

ОБ ОЦЕНИВАНИИ СОСТОЯНИЙ МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМ ПРИ ГРУППОВОМ ДВИЖЕНИИ¹

Е.К. Костоусова

Рассматривается задача достижимости для набора однотипных линейных многошаговых управляемых объектов, совершающих так называемое групповое движение, при котором объекты попарно не сближаются, но и не слишком отдаляются друг от друга. Приводятся некоторые свойства множеств достижимости; предлагаются алгоритмы построения внешних полиэдральных (параллелепипедозначных) оценок для них.

Ключевые слова: множества достижимости, многошаговые системы, групповое движение, полиэдральные оценки.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Костоусова Е.К. Об оценивании состояний многошаговых систем при групповом движении // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 13–23. DOI: 10.14529/cmse160102.

Введение

Задача построения трубок траекторий (трубок достижимости) является одной из ключевых в гарантированной теории управления [4, 7, 9]. Работа посвящена задаче достижимости для набора из m однотипных линейных многошаговых управляемых объектов, совершающих так называемое групповое «движение» (используем этот термин не обязательно в механическом смысле), при котором объекты попарно не сближаются, но и не слишком отдаляются. Мотивация задач такого рода вытекает из активно развиваемой в последнее время теории управления групповым движением (см., например, [3, 8, 10]). Напомним, что поскольку практическое нахождение трубок траекторий даже для систем без условий группового движения может быть затруднительно, развиваются различные численные методы, в том числе методы оценивания множеств достижимости (МД) областями фиксированной формы, такими как эллипсоиды и параллелепипеды (см, например, [1, 2, 4–9, 11] и указанную там библиографию).

Статья организована следующим образом. В первом разделе дана постановка задачи. Во втором разделе приводятся некоторые свойства МД рассматриваемых систем. Оказывается, что МД полной системы могут быть, вообще говоря, невыпуклыми и несвязными, а трубка достижимости может быть представлена (подобно [9, разд. 11.2]) в виде системы ветвящихся трубок, где сечения ветвей являются выпуклыми политопами. В третьем разделе предлагаются алгоритмы построения некоторых внешних оценок на основе «элементарных» полиэдральных (параллелепипедозначных) оценок для результатов операций с параллелепипедами (описанных в [2, 6, 11] и дополненных оценками для объединения параллелепипедов). В заключении даны итоговые выводы.

1. Постановка задачи

Предполагается, что система состоит из m подсистем с фазовыми координатами $x^j = (x^{j,1\top}, x^{j,2\top})^\top \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$, $j = 1, 2, \dots, m$ (здесь \top — знак транспонирования, \mathbb{R}^n — n -мерное

¹Статья написана по материалам доклада, представленного на XV Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения» (МППиП-2015), г. Екатеринбург, 2–6 марта 2015 г.

векторное пространство), и описывается соотношениями

$$x^j[k] = A^j[k] x^j[k-1] + B^j[k] u^j[k], \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (1)$$

$$x^j[0] \in \mathcal{P}_0^j; \quad u^j[k] \in \mathcal{R}^j[k], \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$\|x^{j,1}[k] - x^{l,1}[k]\|_\infty \geq \underline{\mu}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad j, l = 1, 2, \dots, m, \quad l > j; \quad (3)$$

$$\|x^{j,1}[k] - x^{l,1}[k]\|_\infty \leq \bar{\mu}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad j, l = 1, 2, \dots, m, \quad l > j. \quad (4)$$

Здесь $n_1 > 0$, $n_2 \geq 0$; $A^j[k]$ и $B^j[k]$ — известные матрицы, $\det A^j[k] \neq 0$; $u^j[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$ — управления, стесненные геометрическими ограничениями из (2); множества $\mathcal{P}_0^j \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ и $\mathcal{R}^j[k] \subset \mathbb{R}^{n_u}$ считаем параллелепипедами [2, 6]; формализация *условий группового движения* производится с помощью (3), (4), где $0 < \underline{\mu} < \bar{\mu} \leq \infty$ — заданные значения, и нормы $\|x\|_\infty$ ($\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ для вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$), отличающейся от используемой в [3] евклидовой нормы. Условия (3) (*нижние ограничения*) означают, что траектории подсистем попарно не должны сближаться ближе, чем на положительное значение $\underline{\mu}$ в смысле первой группы координат $x^{j,1}$, а условия (4) (*верхние ограничения*) — что, кроме того, не должны расходиться более, чем на $\bar{\mu}$, если это число принято конечным.

Введем расширенные векторы фазового состояния $z = (x^1{}^\top, x^2{}^\top, \dots, x^m{}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{m(n_1+n_2)}$ и управления $u = (u^1{}^\top, u^2{}^\top, \dots, u^m{}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{mn_u}$ полной системы.

Множеством *достижимости* (МД) $\mathcal{Z}[i]$ системы (1)–(4) в момент $i \in \{0, 1, \dots, N\}$ называем множество всех тех точек $z \in \mathbb{R}^{m(n_1+n_2)}$, для каждой из которых существуют такие $z[0]$ и $u[\cdot]$, удовлетворяющие (2), что порождаемое ими в силу (1) решение $z[\cdot]$ будет удовлетворять условиям $z[i] = z$ и (3)–(4) для $k=0, 1, \dots, i$. Многозначную функцию $\mathcal{Z}[k]$, $k=0, 1, \dots, N$, называем по аналогии с [9] *трубкой достижимости* или *трубкой траекторий* $\mathcal{Z}[\cdot]$.

Рассмотрим следующие *задачи*:

- Описать множества достижимости $\mathcal{Z}[k]$ и трубку достижимости $\mathcal{Z}[\cdot]$.
- Найти внешние параллелепипедозначные (короче, полиэдральные) оценки для них.

Напомним некоторые используемые нами понятия.

Параллелепипедом $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x \mid x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, |\xi_i| \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$; $P = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — неособая матрица ($\det P \neq 0$) со столбцами p^i , $\|p^i\|_2 = 1$ (приведенное условие нормировки в терминах евклидовой нормы может быть опущено с целью упрощения формул); $\pi \in \mathbb{R}^n$, $\pi \geq 0$ (векторные неравенства понимаем покомпонентно). Можно сказать, что p — центр параллелепипеда, P — матрица ориентации, p^i — направления, π_i — величины его «полуосей».

Параллелотопом $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$ называем множество $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$, где $p \in \mathbb{R}^n$, а матрица $\bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ может быть неквадратной ($r \leq n$), особой. Называем параллелотоп \mathcal{P} *невырожденным*, если $r = n$ и $\det \bar{P} \neq 0$.

Полосой или *m-полосой* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m) \subset \mathbb{R}^n$ называем пересечение m *гиперполос* Σ^i (где $1 < m \leq n$, здесь m не связано с числом подсистем в (1)):

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m) = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i, \quad \Sigma^i = \Sigma(c_i, s^i, \sigma_i) = \{x \mid |x^\top s^i - c_i| \leq \sigma_i\}.$$

Здесь $c \in \mathbb{R}^m$; $S = \{s^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ — матрица ранга m со столбцами $s^i \in \mathbb{R}^n$; $\sigma \in \mathbb{R}^m$, $\sigma \geq 0$. Векторы $\pm s^i$ определяют нормали к гиперплоскостям, ограничивающим гиперполосу Σ^i .

Каждый параллелепипед — это параллелотоп: $\mathcal{P}(p, P, \pi) = \mathcal{P}[p, \bar{P}]$, $\bar{P} = P \operatorname{diag} \pi$; каждый невырожденный параллелотоп — это параллелепипед с $P = \bar{P}$, $\pi = e$, где

$e = (1, 1, \dots, 1)^\top$. Известно также, что при $m = n$ полоса превращается в параллелепипед (см. формулы в [2, 6]).

2. Описание множеств достижимости

Несложно видеть, что полная система может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} z[k] &= A[k] z[k-1] + B[k] u[k], \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ z[0] &\in \mathcal{P}_0; \quad u[k] \in \mathcal{R}[k]; \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ z[k] &\in \mathcal{Y}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $A[k] = \text{diag}\{A^j[k]\}$ и $B[k] = \text{diag}\{B^j[k]\}$ — блочные матрицы, составленные из матриц, фигурирующих в (1); параллелепипеды $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}[p_0, \bar{P}_0]$ и $\mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]]$ (записанные для простоты обозначений в виде параллелотопов) определяются множествами $\mathcal{P}_0^j = \mathcal{P}[p_0^j, \bar{P}_0^j]$ и $\mathcal{R}^j[k] = \mathcal{P}[r^j[k], \bar{R}^j[k]]$ из (2): $p_0 = (p_0^{1\top}, p_0^{2\top}, \dots, p_0^{m\top})^\top$, $\bar{P}_0 = \text{diag}\{\bar{P}_0^j\}$, $r[k] = (r^1[k]^\top, r^2[k]^\top, \dots, r^m[k]^\top)^\top$, $\bar{R}[k] = \text{diag}\{\bar{R}^j[k]\}$; множество \mathcal{Y} определяется нижними и верхними ограничениями из условий группового движения:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \check{\mathcal{Y}} \cap \hat{\mathcal{Y}}; \\ \check{\mathcal{Y}} &= \{z = (x^1{}^\top, x^2{}^\top, \dots, x^m{}^\top)^\top \mid \|x^{j,1} - x^{l,1}\|_\infty \geq \underline{\mu}, \quad j, l = 1, 2, \dots, m, \quad l > j\}; \\ \hat{\mathcal{Y}} &= \{z = (x^1{}^\top, x^2{}^\top, \dots, x^m{}^\top)^\top \mid \|x^{j,1} - x^{l,1}\|_\infty \leq \bar{\mu}, \quad j, l = 1, 2, \dots, m, \quad l > j\} \end{aligned} \quad (6)$$

и задает фазовые ограничения (ФО) в системе (5).

Известно [4, § 18], что МД системы типа (5) удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{(0)}[0] &= \mathcal{P}_0; \\ \mathcal{Z}^{(0)}[k] &= A[k] \mathcal{Z}^{(0)}[k-1] + B[k] \mathcal{R}[k], \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ \mathcal{Z}[k] &= \mathcal{Z}^{(0)}[k] \cap \mathcal{Y}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

которые включают операции с множествами: линейное преобразование, сумму Минковского и пересечение. Точное построение МД для систем большой размерности даже в случае выпуклых ФО может быть достаточно затруднительно. В рассматриваемом же случае дополнительная трудность связана с невыпуклостью множеств $\check{\mathcal{Y}}$ и \mathcal{Y} . Это приводит к тому, что МД могут быть, вообще говоря, не только невыпуклыми, но и несвязными.

Рассмотрим, что представляет собой пересечение выпуклого множества $\mathcal{Z}^{(0)}$ с \mathcal{Y} .

Несложно заметить, что невыпуклое множество $\check{\mathcal{Y}}$ представимо в следующем виде:

$$\check{\mathcal{Y}} = \bigcap_{j,l=1,2,\dots,m, l>j} \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n_1} \check{\mathcal{Y}}_i^{j,l} \right), \quad \check{\mathcal{Y}}_i^{j,l} = \{z \mid |x_i^{j,1} - x_i^{l,1}| \geq \underline{\mu}\}, \quad (8)$$

пересечение взято по всем различным парам подсистем, определяемых индексами j и l . Каждая из компонент пересечения есть объединение n_1 множеств $\check{\mathcal{Y}}_i^{j,l}$, каждое из которых есть в свою очередь объединение двух полупространств в $\mathbb{R}^{m(n_1+n_2)}$ с обратными коллинеарными нормальными: $\check{\mathcal{Y}}_i^{j,l} = \check{\mathcal{Y}}_{(i,0)}^{j,l} \cup \check{\mathcal{Y}}_{(i,1)}^{j,l}$, где $\check{\mathcal{Y}}_{(i,0)}^{j,l} = \{z \mid x_i^{j,1} - x_i^{l,1} \leq -\underline{\mu}\}$, а $\check{\mathcal{Y}}_{(i,1)}^{j,l} = \{z \mid x_i^{j,1} - x_i^{l,1} \geq \underline{\mu}\}$.

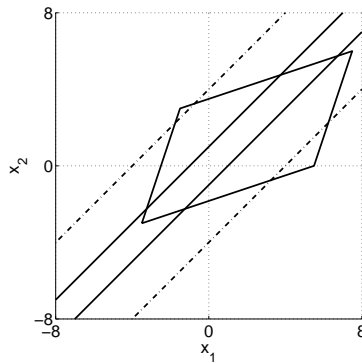
Аналогичную структуру имеет множество \mathcal{Y} :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \bigcap_{j,l=1,2,\dots,m, l>j} \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n_1} \mathcal{Y}_i^{j,l} \right), \quad \mathcal{Y}_i^{j,l} = \{z \mid |x_i^{j,1} - x_i^{l,1}| \geq \underline{\mu}, \|x^{j,1} - x^{l,1}\|_\infty \leq \bar{\mu}\}, \\ &\quad \mathcal{Y}_i^{j,l} = \mathcal{Y}_{(i,0)}^{j,l} \cup \mathcal{Y}_{(i,1)}^{j,l} = \mathcal{Y}_{(i,0)}^\gamma \cup \mathcal{Y}_{(i,1)}^\gamma = \mathcal{Y}_i^\gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и далее для упрощения обозначений вместо двух индексов j и l будем использовать также один индекс γ , которым нумеруем различные пары подсистем; число таких пар $J = m(m-1)/2$ штук, где m — общее число подсистем в (1).

Замечание 1. Можно считать, что пары множеств $\mathcal{Y}_{(i,0)}^\gamma = \mathcal{Y}_{(i,0)}^{j,l}$ и $\mathcal{Y}_{(i,1)}^\gamma = \mathcal{Y}_{(i,1)}^{j,l}$ в (9) с одинаковыми индексами γ и i — это пары непересекающихся n_3 -полос, имеющих одинаковые параметры S и σ (будем называть их *парными*), где $n_3 = n_1$ при $\bar{\mu} < \infty$ и $n_3 = 1$ при $\bar{\mu} = \infty$ (т.е. когда условия (4) отсутствуют). При $\bar{\mu} < \infty$ параметры этих полос определяются следующим образом. Пусть $H = (I, 0) \in \mathbb{R}^{n_1 \times (n_1+n_2)}$ — блочная матрица с блоками в виде единичной $I \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$ и нулевой $0 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$ матриц, а $L^j = (0, \dots, 0, I, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times m(n_1+n_2)}$ — матричная строка, состоящая из m квадратных матриц, где единичная матрица I стоит на j -м месте в этой строке (так что получается $H \cdot L^j \cdot z = x^{j,1} \in \mathbb{R}^{n_1}$). Тогда параметры n_1 -полос $\mathcal{Y}_{(i,\omega)}^{j,l}$ можно записать в виде: $s = (-1)^{\omega+1} e^i (\underline{\mu} + \bar{\mu})/2 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $\sigma = \bar{\mu} e^i - e^i (\underline{\mu} + \bar{\mu})/2 \in \mathbb{R}^{n_1}$, $S = (L^j - L^l)^\top H^\top \in \mathbb{R}^{m(n_1+n_2) \times n_1}$, где e^i — i -й единичный орт в \mathbb{R}^{n_1} (i -й столбец единичной матрицы I). При $\bar{\mu} = \infty$ для единообразия примем, что $\mathcal{Y}_{(i,\omega)}^{j,l}$ — это гиперполосы с $s = (-1)^{\omega+1} (\underline{\mu} + \bar{\mu})/2 \in \mathbb{R}^1$, $\sigma = (\bar{\mu} - \underline{\mu})/2 \in \mathbb{R}^1$, $S = (L^j - L^l)^\top H^\top e^i \in \mathbb{R}^{m(n_1+n_2)}$, где $\bar{\mu} = 2\tilde{\mu}$, а в качестве $\tilde{\mu}$ взята какая-либо априорная верхняя оценка для значений $\max_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq k \leq N} \|x^j[k]\|_\infty$ состояний системы (1), (2) без учета фазовых ограничений (3), (4).

На рисунке дан пример для случая $m=2$, $n_1=1$, $n_2=0$, показывающий, что может получиться в $\mathbb{R}^{m(n_1+n_2)}$ при пересечении параллелепипеда $\mathcal{Z}^{(0)} = \mathcal{P}_0$ с множествами $\check{\mathcal{Y}}$ и \mathcal{Y} . Здесь $\check{\mathcal{Y}}$ состоит из двух непересекающихся полупространств, ограниченных сплошными линиями, $\hat{\mathcal{Y}}$ — это гиперполоса между штрихпунктирными линиями, \mathcal{Y} состоит из двух непересекающихся параллельных гиперполос. Множество $\mathcal{P}_0 \cap \check{\mathcal{Y}}$ состоит из двух политопов, а $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{Y}$ тоже несвязно и состоит из двух выпуклых компонент — частей этих политопов.



В общем случае в силу взаимной дистрибутивности операций объединения и пересечения справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Множество $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^{(0)} \cap \mathcal{Y}$ представимо в виде объединения $(2n_1)^J$ компонент:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_J \leq n_1} \bigcup_{0 \leq \omega_1, \dots, \omega_J \leq 1} \left(\mathcal{Z}^{(0)} \cap (\mathcal{Y}_{(i_1, \omega_1)}^1 \cap \mathcal{Y}_{(i_2, \omega_2)}^2 \cap \dots \cap \mathcal{Y}_{(i_J, \omega_J)}^J) \right), \\ &= \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_J \leq n_1} \bigcup_{0 \leq \omega_1, \dots, \omega_J \leq 1} \left(\mathcal{Z}^{(0)} \cap \left(\bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(i_\gamma, \omega_\gamma)}^\gamma \right) \right), \end{aligned} \tag{10}$$

где объединения берутся по всевозможным индексам i_1, i_2, \dots, i_J , изменяющимся от 1 до n_1 , и всевозможным индексам $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J$, принимающим значения 0 и 1.

Заметим, что иногда может быть удобно записать это же объединение в следующем виде:

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{0 \leq \delta \leq (n_1)^J - 1} \bigcup_{0 \leq \beta \leq 2^J - 1} \left(\mathcal{Z}^{(0)} \cap \left(\bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(v_\gamma(\delta)+1, w_\gamma(\beta))}^\gamma \right) \right)$$

с использованием двух индексов $\delta \in \{0, 1, \dots, (n_1)^J - 1\}$ и $\beta \in \{0, 1, \dots, 2^J - 1\}$ и их n_1 -ичного и двоичного представлений $v(\delta) = (v_1(\delta), v_2(\delta), \dots, v_J(\delta))$ (где $v_\gamma(\delta) \in \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$) и $w(\beta) = (w_1(\beta), w_2(\beta), \dots, w_J(\beta))$ (где $w_\gamma(\beta) \in \{0, 1\}$) соответственно.

С учетом рекуррентных соотношений (7) и леммы 1 несложно видеть, что трубка достижимости $\mathcal{Z}[\cdot]$ может быть представлена (подобно [9, разд. 11.2]) в виде системы ветвящихся трубок с ветвями, которые обозначаем через $\mathcal{Z}[\cdot; H[\cdot]]$. Здесь матрица $H[k] = [h[0]; h[1]; \dots; h[k]] = \{h[\alpha]\}_{\alpha=0}^k \in \mathbb{R}^{J \times (k+1)}$ увеличивающейся от шага к шагу размерности определяет «историю» построения ветви до шага k . Примем, что каждый ее α -й столбец хранит информацию о значениях индексов i и ω из тех полос $\mathcal{Y}_{(i,\omega)}^\gamma$, которые определяют множество \mathcal{U} и фигурируют на шаге α под знаком объединения в (10), в следующем виде: $h[\alpha] = ((-1)^{\omega_1[\alpha]+1} i_1[\alpha], \dots, (-1)^{\omega_J[\alpha]+1} i_J[\alpha])^\top$, где $\omega_\gamma[\alpha] \in \{0, 1\}$, $i_\gamma[\alpha] \in \{1, \dots, n_1\}$, $\gamma = 1, \dots, J$.

Предложение 1. Трубка достижимости $\mathcal{Z}[\cdot]$ системы (1)–(4) (иными словами, (5)–(6)) может быть представлена в виде системы ветвящихся трубок с ветвями $\mathcal{Z}[\cdot; H[\cdot]]$, сечения которых $\mathcal{Z}[k; H[k]]$ в моменты k являются выпуклыми политопами. При этом МД $\mathcal{Z}[k]$ представимы в виде объединения вышеупомянутых сечений: $\mathcal{Z}[k] = \bigcup_{H[k]} \mathcal{Z}[k; H[k]]$ (назовем их компонентами множеств достижимости), верхняя оценка числа которых дается большим числом $(2n_1)^{J(k+1)}$, где $J = m(m-1)/2$, а ветви могут быть описаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[0; H[0]] &= \mathcal{P}_0 \cap \left(\bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(i_\gamma[0], \omega_\gamma[0])}^\gamma \right); & H[0] &= [h[0]]; \\ \mathcal{Z}^{(0)}[k; H[k-1]] &= A[k] \mathcal{Z}[k-1; H[k-1]] + B[k] \mathcal{R}[k], & k &= 1, 2, \dots, N; \\ H[k] &= [H[k-1]; h[k]] = [h[0]; h[1]; \dots; h[k]], & k &= 1, 2, \dots, N; \\ h[k] &= ((-1)^{\omega_1[k]+1} i_1[k], (-1)^{\omega_2[k]+1} i_2[k], \dots, (-1)^{\omega_J[k]+1} i_J[k])^\top, & k &= 0, 1, \dots, N; \\ \mathcal{Z}[k; H[k]] &= \mathcal{Z}^{(0)}[k; H[k-1]] \cap \left(\bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(i_\gamma[k], \omega_\gamma[k])}^\gamma \right), & k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, для каждой ветви $\mathcal{Z}[\cdot; H[\cdot]]$ на каждом k -м шаге сначала производятся операции линейного преобразования сечения и суммирования множеств, затем выбирается J штук n_3 -полос из тех, которые определяют \mathcal{U} , и производится операция пересечения с ними. Индексы, определяющие эти полосы, запоминаются в последнем столбце $H[k]$.

Верхняя оценка числа получающихся таким образом компонент МД дается очень большим числом $(2n_1)^{J(k+1)}$. При некоторых предположениях (типа приведенного ниже), которые, в частности, естественным образом выполняются для систем, полученных из дифференциальных систем с помощью аппроксимаций Эйлера при достаточно малом шаге дискретизации, эту оценку можно немного уменьшить.

Предположение 1. Все «движение» происходит в области $\|x^j[k]\|_\infty \leq C_x$, $j=1, \dots, m$, $k=0, 1, \dots, N$, и имеем $C_A \cdot C_x + C_u < \underline{\mu}$, где $C_A = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq k \leq N} \|A^j[k] - I\|$ (используется матричная норма, индуцированная нормой $\|x\|_\infty$), $C_u = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq k \leq N} \max_{w^j[k] \in \mathcal{R}^j[k]} \|B^j[k] w^j[k]\|_\infty$.

Элементарными оценками получается, что при указанных условиях траектория не может за один шаг перескочить с одной полосы на другую, парную ей, полосу, и имеет место

Следствие 1. При выполнении предположения 1 множество $\mathcal{Z}[k; H[k]]$ получается заведомо пустым для такой «истории» $H[k]$, у которой хотя бы для одного $\gamma \in \{1, 2, \dots, J\}$ выполняются условия: $i_\gamma[k] = i_\gamma[k-1]$, но $\omega_\gamma[k] \neq \omega_\gamma[k-1]$.

Следствие 2. При выполнении предположения 1 и $m = 2$ число непустых компонент МД на шаге k не превосходит $K[k] = 2n_1(2n_1-1)^k$ (вместо оценки $(2n_1)^{J(k+1)}$ для общего случая). В частности, при $m = 2$ и $n_1 = 1$ получается не более двух ветвей $\mathcal{Z}[\cdot; H[\cdot]]$.

3. Внешние полиэдральные оценки множеств достижимости

Называем параллелепипед $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$ *внешней оценкой* множества $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$, если $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$. Оценку называют *тугой* (в направлении l) [9], если $\rho(\pm l|\mathcal{P}) = \rho(\pm l|\mathcal{Q})$, где $\rho(l|\mathcal{Q}) = \sup\{l^\top x | x \in \mathcal{Q}\}$ — опорная функция множества \mathcal{Q} . Внешнюю параллелепипедозначную оценку называем *касающейся* для \mathcal{Q} , если она является тугой в направлении n следующих векторов: $l^i = P^{-1\top} e^i$, $i = 1, 2, \dots, n$, где e^i — i -й единичный орт в \mathbb{R}^n .

В силу (7) внешние оценки для МД $\mathcal{Z}[k]$ будут найдены, если построим элементарные полиэдральные оценки для результатов фигурирующих в (7) операций с множествами. В [2, 6] указаны способы построения ряда элементарных оценок. Кратко напомним их.

Внешняя касающаяся оценка $P_{P^+}^+(\mathcal{Q})$ для множества \mathcal{Q} с заданной матрицей ориентации P^+ строится на основе знания значений опорной функции множества \mathcal{Q} [6]. Матрицы P^+ можно рассматривать как параметр, определяющий целое семейство оценок.

По явным формулам легко найти касающиеся оценки $P_{P^+}^+(\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2)$ и $P_{P^+}^+(\mathcal{P}^1 \cup \mathcal{P}^2)$ для суммы параллелепипедов/параллелотопов [2, 6] и для их объединения.

Для множества $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma$, являющегося пересечением параллелепипеда и гиперполосы, по явным формулам можно найти $n+1$ «сжатых» гиперполос [2, 11], дающих в пересечении \mathcal{Q} , и, значит, касающиеся оценки $P_{P^+}^+(\mathcal{P} \cap \Sigma)$, соответствующие нескольким специально выбранным матрицам ориентации $P^+ \in \{P^0, P^1, \dots, P^n\}$, описанным в [2, 11] (а именно, оценки, получающиеся отбрасыванием одной из $n+1$ вышеупомянутых гиперполос).

Через $\tilde{P}_{P^+}^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{Y})$ обозначим внешнюю оценку с матрицей ориентации P^+ (не обязательно касающуюся) для пересечения параллелепипеда \mathcal{P} с множеством $\mathcal{Y} = \bigcap_{i=1}^d \Sigma^i$, являющимся пересечением нескольких гиперполос.

Для некоторых матриц ориентации P^+ такую оценку несложно найти по явным формулам, в частности, последовательно за d шагов с помощью вышеупомянутых касающихся оценок для пересечения параллелепипеда и гиперполосы (при этом можно использовать на каждом шаге соображения локальной оптимальности оценок в смысле объема [2, 11]):

$$\mathcal{P}^{+,0} = \mathcal{P}; \mathcal{P}^{+,i} = P_{P^{+,i}}^+(\mathcal{P}^{+,i-1} \cap \Sigma^i), i=1, 2, \dots, d; \mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^{+,d}, \tilde{P}_{P^+}^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{Y}) = \mathcal{P}^{+,d}. \quad (12)$$

Для пересечения двух параллелепипедов по явным формулам можно найти также оценки $\tilde{P}_{P^+}^+(\mathcal{P}^1 \cap \mathcal{P}^2)$, которые при любой неособой матрице ориентации P^+ определяются соотношениями другого типа [6], а именно: $\tilde{P}_{P^+}^+(\mathcal{P}^1 \cap \mathcal{P}^2) = P_{P^+}^+(\mathcal{P}^1) \cap P_{P^+}^+(\mathcal{P}^2)$.

Рассмотрим групповое движение двух объектов ($m = 2$). Покажем, как для $\mathcal{Z}[\cdot]$ можно построить внешние оценки в виде системы из не более, чем $2n_1$ полиэдральных трубок.

В рассматриваемом случае имеем $J = 1$ и формулы (11) упрощаются за счет отсутствия пересечений по γ (при сделанном предположении $\gamma = J = 1$). Для простоты записи далее

используем обозначение $\mathcal{Y}_{(i,\omega)} = \mathcal{Y}_{(i,\omega)}^1$ для множеств $\mathcal{Y}_{(i,\omega)}^1$ из (9). Из свойств вышеупомянутых элементарных оценок и рекуррентных формул (11) для МД $\mathcal{Z}[k]$ получаем, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — множества достижимости системы (5)–(6) при $m = 2$. Пусть трубки $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[\cdot]$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, $\omega = 0, 1$, определены следующими рекуррентными соотношениями²:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[0] &= \tilde{\mathbf{P}}_{P_{(i,\omega)}^+[0]}^+(\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{Y}_{(i,\omega)}), \quad i = 1, 2, \dots, n_1, \quad \omega = 0, 1; \\ \mathcal{P}_{(i,\omega)}^{(0)+}[k] &= \mathbf{P}_{P_{(i,\omega)}^{(0)+}[k]}^+(A[k] \mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[k-1] + B[k] \mathcal{R}[k]), \quad i = 1, 2, \dots, n_1, \quad \omega = 0, 1; \\ \mathcal{P}_{(i,\omega)(j,v)}^+[k] &= \tilde{\mathbf{P}}_{P_{(i,\omega)(j,v)}^+[k]}^+(\mathcal{P}_{(i,\omega)}^{(0)+}[k] \cap \mathcal{Y}_{(j,v)}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n_1, \quad \omega, v = 0, 1; \\ \mathcal{P}_{(j,v)}^+[k] &= \mathbf{P}_{P_{(j,v)}^+[k]}^+(\bigcup_{1 \leq i \leq n_1} \bigcup_{\omega \in \{0,1\}} \mathcal{P}_{(i,\omega)(j,v)}^+[k]), \quad j = 1, 2, \dots, n_1, \quad v = 0, 1; \end{aligned} \quad (13)$$

$$k = 1, 2, \dots, N,$$

при произвольных допустимых значениях параметров оценок (матриц ориентации $P_{(i,\omega)}^+[k]$, $P_{(i,\omega)}^{(0)+}[k]$, $P_{(i,\omega)(j,v)}^+[k]$) на всех подшагах процедуры. Тогда имеют место включения

$$\mathcal{Z}[k] \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n_1} \bigcup_{\omega \in \{0,1\}} \mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[k], \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

т.е. объединение параллелепипедозначных трубок $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[\cdot]$ дает внешние оценки для $\mathcal{Z}[\cdot]$.

Поясним формулы (13) подробнее. Построение трубок $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[\cdot]$ оказывается взаимосвязанным. Начальное сечение каждой из них строится в виде внешней оценки $\tilde{\mathbf{P}}_{P_{(i,\omega)}^+[0]}^+(\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{Y}_{(i,\omega)})$ для пересечения начального множества с одной из n_3 -полос из числа определяющих множество \mathcal{Y} . Такую оценку можно построить, в частности, за n_3 подшагов типа (12). Далее на каждом k -м шаге сначала находятся касающиеся оценки $\mathbf{P}_{P_{(i,\omega)}^{(0)+}[k]}^+(A[k] \mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[k-1] + B[k] \mathcal{R}[k])$ для соответствующих сечениям трубок сумм Минковского. Затем для каждого из построенных $2n_1$ параллелепипедов $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^{(0)+}[k]$ аналогично шагу $k = 0$ строятся внешние оценки для пересечения этого параллелепипеда с одной из n_3 -полос. В результате всего получается не более $(2n_1)^2$ параллелепипедов. Затем они группируются по $2n_1$ штук так, что для каждой пары индексов (j, v) перебираются всевозможные пары индексов (i, ω) и находятся внешние касающиеся оценки для объединения параллелепипедов каждой группы — всего $2n_1$ параллелепипедов, являющихся сечениями полиэдральных трубок $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[\cdot]$ на шаге k . Дальше происходит переход к следующему шагу $k + 1$.

Таким образом, сравнительно просто можно построить $2n_1$ полиэдральных трубок. Понятно, что полученные оценки могут оказаться довольно грубыми. Однако они могут быть в какой-то степени содержательными, а именно, справедливо

Замечание 2. Примем, что из условий группового движения (3)–(4) наиболее важными являются нижние ограничения (3) (условия нестолкновения), либо условия (4) вообще отсутствуют ($\bar{\mu} = \infty$). За счет подходящего выбора матриц ориентации промежуточных оценок эти трубки $\mathcal{P}_{(j,v)}^+[\cdot]$, $j = 1, 2, \dots, n_1$, $v = 0, 1$, можно построить так³, чтобы для каждой из них ее сечения $\mathcal{P}_{(j,v)}^+[k]$ лежали в фиксированном полупространстве — одном из

²Здесь не исключается случай, что какие-то из множеств $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[k]$ могут быть пустыми.

³ Этого можно добиться, в частности, если при построении оценок $\mathcal{P}_{(i,\omega)(j,v)}^+[k]$, $i = 1, 2, \dots, n_1$, $\omega = 0, 1$, при фиксированных индексах (j, v) за $n_3 \geq 1$ подшагов типа (12) в последнюю очередь обрабатывать

тех, которые задают нижние групповые ограничения, т.е. чтобы точки из множеств $\mathcal{P}_{(j,v)}^+[k]$ удовлетворяли (3).

Формально рассуждая, аналогично (13) можно построить внешние оценки для $\mathcal{Z}[\cdot]$ в случае $m > 2$ с использованием $(2n_1)^J$ полиэдральных трубок (соответствующих объединениям из (10)). Обозначим через \mathcal{W}_h множества $\mathcal{W}_h = \bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(i_\gamma, \omega_\gamma)}^\gamma$, которые мы «занумеровали» с помощью векторов $h = ((-1)^{\omega_1+1}i_1, (-1)^{\omega_2+1}i_2, \dots, (-1)^{\omega_J+1}i_J)^\top \in \mathbb{R}^J$, где $i_\gamma \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, $\omega_\gamma \in \{0, 1\}$, $\gamma = 1, 2, \dots, J$.

Предложение 3. Пусть $\mathcal{Z}[k]$ — множества достижимости системы (5)–(6) и $m \geq 2$. Пусть параллелепипедозначные трубки $\mathcal{P}_h^+[\cdot]$ определены следующими рекуррентными соотношениями⁴:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_h^+[0] &= \tilde{\mathcal{P}}_{P_h^+[0]}^+(\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{W}_h); \\ \mathcal{P}_h^{(0)+}[k] &= \mathbf{P}_{P_h^{(0)+}[k]}^+(A[k] \mathcal{P}_h^+[k-1] + B[k] \mathcal{R}[k]), \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ \mathcal{P}_{h, \tilde{h}}^+[k] &= \tilde{\mathcal{P}}_{P_{h, \tilde{h}}^+[k]}^+(\mathcal{P}_h^{(0)+}[k] \cap \mathcal{W}_{\tilde{h}}), \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ \mathcal{P}_{\tilde{h}}^+[k] &= \mathbf{P}_{P_{\tilde{h}}^+[k]}^+(\bigcup_h \mathcal{P}_{h, \tilde{h}}^+[k]), \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \tag{14}$$

при произвольных допустимых значениях параметров оценок (матриц ориентации) $P_h^+[k], P_h^{(0)+}[k], P_{h, \tilde{h}}^+[k]$ на всех подшагах процедуры (14), где «векторные индексы» $h = ((-1)^{\omega_1+1}i_1, (-1)^{\omega_2+1}i_2, \dots, (-1)^{\omega_J+1}i_J)^\top$ и $\tilde{h} = ((-1)^{\tilde{\omega}_1+1}\tilde{i}_1, (-1)^{\tilde{\omega}_2+1}\tilde{i}_2, \dots, (-1)^{\tilde{\omega}_J+1}\tilde{i}_J)^\top$ пробегают (подобно (13)) всевозможные значения, получающиеся при $i_\gamma \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, $\omega_\gamma \in \{0, 1\}$, $\gamma = 1, 2, \dots, J$, и при $\tilde{i}_\gamma \in \{1, 2, \dots, n_1\}$, $\tilde{\omega}_\gamma \in \{0, 1\}$, $\gamma = 1, 2, \dots, J$ соответственно, а символом $\tilde{\mathcal{P}}_{P^+}^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{W})$ обозначена какая-либо внешняя оценка с матрицей ориентации P^+ для пересечения параллелепипеда \mathcal{P} с множеством \mathcal{W} , являющимся пересечением нескольких гиперполос. Тогда $\mathcal{Z}[k] \subseteq \bigcup_h \mathcal{P}_h^+[k]$, $k=0, 1, \dots, N$, т.е. объединение $(2n_1)^J$ трубок $\mathcal{P}_h^+[\cdot]$ дает внешние оценки для $\mathcal{Z}[\cdot]$.

Замечание 3. Множества \mathcal{W}_h образованы пересечением гиперполос, число которых равно $m_{\mathcal{W}} = J \cdot n_3 = n_3 \cdot m(m-1)/2$. Поэтому при увеличении числа подсистем m возникает сложность при вычислении оценок типа $\tilde{\mathcal{P}}_{P^+}^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{W}_h)$. Если находить их последовательно за $m_{\mathcal{W}}$ подшагов типа 12, то оценки, описанные в предложении 3, получатся грубее, чем в случае $m = 2$, за счет накопления закруглений при построении большего числа $m_{\mathcal{W}}$ оценок типа 12. Кроме того, вообще говоря, не удастся (подобно замечанию 2) обеспечить принадлежность каждого из сечений полиэдральных трубок одному из множеств $\bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(i_\gamma, \omega_\gamma)}^\gamma$, задающих нижние ограничения 3.

Заключение

Показано, что МД системы, состоящей из m линейных многошаговых управляемых объектов, при наличии условий группового движения могут быть невыпуклыми и несвязными, и дано представление трубки достижимости в виде системы ветвящихся трубок, где сечения ветвей являются выпуклыми политопами. Предложены алгоритмы построения некоторых

пересечение с гиперполосой, нормаль которой определяется индексом j , и матрицу ориентации $P_{(i,\omega)(j,v)}^+[k]$ выбирать так, чтобы одна из граней оценки была ортогональна этой нормали, и матрицы ориентации $P_{(j,v)}^+[k]$ тоже выбирать так, чтобы одна из граней оценки была ортогональна этой нормали.

⁴Здесь опять не исключается случай, что какие-то из множеств $\mathcal{P}_{h^+}[k]$ могут быть пустыми.

внешних оценок МД на основе «элементарных» полиэдральных (параллелепипедозначных) оценок для результатов операций с параллелепипедами. Основное внимание уделено случаю $m = 2$. Результаты численного моделирования будут даны в другой публикации.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-02368а).

Литература

1. Гусев М.И. Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
2. Костоусова Е.К. Параллельные вычисления при оценивании областей достижимости и информационных множеств линейных систем // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. Вып. 3. С. 107–126.
3. Куржанский А.Б. Задача управления групповым движением. Общие соотношения // Докл. РАН. 2009. Т. 426, № 1. С. 20–25.
4. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
5. Filippova T.F. Approximation techniques in impulsive control problems for the tubes of solutions of uncertain differential systems // Springer Proc. Mathematics and Statistics. 2013. Vol. 41. P. 385–396. DOI: 10.1007/978-1-4614-6393-1.
6. Kostousova E.K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 1998. Vol. 9, № 14. P. 269–306. DOI:10.1080/10556789808805696.
7. Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
8. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On synthesizing team target controls under obstacles and collision avoidance // J. Franklin Inst. 2010. Vol. 347, № 1. P. 130–145. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2009.11.002.
9. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. (Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85). Birkhäuser Basel, 2014. 445 p. DOI: 10.1007/978-3-319-10277-1.
10. Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory // IEEE Trans. on Automatic Control. 2006. Vol. 51, No. 3. P. 401–420. DOI: 10.1109/TAC.2005.864190.
11. Vicino A., Zappa G. Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. Vol. 41, № 6. P. 774–785. DOI: 10.1109/9.506230.

Костюсова Елена Кирилловна, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник отдела оптимального управления, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Российская Федерация), kek@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 17 сентября 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Computational Mathematics and Software Engineering"
2016, vol. 5, no. 1, pp. 13–23

DOI: 10.14529/cmse160102

ON STATE ESTIMATION FOR MULTI-AGENT MOTION: DISCRETE-TIME SYSTEMS

E.K. Kostousova, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian
Federation

The reachability problem for linear discrete-time control systems which describe multi-agent motion is considered. Namely, we consider a finite set of subsystems with controls to be chosen under the condition that the trajectories of the subsystems are pairwise not very close to and not very far away from each other. Properties of reachable sets of such systems are described. Some algorithms for constructing external polyhedral (parallelepiped-valued) estimates for reachable sets are proposed.

Keywords: reachable sets, discrete-time systems, multi-agent motion, polyhedral estimates.

FOR CITATION

Kostousova E.K. On State Estimation for Multi-agent Motion: Discrete-Time Systems. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 1. pp. 13–23. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160102.

References

1. Gusev M.I. External estimates of the reachability sets of nonlinear controlled systems. Autom. Remote Control. 2012. vol. 73, no. 3. pp. 450–461. DOI: 10.1134/S0005117912030046.
2. Kostousova E.K. Parallelnye vychisleniya pri otsenivanii oblastey dostizhimosti i informatsionnykh mnozhestv lineinykh sistem [Parallel computations for estimating attainability domains and informational sets of linear systems]. *Algoritmy i programnye sredstva parallelnykh vychisleniy* [Algorithms and Software for Parallel Computations]. Ekaterinburg: UrO RAN. 1999. issue 3. pp. 107–126 (in Russian).
3. Kurzhanski A.B. The problem of control for multi-agent motion. Doklady Mathematics. 2009. vol. 79, no. 3. pp. 314–318. DOI: 10.1134/S1064562409030041.
4. Chernousko F.L. Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton: CRC Press, 1994. 304 p.
5. Filippova T.F. Approximation techniques in impulsive control problems for the tubes of solutions of uncertain differential systems. Springer Proc. Mathematics and Statistics. 2013. vol. 41. pp. 385–396. DOI: 10.1007/978-1-4614-6393-1.

6. Kostousova E.K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations. *Optimiz. Methods & Software*. 1998. vol. 9, no. 14. pp. 269–306. DOI:10.1080/10556789808805696.
7. Kurzhanski A.B., Vályi I. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
8. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On synthesizing team target controls under obstacles and collision avoidance. *J. Franklin Inst.* 2010. vol. 347, no. 1. pp. 130–145. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2009.11.002.
9. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation*. (Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85). Birkhäuser Basel, 2014. 445 p. DOI: 10.1007/978-3-319-10277-1.
10. Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2006. vol. 51, no. 3. pp. 401–420. DOI: 10.1109/TAC.2005.864190.
11. Vicino A., Zappa G. Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1996. vol. 41, no. 6. pp. 774–785. DOI: 10.1109/9.506230.

Received September 17, 2015.