alpha_1 = 1 - 2(1 - \cos(\omega m h)) / (\omega m h)^2$. Лемма доказана.

Рассмотрим величину $\alpha_1 = 1 - 2(1 - \cos(\omega m h)) / (\omega m h)^2$:

$$\alpha_1 = 1 - \frac{2(1 - \cos(\omega m h))}{\omega^2 m^2 h^2} = 1 - \frac{2 \left(1 - \frac{(\omega m h)^2}{2} + \frac{(\omega m h)^4}{24} + O(h^6) - 1 \right)}{-\omega^2 m^2 h^2} = \frac{(\omega m h)^2}{12} + O(h^4).$$

Замечание 1. Имеет место оценка $\omega th < \pi$. Также следует отметить, что величина $r = \pi / (\omega th)$ описывает количество узлов, приходящихся на половину периода волны (на описание объекта). Из полученной оценки видно, что точность численного решения зависит от количества узлов приходящихся на половину периода волны.

На рис. 1 приведен график функции $\alpha_1(r) = 1 - 2(1 - \cos(\pi/r)) / (\pi/r)^2$, описывающей зависимость погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта.

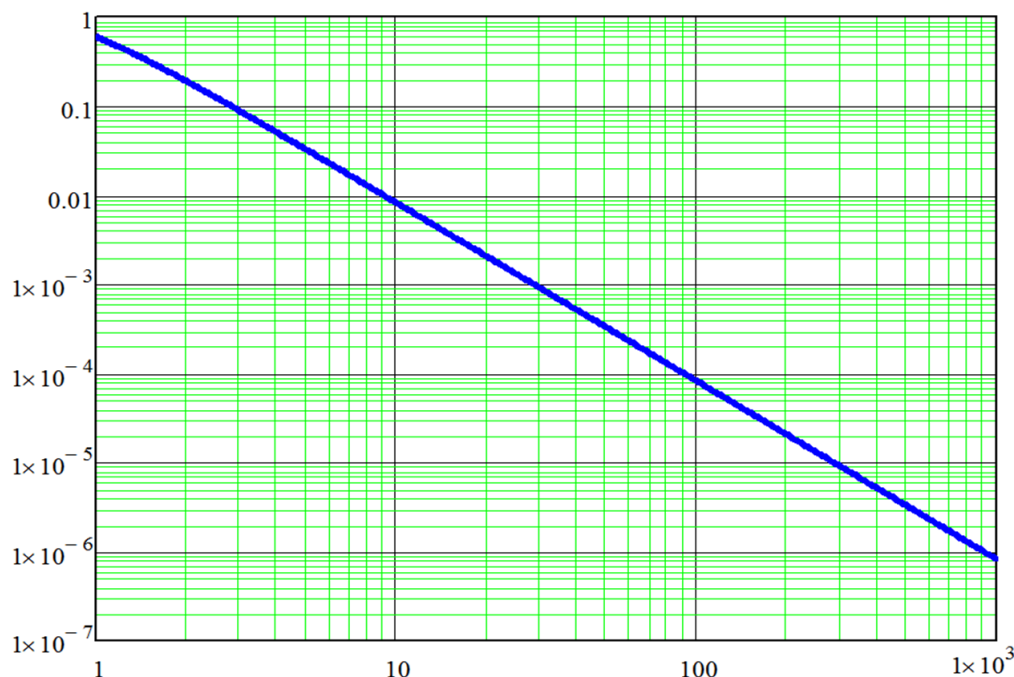


Рис. 1. График зависимости погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта

Аналитическое выражение соответствующее численному решению запишется:

$$u = \sum_{m=1}^{N-1} \left(C_{m,0}^{(u)} \right) e^{-k(1-\alpha_1(N/m))\omega^2 m^2 t} \sin(\omega m x).$$

Замечание 2. При описании диффузионных слагаемых разностными схемами погрешность аппроксимации в наихудшем случае задании функции источников (в виде точечных источников $r=2$) будет составлять 18,9%.

3. Точность численного решение уравнения диффузии на основе разностных схем четвертого порядка погрешности аппроксимации

Рассмотрим случай разностной аппроксимации схемами повышенного (четвертого) порядка точности [9]:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = k \frac{-u_{i+2}^{n+\sigma} + 16u_{i+1}^{n+\sigma} - 30u_i^{n+\sigma} + 16u_{i-1}^{n+\sigma} - u_{i-2}^{n+\sigma}}{12h^2} + f_i. \quad (18)$$

Будем использовать представления (2) функций u и f при решении задачи (18):

$$\frac{\sum_{m=1}^{\infty} \left(C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n) \right) \sin(\omega m x_i)}{\tau} =$$

$$= k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^{(u)}(t^{n+\sigma})}{h^2} \left(-\sin(\omega m x_{i+2}) + 16 \sin(\omega m x_{i+1}) - 30 \sin(\omega m x_i) + \right.$$

$$\left. + 16 \sin(\omega m x_{i-1}) - \sin(\omega m x_{i-2}) \right) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)} \sin(\omega m x).$$

Преобразуя полученное выражение и принимая во внимание линейную независимость функций $\sin(\omega n x)$, получим:

$$\frac{C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n)}{\tau} = k \frac{-2 \cos(2\omega m h) + 32 \cos(\omega m h) - 30}{12h^2} C_m^{(u)}(t^{n+\sigma}) + C_m^{(f)}. \quad (19)$$

Лемма 2. В условиях выполнения оценок (12) при решении задачи (1) разностными схемами (18) для каждой гармонике функции решения u скорость диффузионного обмена k меньше реальных значений и отличаются на величину $\alpha_2 = 1 - (15 - 16 \cos(\omega m h) + \cos(2\omega m h)) / 6(\omega m h)^2$.

Доказательство. Аналогично лемме 1.

Рассмотрим величину $\alpha_2 = 1 - (15 - 16 \cos(\omega m h) + \cos(2\omega m h)) / 6(\omega m h)^2$:

$$\alpha_2 = 1 - (15 - 16 \cos(\omega m h) + \cos(2\omega m h)) / 6(\omega m h)^2 = (\omega m h)^4 / 90 + O(h^6).$$

Функция, описывающая зависимость погрешности аппроксимации диффузионных операторов разностными схемами четвертого порядка точности от количества узлов на структуру примет вид $\alpha_2(r) = 1 - (15 - 16 \cos(\pi/r) + \cos(2\pi/r)) / 6(\pi/r)^2$.

На рис. 2 приведены графики функций, описывающие зависимости погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности от количества узлов.

Замечание 3. При описании диффузионных слагаемых разностными схемами погрешность аппроксимации может составлять для данных слагаемых в наихудшем случае задании функции источников 5,4%.

4. Погрешность аппроксимации операторов конвективного переноса

Рассмотрим краевую задачу диффузии-конвекции с начальными и граничными условиями [10, 11], т.е. найдем аналитическое решение уравнения

$$u'_t + v u'_x = k u''_{xx}, 0 < x < l, t > 0, \quad (20)$$

удовлетворяющее начальному условию $u(x, 0) = u_0(x)$ и граничным условиям $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $t > 0$.

Для решения задачи (20) выполнить переход в подвижную систему координат $y = x - vt$ при этом решение задачи сводится к решению уравнения диффузии: $u'_t = k u''_{yy}$ аналитическое решение которого описано выше.

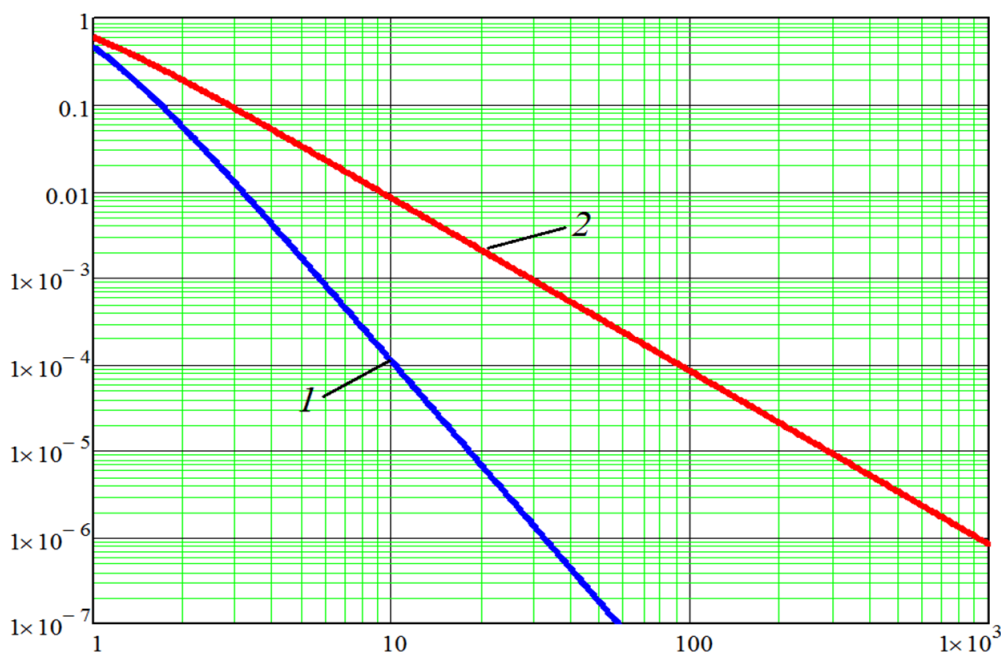


Рис. 2. График зависимости погрешности аппроксимации операторов диффузионного переноса разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта: 1 — схемы четвертого порядка точности, 2 — второго

Рассмотрим разностную производную оператора конвективного переноса u'_x второго порядка точности. Используем представления (12) функции u :

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t) \frac{(\sin(\omega m x_{i+1}) - \sin(\omega m x_{i-1}))}{2h} = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t) \frac{\sin(\omega m h)}{h} \cos(\omega m x).$$

Непрерывная производная с учетом представления (12) примет вид:

$$u'_x = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t) \omega m \cos(\omega m x).$$

Таким образом, функция, описывающая зависимость погрешности аппроксимации конвективных операторов разностными схемами от количества узлов на структуру примет вид: $\alpha_3(r) = 1 - \sin(\pi/r) / (\pi/r)$.

Для схемы четвертого порядка точности

$$u'_x \simeq \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{12h}$$

оператора конвективного переноса не трудно получить функцию, описывающую зависимость погрешность аппроксимации данного оператора от количества узлов, приходящихся на половину периода волны $\alpha_4(r) = 1 - (8 \sin(\pi/r) - \sin(2\pi/r)) / (6\pi/r)$.

На рис. 3 приведены графики функций, описывающие зависимости погрешности аппроксимации конвективных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности от количества узлов.

Замечание 4. При описании конвективных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности погрешность аппроксимации может составлять в наихудшем случае задания функции источников 36,3% и 15,1% соответственно.

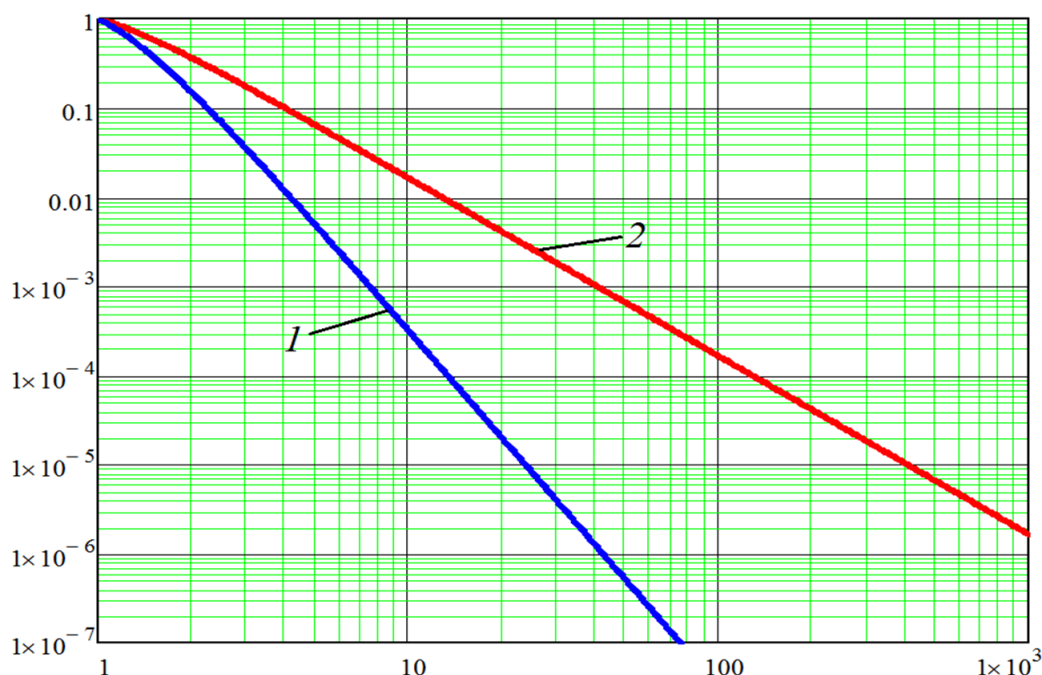


Рис. 3. График зависимости погрешности аппроксимации операторов конвективного переноса разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта: 1 — схемы четвертого порядка точности, 2 — второго

5. Сопоставление результатов расчета двумерной задачи диффузии-конвекции на основе схем второго и четвертого порядков точности

Моделирование производилось на сетке размерами 100×100 , расчетных узлов, при этом параметры задавались следующим образом: размеры расчетной области $lx=100$ м, $ly=100$ м, временной интервал равен 10 с, горизонтальная составляющая равна 4 м/с, вертикальная — 3 м/с, коэффициент турбулентного обмена равен 2 м²/с. При решении задачи двумерной диффузии-конвекции начальное распределение задавалось функцией:

$$C(x, y) = \begin{cases} \sin(\pi(x-10)) \cos(\pi(y-10)), & \{x, y\} \in D, \quad D : \{x \in [10, 20], y \in [10, 20]\}, \\ 0, & \{x, y\} \notin D. \end{cases}$$

На рис. 4 приведено начальное распределение для задачи диффузии-конвекции и поле концентраций через заданный интервал времени.

Замечание 5. В случае решения задачи переноса на основе разностных методов не совсем уместно говорить о точности решения исходной задачи, т.к. погрешности аппроксимации влияют на скорость конвективного переноса и даже не большие отклонения в положении решения могут приводить к большим значениям погрешности.

За расчетный интервал времени вещества переносятся на 50 м. При использовании разностных методов полученные значения скорости конвективного переноса меньше реальной скорости распространения при этом отклонение положения центра области концентрации веществ для данной задачи составило $38,04$ мкм.

На рис. 5 приведены значения спектра поля концентрации через заданный интервал времени для аналитического и численного решения задачи диффузии-конвекции.

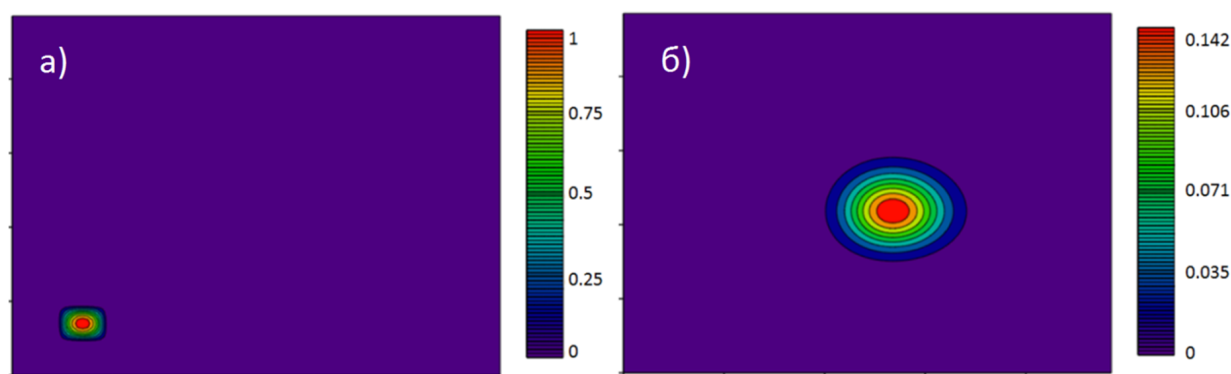


Рис. 4. Значение концентрации в начальный и конечный моменты времени



Рис. 5. Значение спектра поля концентрации через заданный интервал времени (а), разность между значениями спектра, найденные аналитическим путем и численно (б)

В табл. 1 приведены значения погрешностей, зависящих от времени, для задачи диффузии-конвекции схемами второго порядка точности.

Таблица 1

Зависимость погрешности от времени для задачи диффузии-конвекции

Время	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Максимальное значение решения	0,681	0,488	0,376	0,305	0,256	0,221	0,194	0,173	0,156	0,142
Погрешность	2,4%	2,5%	2,1%	1,7%	1,4%	1,1%	0,97%	0,83%	0,72%	0,64%
Относительная погрешность	3,52%	5,12%	5,58%	5,57%	5,47%	5%	4,98%	4,8%	4,61%	4,51%

В табл. 2 приведены значения погрешностей расчета задачи диффузии-конвекции на различных расчетных сетках схемами второго порядка точности,

На рис. 6 приведено поле, описывающее погрешность вычислений, полученное как разность между аналитическим и численным решением для задачи диффузии-конвекции.

Таблица 2

Погрешность расчета задачи диффузии-конвекции на различных сетках

Размер сетки	100 x 100	200 x 200	400 x 400	800 x 800
Значение погрешности	0,6351%	0,1596%	0,04037%	0,01059%
Относительная погрешность	4,507%	1,124%	0,284%	0,075%

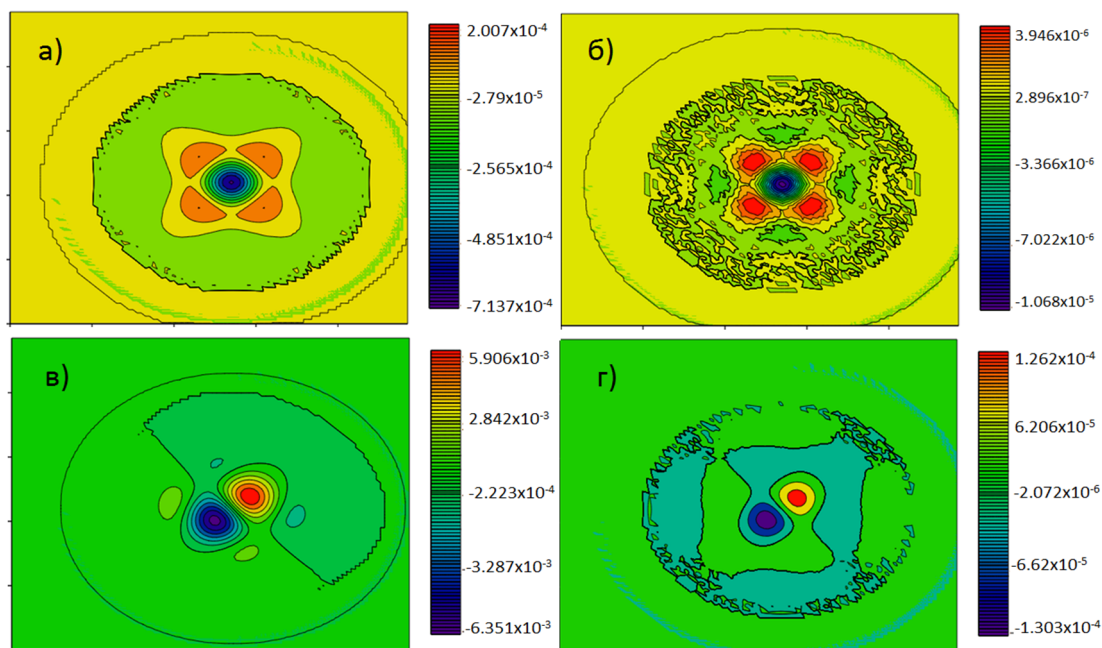


Рис. 6. Поля, полученные как разность между аналитическими и численными решениями для задачи диффузии-конвекции: сверху — задача диффузии, снизу — задача диффузии-конвекции (слева схемы второго порядка точности, справа — четвертого)

Исходя из результатов расчета погрешности расчета задачи диффузии-конвекции, приведенных в табл. 1, можно утверждать, что используемые схемы не только теоретически, но и практически имеют второй порядок точности.

В рассмотренной модельной задаче диффузии-конвекции область, где задано начальное распределение концентрации веществ отличных от нуля, покрывается 9 узлами по каждому из пространственных направлений. Из сопоставления результатов численных экспериментов на основе схем второго и четвертого порядков точности (рис. 6) следует, что для задачи диффузии удалось повысить точность в $66,7$ раз, а для задачи диффузии-конвекции в $48,7$ раз. Результаты расчетов, приведенные на рис. 6, согласуются с теоретическими суждениями, и таким образом, при использовании разностных методов, скорости конвективного и диффузионного переносов меньше реальных скоростей данных процессов.

6. Сопоставление результатов расчета двумерной задачи Пуассона на основе схем второго и четвертого порядков точности

Рассмотрим уравнение Пуассона [12]

$$\Delta u = -f, 0 < x < l_x, 0 < y < l_y,$$

удовлетворяющее граничным условиям $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t > 0$.

Аналитическое решение данной задачи примет вид:

$$u = \sum_{m_x=1}^{N-1} \sum_{m_y=1}^{N-1} \left(\frac{C_{m_x m_y}^{(f)}}{\omega^2 (m_x^2 + m_y^2)} \right) \sin(\omega m_x x) \sin(\omega m_y y),$$

$$f = \sum_{m_x=1}^{N-1} \sum_{m_y=1}^{N-1} C_{m_x m_y}^{(f)} \sin(\omega m_x x) \sin(\omega m_y y).$$

Численные расчеты данной задачи производились на сетке размерами 100×100 , расчетных узлов, при этом: размеры расчетной области $l_x=100$ м, $l_y=100$ м, правая часть задавалась функцией:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(\pi(x - 45)) \cos(\pi(y - 45)), & \{x, y\} \in D, \quad D : \{x \in [45, 55], y \in [45, 55]\}, \\ 0, & \{x, y\} \notin D. \end{cases}$$

Аналитическое выражение соответствующее численному решению запишется:

$$u = \sum_{m_x=1}^{N-1} \sum_{m_y=1}^{N-1} \left(\frac{C_{m_x m_y}^{(f)}}{\omega^2 (m_x^2 (1 - f_1(N/m_x)) + m_y^2 (1 - f_1(N/m_y)))} \right) \sin(\omega m_x x) \sin(\omega m_y y).$$

На рис. 7 приведены значения спектра поля концентрации через заданный интервал времени для аналитического и численного решения задачи Пуассона.



Рис. 7. Значение спектра поля концентрации через заданный интервал времени (а), разность между значениями спектра, найденные аналитическим путем и численно (б)

На рис. 8 представлена функция правой части (а), численное решение поставленной задачи (б) и поля, полученные как разность между аналитическим и численным решением для схем второго (в) и четвертого порядков точности (г).

Следует сказать, что для двумерной задачи Пуассона схемы четвертого порядка точности для данной модельной задачи в 10 раз точнее, чем второго.

Заключение

В общем случае при решении прикладных задач нельзя утверждать, что повышение порядка погрешности аппроксимации гарантирует увеличение точности расчета. Из сопостав-

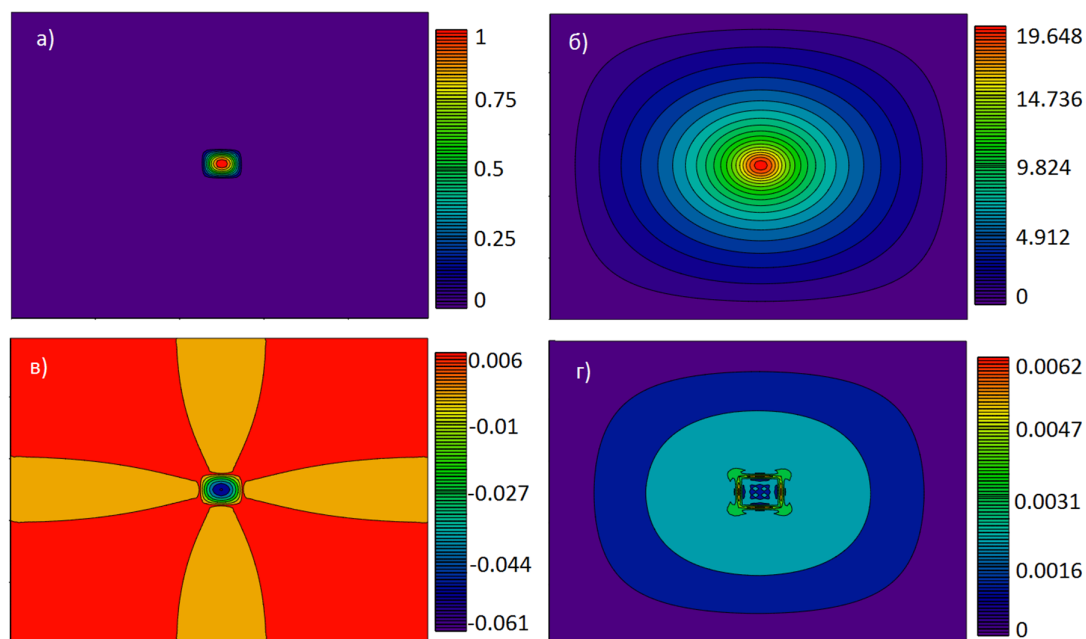


Рис. 8. Функция правой части (а), численное решение поставленной задачи (б) и поля, полученные как разность между аналитическим и численным решением для схем второго (в) и четвертого порядков точности (г)

ления результатов численных экспериментов на основе схем второго и четвертого порядков точности следует, что для задачи диффузии удалось повысить точность в $66,7$ раз, а для задачи диффузии-конвекции в $48,7$ раз, для задачи Пуассона удалось повысить точность — в 10 раз. В дальнейшем планируется внедрение разработанных схем в программные комплексы, предназначенные для расчета задач биологической кинетики на многопроцессорной вычислительной системе [13, 14]. Выполнение данных работ соответствует выполняемым в последнее время научно-образовательным программам по развитию суперкомпьютерного образования в стране [15–17].

Работа выполнена при частичной поддержке Задания №2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России.

Литература

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Семенякина А.А., Никитина А.В. Параллельная реализация задач транспорта веществ и восстановления донной поверхности на основе схем повышенного порядка точности // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16, № 2. С. 256–267.
2. Чистяков А.Е., Семенякина А.А. Применение методов интерполяции для восстановления донной поверхности // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. № 4. С. 21–28.
3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13, № 1. С. 290–297.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Изд-во: Лаборатория базовых знаний, 2003.

5. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
6. Пинкевич В.Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 6. С. 521–528.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишня А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 11. С. 53–64. DOI: 10.1134/S2070048214030120.
9. Жалнин Р.В., Змитренко Н.В., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 10. С. 61–66.
10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 12. С. 65–82. DOI: 10.1134/S2070048214040097.
11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15, № 4. С. 610–620.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
13. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С. Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14, № 1. С. 103–112.
14. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е. Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 9. С. 3–21.
15. Антонов А.С., Артемьева И.Л., Бухановский А.В., Воеводин В.В., Гергель В.П., Демкин В.П., Коньков К.А., Крукиер Л.А., Попова Н.Н., Соколинский Л.Б., Сухинов А.И. Проект «Суперкомпьютерное образование»: 2012 год // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. Т. 1, № 1. С. 12–16.
16. Воеводин В.В., Гергель В.П., Соколинский Л.Б., Демкин В.П., Попова Н.Н., Бухановский А.В. Развитие системы суперкомпьютерного образования в России: текущие результаты и перспективы // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. Т. 4, № 1. С. 268–274.
17. Антонов А.С., Артемьева И.Л., Бухановский А.В., Воеводин В.В., Гергель В.П., Демкин В.П., Коньков К.А., Крукиер Л.А., Попова Н.Н., Соколинский Л.Б., Сухинов А.И. Проект «Суперкомпьютерное образование»: 2012 год // Научный сервис в сети Интернет: поиск новых решений. Труды Международной суперкомпьютерной конференции. Москва, 2012. С. 4–8.

Сухинов Александр Иванович, д.ф.-м.н., декан факультета физики, математики, информатики, Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ) (Таганрог, Российская Федерация), sukhinov@gmail.com

Чистяков Александр Евгеньевич, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем им. А.В. Каляева Южного федерального университета (Таганрог, Российская Федерация), cheese_05@mail.ru

Якобовский Михаил Владимирович, д.ф.-м.н., заведующий сектором «Программное обеспечение вычислительных систем и сетей», Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), lira@imamod.ru

Поступила в редакцию 3 сентября 2015 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series “Computational Mathematics and Software Engineering”
2016, vol. 5, no. 1, pp. 47–62*

DOI: 10.14529/cmse160105

ACCURACY OF THE NUMERICAL SOLUTION OF THE EQUATIONS OF DIFFUSION-CONVECTION USING THE DIFFERENCE SCHEMES OF SECOND AND FOURTH ORDER APPROXIMATION ERROR

A.I. Sukhinov, Taganrog Institute of A.P. Chekhov (branch) of the Rostov State University of Economics (RINH), Taganrog, Russian Federation

A.E. Chistakov, Scientific Research Institute of Multiprocessing Computing Systems of A.V. Kalyaeva Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation

M.V. Iakobovskii, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russian Federation

The paper deals with the scheme of the second and fourth order approximation error for solving convection-diffusion problems. To model initial boundary value problem in the case when the functions of the right and the initial condition can be represented by finite sums of Fourier series in the trigonometric basis, we investigated the accuracy of difference schemes. It was found that the accuracy of the numerical solution depends on the number of units attributable to half the wavelength corresponding to the most high frequency harmonics in the final sum of the Fourier series, necessary to describe the behavior of calculated objects. The dependence of the diffusion approximation error terms difference schemes of second and fourth order of accuracy of the number of nodes. The comparison of the calculation results of two-dimensional convection-diffusion problems and tasks of the Poisson-based schemes of the second and fourth order accuracy. In the expediency of transition to a scheme of high accuracy for solving applied problems of the estimates and is easy to obtain the numerical values of the gain in computation time by using schemes of higher order accuracy.

Keywords: accuracy difference schemes, convection-diffusion equation, approximation error.

FOR CITATION

Sukhinov A.I., Chistakov A.E., Iakobovskii M.V. Accuracy of the Numerical Solution of the Equations of Diffusion-Convection Using the Difference Schemes of Second and Fourth Order Approximation Error. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 1. pp. 47–62. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160105.

References

1. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Semenyakina A.A., Nikitina A.V. Parallel'naya realizatsiya zadach transporta veshchestv i vosstanovleniya donnoy poverkhnosti na osnove skhem povyshennogo poryadka tochnosti [Parallel implementation of the tasks of transport agents and the bottom surface of the restoration on the basis of schemes of increased order of accuracy]. *Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye* [Computational Methods and Programming]. 2015. vol. 16. no. 2. pp. 256–267. (in Russian)
2. Chistyakov A.E., Semenyakina A.A. Primeneniye metodov interpolyatsii dlya vosstanovleniya donnoy poverkhnosti [Use of interpolation methods for recovery bottom surface]. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences]. 2013. no. 4. pp. 21–28. (in Russian)
3. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. Parallel'naya realizatsiya trekhmernoy modeli gidrodinamiki melkovodnykh vodoyemov na supervychislitel'noy sisteme [Parallel implementation of a three-dimensional hydrodynamic model of shallow water basins on supercomputing systems]. *Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye* [Computational Methods and Programming]. 2012. vol. 13. no. 1. pp. 290–297. (in Russian)
4. Boaster N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Publishing house: Lab basic knowledge, 2003. (in Russian)
5. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A. *Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Ural'tseva N.N. Linear and quasi-linear parabolic equation]. M.: Nauka, 1967. 736 p. (in Russian)
6. Pinkevich V.T. O poryadke ostatochnogo chlena ryada Fur'ye funktsiy, differentsiruyemykh v smysle Weyl'ya [On the order of the remainder term of the Fourier series of functions differentiable in the sense of Weyl'ya]. *Math. USSR Academy of Sciences . Ser . Mat.* 1940. vol. 4. no. 6. pp. 521–528.
7. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. M.: Nauka, 1989. (in Russian)
8. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Shishenya A.V. Error estimate for diffusion equations solved by schemes with weights. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014. vol. 6. no. 3. pp. 324–331. DOI: 10.1134/S2070048214030120.
9. Zhalnin R.V., Zmitrenko N.V., Ladonkina M.E., Tishkin V.F. Chislennoye modelirovaniye razvitiya neustoychivosti Rikhtmayyera - Meshkova s ispol'zovaniyem skhem vysokogo poryadka tochnosti [Numerical simulation of Richtmyer - Meshkov using schemes of high order of accuracy]. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical Simulation]. 2007. vol. 19. no. 10. pp. 61–66. (in Russian)
10. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2014. vol. 6. no. 4. pp. 351–363. DOI: 10.1134/S2070048214040097.
11. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Matematicheskoye modelirovaniye transporta nanosov v pribrezhnykh vodnykh sistemakh na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme [Mathematical modeling of sediment transport in coastal water systems to multiprocessor computer system]. *Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye* [Computational Methods and Programming]. 2014. vol. 15. no. 4. pp. 610–620. (in Russian)

12. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1988. (in Russian)
13. Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Chistyakov A.E., Semenov I.S. Matematicheskoe modelirovanie usloviy formirovaniya zamorov v melkovodnykh vodoemakh na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme [Mathematical modeling of the formation of Zamora in shallow waters on a multiprocessor computer system]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Computational methods and programming]. 2013. vol. 14. no. 1. pp. 103-112. (in Russian)
14. Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Chistyakov A.E. Modelirovaniye stsenariya biologicheskoy reabilitatsii Azovskogo morya [Numerical simulation of biological remediation Azov Sea]. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical Simulation]. 2012. vol. 24. no. 9. pp. 3–21. (in Russian)
15. Antonov A.S., Artemyev I.L., Boukhanovsky A.V. etc. Proyekt «Superkomp'yuternoye obrazovaniye» 2012 god [The project «Supercomputer Education»: 2012]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo* [Bulletin of the Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky]. 2013. vol. 1. no. 1. pp. 12–16. (in Russian)
16. Voevodin V.V., Gergel V.P., Sokolinskii L.B. etc. Razvitiye sistemy superkomp'yuternogo obrazovaniya v Rossii: tekushchiye rezul'taty i perspektivy [Development of Supercomputer Education in Russia: current results and prospects]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo* [Bulletin of the Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky]. 2012. vol. 4. no. 1. pp. 268–274. (in Russian)
17. Antonov A.S., Artemyev I.L., Boukhanovsky A.V. and etc. Proyekt «Superkomp'yuternoye obrazovaniye» 2012 god [The project «Supercomputer Education»: 2012]. *Nauchnyy servis v seti Internet: poisk novykh resheniy Trudy Mezhdunarodnoy superkomp'yuternoy konferentsii* [Scientific service on the Internet: the search for new solutions Proceedings of the International Supercomputer Conference]. Moscow, 2012. pp. 4–8. (in Russian)

Received September 3, 2015.