УДК 517.968.21 DOI: 10.14529/cmse160104

О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЭТОГО МЕТОДА

В.П. Танана, А.И. Сидикова

Рассматривается одномерное интегральное уравнение Фредгольма I рода с замкнутым ядром, имеющее единственное в пространстве $W_2^1[a,b]$ решение. Для решения данного уравнения используется метод регуляризации А.Н. Тихонова первого порядка. Этот метод позволяет свести данное уравнение к вариационной задаче, решая которую приходим к интегро-дифференциальному уравнению второго порядка. Для решения этого уравнения использован метод конечноразностной аппроксимации, который позволяет свести исходную задачу к системе алгебраических уравнений.

В работе приведена оценка погрешности, предложенного алгоритма, которая учитывает погрешность конечноразностной аппроксимации уравнения и позволяет увязать ее с параметром регуляризации и погрешностью исходных данных.

Этот алгоритм использован для решения задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости.

Ключевые слова: регуляризация, метод невязки, модуль непрерывности, оценка погрешности, некорректная задача.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Танана В.П., Сидикова А.И. О решении методом регуляризации А.Н. Тихонова одной обратной задачи физики твердого тела и оценка погрешности этого метода // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 35–46. DOI: 10.14529/cmse160104.

Введение

Многочисленные практически важные задачи приводят к некорректно поставленным задачам, как, например, уравнениям Фредгольма первого рода. При численном решении некорректных задач возникает проблема дискретизации исходной задачи, то есть замены непрерывной математической модели некоторым ее конечномерным аналогом. Наиболее употребительным способом дискретизации является конечноразностный, при котором нахождение приближенного решения обычно сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

В данной работе рассмотрен метод регуляризации А.Н. Тихонова [1] для решения одной обратной задачи физики твердого тела [2]. Используемый в работе конечноразностный вариант метода регуляризации при решении данной задачи подробно описан в работе [3], но в ней отсутствует обоснование данного алгоритма. В частности, нет увязки параметров дискретизации с исходными данными задачи, а также значение параметра регуляризации никак не зависит от погрешности дискретизации. В [3] отсутствует оценка погрешности предложенного алгоритма.

В данной работе даны ответы на все указанные вопросы. Для этой цели использована теория, развитая в работе [4] для интегральных уравнений Фредгольма первого рода. На ее основе получена оценка погрешности в интегральном операторе, вызванная его дискретизацией. Значение параметра α, определенного из принципа невязки [5], в методе регуляризации увязано не только с погрешностью исходных данных, но и с погрешностью дискретизации.

Использование данного подхода проиллюстрировано на примере задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости. Исследование возможности выявления тонкой структуры, в первую очередь, количества, положения и величины пиков функции и разработка для этого эффективных, т.е. требующих минимальной априорной информации и оптимальных по точности методов решения некорректно поставленных задач, имеет важное теоретическое и практическое значение, не ограничивающееся рамками рассматриваемой обратной задачи.

В разделе 1 рассматривается одномерное интегральное уравнение Фредгольма I рода с замкнутым ядром, имеющее единственное в пространстве $W_2^1[a,b]$ решение. В разделе 2,3 исследован регуляризующий алгоритм приближенного решения интегрального уравнения первого рода, включающий конечномерную аппроксимацию исходной задачи. Получена оценка погрешности этого алгоритма, использующего дискретизацию интегрального уравнения первого рода по двум переменным. В разделе 4 данный подход проиллюстрирован на примере задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s,t)u(s)ds = f(t), \quad c \le t < d, \tag{1}$$

где $P(s,t) \in C([a,b]\times[c,d))$, d— может быть ∞, $f(t) \in L_2[c,d)$ и ядро $P(s,t)$ оператора A замкнуто.

Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $u_0(s)$ уравнения (1), которое принадлежит множеству M_r, где

$$M_r = \left\{u(s) \ : \ u(s), u'(s) \in L_2[a,b], \ u(a) = 0, \ \int_a^b [u'(s)]^2 ds \le r^2\right\}, \tag{2}$$

а $u'(s)$— производная $u(s)$ по s.

Из замкнутости ядра $P(s,t)$ следует единственность решения $u_0(s)$ уравнения (1).

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны $f_\delta(t) \in L_2[c,d)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\| \le \delta.$$

Требуется по $f_\delta(t)$, δ и M_r определить приближенное решение $u_\delta(s)$ и оценить его уклонение от точного решения $u_0(s)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$.

Сделаем некоторые преобразования уравнения (1). Для этого введем оператор B, отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$, формулой

$$u(s) = Bv(s) = \int_a^s v(\xi)d\xi, \quad v(s), \ Bv(s) \in L_2[a,b]. \tag{3}$$

Оператор C зададим следующим образом:

$$Cv(s) = ABv(s); \quad v(s) \in L_2[a,b], Cv(s) \in L_2[c,d). \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует, что

$$Cv(s) = \int_a^b K(s,t)v(s)ds, \tag{5}$$

где

$$K(s,t) = \int_b^s P(\xi,t)d\xi. \tag{6}$$

Для численного решения уравнения (1) аппроксимируем оператор C конечномерным оператором C_n.

Для определения оператора C_n разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей и введем функции $\overline{K}_i(t)$ и $K_n(s,t)$ формулами

$$\overline{K}_i(t) = K(\overline{s}_i, t), \tag{7}$$

где $\overline{s}_i = \dfrac{s_i + s_{i+1}}{2}$, $s_{i+1} = a + \dfrac{(i+1)(b-a)}{n}$, $s_i = a + \dfrac{i(b-a)}{n}$, $i = 0,1,...,n-1$, и

$$K_n(s,t) = \overline{K}_i(t); \quad s_i \le s < s_{i+1}, \quad t \in [c,d), \quad i = 0,1,...,n-1. \tag{8}$$

Используя (8), определим конечномерный оператор C_n формулой

$$C_n v(s) = \int_a^b K_n(s,t)v(s)ds; \quad t \in [c,d), \tag{9}$$

где C_n отображает пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[c,d)$.

Теперь оценим величину $\|C_n - C\|$.

Для этого введем функцию $N(t)$ формулой

$$N(t) = \max_{a \le s \le b} |P(s,t)|, \quad t \in [c,d). \tag{10}$$

Так как $P(s,t) \in C([a,b] \times [c,d))$, то из (10) следует, что

$$N(t) \in C[c,d).$$

Дополнительно предположим, что

$$N(t) \in L_2[c,d).$$

Используя функцию $N(t)$, определенную (10), перейдем к оценке $\|C_n - C\|$.

Лемма 1. Пусть $h = \dfrac{b-a}{n}$, а операторы C и C_n определены формулами (5) и (9). Тогда справедлива оценка

$$\|C_n - C\| \le h\sqrt{b-a}\|N(t)\|_{L_2}.$$

Доказательство. Так как из (5) и (9) следует, что

$$Cv(s) - C_n v(s) = \int_a^b (K(s,t) - K_n(s,t))v(s)ds,$$

а

$$\|C_n - C\|^2 \le \sup\left\{\int_c^d \left[\int_a^b |K_n(s,t) - K(s,t)|\ |v(s)|ds\right]^2 dt \quad : \quad \|v\| \le 1\right\},$$

то, учитывая (7), (8), (10) и то, что

$$\int_a^b |K_n(s,t) - K(s,t)|\ |v(s)|ds \le \int_a^b |K(s,t) - K(\overline{s}_i,t)|\ |v(s)|ds \le h \cdot N(t) \int_a^b |v(s)|ds,$$

$$\|C_n - C\|^2 \le h^2 \int_c^d N^2(t)\left[\int_a^b |v(s)|ds\right]^2 dt. \tag{11}$$

Из того, что $\|v(s)\| \le 1$, а $\displaystyle\int_a^b |v(s)|ds \le \sqrt{b-a}\|v(s)\|$, учитывая (11), получим

$$\|C_n - C\| \le \sqrt{b-a}\|N(t)\|_{L_2} h.$$

Тем самым лемма доказана. □

В дальнейшем величину $h\sqrt{b-a}\|N(t)\|_{L_2}$ будем обозначать через η_n.

2. Метод невязки

Введем конечномерное подпространство X_n пространства $L_2[a,b]$, состоящее из функций, постоянных на промежутках $[s_i, s_{i+1}), i = 0,1,2,...,n-1$.

Через Y_n обозначим подпространство пространства $L_2[c,d)$, определяемое формулой

$$Y_n = C_n X_n.$$

Через $f_\delta^n(t)$ обозначим функцию пространства Y_n, определяемую формулой

$$f_\delta^n(t) = pr(f_\delta\ ; Y_n),$$

где $pr(f_\delta\ ; Y_n)$ метрическая проекция в пространстве $L_2[c,d)$ функции $f_\delta(t)$ на Y_n.

Для решения уравнения (1) воспользуемся конечномерным вариантом метода регуляризации А.Н. Тихонова [1]

$$\inf\left\{\|C_n v(s) - f_\delta^n(t)\|^2 + \alpha \int_a^b v^2(s)ds \quad : \quad v(s) \in X_n\right\}, \quad \alpha > 0. \tag{12}$$

Известно, что задача (12) имеет единственное решение $v_{\delta n}^\alpha(s)$. Значение параметра регуляризации α в решение $v_{\delta n}^\alpha(s)$ задачи (12) выберем из принципа невязки [5] .

$$\|C_n v_{\delta n}^\alpha(s) - f_\delta^n(t)\| = \delta + r\eta_n, \tag{13}$$

Известно, что при условии

$$\|f_\delta^n(t)\| > r\eta_n + \delta$$

существует единственное решение $\alpha(\delta, n)$ уравнения (13).

Если решение $v_{\delta n}^{\alpha(\delta,n)}(s)$ задачи (12), (13) обозначим через $v_{\delta n}(s)$, то приближенное решение $u_{\delta n}(s)$ уравнения (1) будет иметь вид

$$u_{\delta n}(s) = Bv_{\delta n}(s).$$

Для сведения задачи (12) к системе линейных алгебраических уравнений, в пространстве X_n введем ортонормированный базис $\{\varphi_i(s)\}$ формулой

$$\varphi_i(s) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{n}{b-a}}; & s_i \le s < s_{i+1}; \\ 0 \ ; & s \notin [s_i, s_{i+1}), \quad i = 0, 1, ..., n-1. \end{cases}$$

Используя этот базис, определим изометричный оператор J_x, отображающий R^n на X_n, формулой

$$J_x[\overline{x}](s) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \varphi_i(s), \quad \overline{x} = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}). \tag{14}$$

Используя оператор J_x для замены переменных в задаче (12), сведем ее к следующей

$$\inf\{\|C_n J_x[J_x^{-1}v(s)] - f_\delta^n(t)\|_{Y_n}^2 + \alpha\|J_x^{-1}[v(s)]\|_{R^n}^2 \quad : \quad J_x^{-1}[v(s)] \in R^n\}, \tag{15}$$

где J_x^{-1} оператор, обратный оператору J_x.

Задача (15) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений

$$h\sum_{i=0}^{n-1} b_{ij} v_i + \alpha v_j = q_j; \quad j = 0, 1, ..., n-1, \tag{16}$$

где $b_{ij} = \displaystyle\int_c^d \overline{K}_i(t)\overline{K}_j(t), \quad q_j = \sqrt{h}\int_c^d \overline{K}_j(t) f_\delta^n(t).$

Теорема 1. Пусть $v_{\delta n}^n(s)$ и (v_i^α) решение задач (12) и (16) соответственно.

Тогда эти решения связаны соотношением

$$v_{\delta n}^\alpha(s) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i^\alpha \varphi_i(s). \tag{17}$$

Доказательство этой теоремы приведено в [4].

Решение системы (16) обозначим через $\overline{v}^\alpha = (v_0^\alpha, v_1^\alpha, ..., v_{n-1}^\alpha)$.

Для выбора параметра регуляризации уравнение (13) сведем к следующему

$$\left\{\int_a^b \left[\sqrt{h}\sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_i(t) v_i^\alpha - f_\delta^n(t)\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} = r\eta_n + \delta. \tag{18}$$

Решение уравнения (18) обозначим через $\alpha(\delta, n)$. Тогда решение задачи (16), (18) обозначим через $\overline{v}^{\alpha(\delta,n)}$.

Теорема 2. Пусть оператор J_x определен формулой (14), $v_{\delta n}(s)$ — решение задачи (12), (13), а $\overline{v}^{\alpha(\delta,n)}$— решение системы (16), (18). Тогда эти решения связаны соотношением

$$v_{\delta n}(s) = J_x[\overline{v}^{\alpha(\delta,n)}](s).$$

Методика доказательства этой теоремы приведена в [4].

3. Оценка погрешности приближенного решения $u_{\delta n}(s)$

Для оценки погрешности введем функцию

$$\omega(\tau, r) = \sup\{\|u(s)\| \ : \ u(s) = Bv(s), \ \|v(s)\| \leq r, \ \|Au(s)\| \leq \tau\}, \quad \tau, r > 0.$$

Из теоремы, сформулированной в [6], следует

Теорема 3. Пусть $u_{\delta n}(s)$ приближенное решение уравнения (1), а $u_0(s)$ — его точное решение. Тогда

$$\|u_{\delta n}(s) - u_0(s)\| \leq 2\omega(r\eta_n + \delta, r). \tag{19}$$

4. Численное решение задачи определения фононного спектра кристалла

Связь энергетического спектра бозе-системы с ее теплоемкостью, зависящей от температуры, описывается интегральным уравнением первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s,t)u(s)ds = \frac{f(t)}{t}; \ \ 0 \leq t < \infty, \ \ b > a > 0, \tag{20}$$

где $P(s,t) = \dfrac{s^2}{2t^3 \operatorname{sh}^2\left(\dfrac{s}{2t}\right)}$, $u(s) \in L_2[a,b]$, $\dfrac{f(t)}{t} \in L_2[0,\infty)$, $u(s)$ — спектральная плотность кристалла, а $f(t)$ — его теплоемкость, зависящая от температуры [2].

Предположим, что при $f(t) = f_0(t)$ существует точное решение $u_0(s)$ уравнения (20), которое принадлежит множеству M_r, где

$$M_r = \left\{u(s) \ \ : \ u(s), u'(s) \in L_2[a,b], \ u(a) = 0, \ \ \int_a^b [u'(s)]^2 ds \leq r^2\right\},$$

r известное число, $u'(s)$ — производная от функции $u(s)$ по s.

Пусть точное значение $f_0(t)$ нам неизвестно, а вместо него даны $f_\delta(t)$ и $\delta > 0$ такие, что $\dfrac{f_\delta(t)}{t} \in L_2[0,\infty)$, а

$$\left\| \frac{f_\delta(t)}{t} - \frac{f_0(t)}{t} \right\|_{L_2} \leq \delta.$$

Требуется по $f_\delta(t)$, δ и M_r определить приближенное решение $u_\delta(s)$ и оценить его уклонение от точного решения $u_0(s)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$.

Заметим, что единственность решения уравнения (20) доказана в [7].

Введем оператор B, отображающий пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[a,b]$, формулой

$$u(s) = Bv(s) = \int_a^s v(\xi)d\xi, \ \ v(s), \ Bv(s) \in L_2[a,b]$$

и оператор C

$$Cv(s) = ABv(s); \quad v(s) \in L_2[a,b], Cv(s) \in L_2[0,\infty).$$

Из (3) и (6) следует, что

$$Cv(s) = \int_a^b K(s,t)v(s)ds, \quad \text{где} \quad K(s,t) = \int_b^s P(\xi,t)d\xi.$$

Теперь, для замены оператора C конечномерным оператором C_n, воспользуемся конструкцией, описанной формулами (7)–(9). Тогда

$$C_n v(s) = \int_a^b K_n(s,t)v(s)ds; \quad t \in [0,\infty),$$

где $K_n(s,t)$ определена формулой (8) и C_n отображает пространство $L_2[a,b]$ в $L_2[0,\infty)$.

После этого перейдем к оценке погрешности дискретизации, то есть оценим величину $\|C_n - C\|$.

Из леммы 1 следует, что

$$\|C_n - C\| \le \sqrt{b-a}\|N(t)\|_{L_2} h, \tag{21}$$

где $h = \dfrac{b-a}{n}$, а $N(t)$, следуя (10), определяется формулой

$$N(t) = \max_{a \le s \le b} |P(s,t)|, \quad t \in [0,\infty). \tag{22}$$

Из (20) и (22) следует, что

$$N(t) \le \frac{b^2}{2t^3 \operatorname{sh}^2\left(\dfrac{a}{2t}\right)}. \tag{23}$$

Таким образом, из (23) следует, что при $t \to \infty$

$$\frac{b^4}{4t^6 \operatorname{sh}^4\left(\dfrac{a}{2t}\right)} \cong \left(\frac{b}{\sqrt{2}\,a}\right)^4 \frac{1}{t^2}, \tag{24}$$

а при $t \to 0$

$$\frac{b^4}{4t^6 \operatorname{sh}^4\left(\dfrac{a}{2t}\right)} \to 0. \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует, что

$$\frac{b^2}{2t^3 \operatorname{sh}^2\left(\dfrac{a}{2t}\right)} \in L_2[0,\infty), \tag{26}$$

а, следовательно, и $N(t) \in L_2[0,\infty)$.

Из (21), (23) и (26) следует, что

$$\|C_n - C\| \leq \sqrt{b-a}\ \frac{b^2}{2}\ \left[\int_0^\infty \frac{dt}{t^6 \operatorname{sh}^4\left(\dfrac{a}{2t}\right)}\right]^{\frac{1}{2}} h = \eta_n. \tag{27}$$

Для решения уравнения (20) используем конечномерный вариант метода регуляризации А.Н. Тихонова [1]

$$\inf\left\{\left\|C_n v(s) - \frac{f_\delta(t)}{t}\right\|_{L_2}^2 + \alpha\int_a^b [v(s)]^2 ds \quad : \quad v(s) \in X_n\right\}, \quad \alpha > 0. \tag{28}$$

Обозначим через $f_\delta^n(t)$ функцию пространства Y_n, определяемую формулой

$$f_\delta^n(t) = pr\left(\frac{f_\delta(t)}{t};\ Y_n\right),$$

где Y_n определено в разделе 2, а $pr\left(\dfrac{f_\delta(t)}{t};\ Y_n\right)$ — метрическая проекция функции $\dfrac{f_\delta(t)}{t}$ на Y_n.

Известно, что задача (28) имеет единственное решение $v_{\delta n}^\alpha(s)$. Значение параметра регуляризации α в решении $v_{\delta n}^\alpha(s)$ выберем из принципа невязки [5]

$$\left\|C_n v_{\delta n}^\alpha(s) - f_\delta^n(t)\right\| = \delta + r\eta_n. \tag{29}$$

При условии

$$\|f_\delta^n(t)\|_{L_2} > r\eta_n + \delta$$

уравнение (29) имеет единственное решение $\alpha(\delta, n)$.

Если решение $v_{\delta n}^{\alpha(\delta,n)}(s)$ задачи (28), (29) обозначим через $v_{\delta n}(s)$, то приближенное решение $u_{\delta n}(s)$ уравнения (20) имеет вид

$$u_{\delta n}(s) = Bv_{\delta n}(s).$$

Для сведения задачи (27) к системе линейных алгебраических уравнений воспользуемся изометричным оператором J_x, отображающим R^n на X_n формулой

$$J_x[\overline{x}](s) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \varphi_i(s), \quad \overline{x} = (x_0, x_1, ..., x_{n-1}),$$

где $\{\varphi_i(s)\}$ — ортонормированный базис пространства X_n, введенный в разделе 2.

Используя оператор J_x, сведем задачу (27) к следующей

$$\inf\{\|C_n J_x[J_x^{-1} v(s)] - f_\delta^n(t)\|^2 + \alpha\|J_x^{-1}[v(s)]\|_{R^n}^2 \quad : \quad J_x^{-1}[v(s)] \in R^n\}, \tag{30}$$

где J_x^{-1} оператор, обратный оператору J_x.

Задача (30) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений (16)

$$h\sum_{i=0}^{n-1} b_{ij} v_i + \alpha v_j = q_j; \quad j = 0, 1, ..., n-1, \tag{31}$$

где $b_{ij} = \int_0^\infty \overline{K}_i(t)\overline{K}_j(t)dt$, а $q_j = \sqrt{h}\int_0^\infty \overline{K}_j(t)f_\delta^n(t)dt$.

Решение системы (31) обозначим через (v_i^α), а следуя теореме 1, решение задач (27) и (31) связаны соотношением

$$v_{\delta n}^\alpha(s) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i^\alpha \varphi_i(s).$$

Для выбора параметра α в решение $\overline{v}^\alpha$ системы (31) используем уравнение (29), которое в дискретном варианте перейдет в уравнение (18)

$$\left\{\int_0^\infty \left[\sqrt{h}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{K}_i(t)v_i^\alpha - f_\delta^n(t)\right]^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} = r\eta_n + \delta.$$

Решение системы уравнений (31) и (18) обозначим через $\overline{v}^{\alpha(\delta,n)}$.

Из теоремы 2 будет следовать, что решение задачи (27), (29) имеет вид

$$v_{\delta n}(s) = J_x[\overline{v}^{\alpha(\delta,n)}](s).$$

Используя формулу (20), получим приближенное решение $u_{\delta n}(s)$ уравнения (17)

$$u_{\delta n}(s) = Bv_{\delta n}(s).$$

Из соотношения (19) следует оценка уклонения приближенного решения $u_{\delta n}(s)$ уравнения (27) от его точного решения $u_0(s)$ в метрике пространства $L_2[a,b]$

$$\|u_{\delta n}(s) - u_0(s)\| \le 2\omega(r\eta_n + \delta, r). \tag{32}$$

В работе [8] доказано, что для уравнения (27) на множестве M_r, определенном формулой (2), для модуля непрерывности $\omega(\sigma, r)$ справедлива оценка

$$\omega(\sigma, r) \le r\left[1 + \frac{1}{\pi}\ln^2\left(\frac{r}{4\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{33}$$

Из (32) и (33) получим окончательную оценку

$$\|u_{\delta n}(s) - u_0(s)\| \le 2r\left[1 + \frac{1}{\pi}\ln^2\left(\frac{r}{4(r\eta_n + \delta)}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Заключение

Фундаментальная научная проблема связана с обоснованием новых численных методов. При численном решении обратных задач одним из важнейших показателей используемого метода является его точность и, как следствие, наилучшая информативность приближенного решения. С возрастанием объема экспериментальной информации и улучшением ее качества (повышением точности наблюдений) для интерпретации эксперимента необходимо применять новые более полные математические модели и решать обратные задачи в рамках этих моделей новыми методами. Работа направлена на решение фундаментальной проблемы, связанной с исследованием точности этих методов, применимых для решения обратных задач математической физики в новых постановках, а также на разработку новых оптимальных и оптимальных по порядку методов и их программную реализацию.

В данной работе усилены результаты работы [8] за счет учета погрешности дискретизации интегрального уравнения. Показано, что для применения численных методов не требуется значительных преобразований физической модели. Это позволяет учитывать априорную информацию при решении задачи. Разработанный метод использован для численного решения одной обратной задачи физики твердого тела. Главная трудность этих задач заключается в том, что они, с одной стороны, являются некорректными, а с другой — имеют решение сложного вида.

Литература

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
2. Лифшиц И.М. Об определении энергетического спектра бозе-системы по ее теплоемкости // Журн. эксперимент. и теор. физики. 1959. Т. 26, № 5. С. 551–556.
3. Иверонова В.И., Тихонов А.Н., Заикин П.Н., Звягина А.П. Определение фононного спектра кристаллов по теплоемкости // Физика твердого тела. 1966. Т. 8, № 12. С. 3459–3462.
4. Танана В.П., Сидикова А.И. Об оценке погрешности регуляризующего алгоритма, основанного на обобщенном принципе невязки, при решении интегральных уравнений // Журн. вычисл. методы и програм. 2015. Т. 16, № 1. С. 1–9.
5. Морозов В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1966. Т. 6, № 1. С. 170–175.
6. Иванов В.К., Королюк Т.И. Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9, № 1. С. 30–41.
7. Танана В.П., Бояршинов В.В. О единственности решения обратной задачи определения фононных спектров кристалла // Деп. в ВИНИТИ. 1987. № 892-В87.
8. Танана В.П., Ерыгина А.А. Оценка погрешности метода регуляризации А.Н. Тихонова при решении одной обратной задачи физики твердого тела // Сиб. журн. индустр. матем. 2014. Т. 17, № 2. С. 125–136.

Танана Виталий Павлович, д.ф.-м.н., зав. кафедрой вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), tvpa@susu.ac.ru

Сидикова Анна Ивановна, к.ф.-м.н., доцент кафедры вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), sidikovaai@susu.ru

Поступила в редакцию 10 сентября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Computational Mathematics and Software Engineering"
2016, vol. 5, no. 1, pp. 35–46

DOI: 10.14529/cmse160104

ON SOLUTION OF SOLID STATE PHYSICS INVERSE PROBLEM BY MEANS OF A. N. TIKHONOV'S REGULARIZATION METHOD AND ESTIMATION OF THE ERROR OF THIS METHOD

V.P. Tanana, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation
A.I. Sidikova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The paper considers one-dimensional Fredholm integral equation of the first kind with a closed core. It is known that the equation has a unique solution in the space $W_2^1[a,b]$. We use Tikhonov's regularization method of the first-order to solve the equation. The method allows us to reduce the equation to a variational problem. Solving the variational problem we get integro-differential equation of second order. We apply the finite-difference approximation method to reduce the original problem to a system of algebraic equations. regularization parameter.

We obtain an error estimate for the proposed algorithm taking into account the error of finite-difference approximation and state the relation between the approximation with the error and the regularization parameter and the error of the initial data.

This algorithm is used to solve the problem of determining the phonon spectrum of the crystal given its heat capacity.

Keywords: regularization, the method of residuals, the modulus of continuity, error estimation, ill-posed problem.

FOR CITATION

Tanana V.P., Sidikova A.I. On Solution of Solid State Physics Inverse Problem by Means of A. N. Tikhonov's Regularization Method and Estimation of the Error of this Method. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 1. pp. 35–46. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160104.

References

1. Tihonov A.N. O reshenii nekorektno postavlenykh zadach i metode regulyarizacii [Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularized Method]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Doklady Mathematics]. 1963. vol. 151, no. 3. pp. 501–504. (in Russian)

2. Lifshis I.M. Ob opredelenii energeticheskogo spectra boze-sistemy po teployomkosti [On determining the energy spectrum of the Bose system in her heat]. *Gurnal eksperimental'noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 1959. vol. 26, no. 5. pp. 551–556. (in Russian)

3. Iveronova V.I., Tihonov A. N., Zaikin P.N., Zvyagina A.P. Opredelenie fononnogo spectra kristallov po teploymkosti [The determination of the phonon spectrum of crystals on the heat capacity]. *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State]. 1966. vol. 8, no. 12. pp. 3459–3462. (in Russian)

4. Tanana V.P., Sidikova A.I. Ob ocenke pogreshnosty regulyarizuyshego algoritma, osnovannogo na obobshennom principe nevyazki, pri reshenii integral'nyh uravnenii [An Error Estimate of a Regularizing Algorithm Bazed of the Generalized Residual Principle when Solving Integral Equations]. *Jurnal vychislitel'nye metody i programmirovanie* [Numerical Methods and Programming]. 2015. vol. 16, no. 1. pp. 1–9. (in Russian)
5. Morozov V.A. O regulyarizacii nekorrectno postavlennyh zadach i vybore parametra regulyarizacii [On the regularization of ill-posed problems and the choice of the regularization parameter]. *Jurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoy fiziki* [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1966. vol. 6, no. 1. pp. 170–175. (in Russian)
6. Ivanov V. K., Korolyuk T.I. Ob ocenke pogreshnosty pri reshenii lineinyh nekorrectno postavlennyh zadach [Error Estimates for Solutions of Incorrectly Posed Linear Problems]. *Jurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoy fiziki* [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1969. vol. 9, no. 1. pp. 30–41. (in Russian)
7. Tanana V.P., Boyarshinov V.V. [On the uniqueness of the solution of the inverse problem of determining the phonon spectra of the crystal]. *Deponirovano v VINITI* [Deposited in VINITI]. 1987. no. 892-V87. (in Russian)
8. Tanana V.P., Erygina A.A. Ocenka pogreshnosty metoda regulyarizacii A.N. Tikhonova pri reshenii odnoi obratnoi zadachi fiziki tverdogo tela [An error estimate for the regularization method of A.N. Tikhonov for solving an inverse problem of solid state physics]. *Sibirskii jurnal industrial'noi matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics]. 2014. vol. 17, no. 2. pp. 125–136. (in Russian)

Received September 10, 2015.