

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н.М. Япарова

В статье рассмотрена обратная задача для нелинейного параболического уравнения с неизвестными начальными условиями. Для решения обратной задачи предложен метод дискретной регуляризации, основанный на использовании конечно-разностных уравнений и применении регуляризирующих функционалов. Построенная вычислительная схема позволяет одновременно найти численное решение внутри рассматриваемой области и неизвестную граничную функцию. В статье проведено исследование устойчивости вычислительной схемы. Выявлено влияние величин шагов дискретизации и погрешности исходных данных на устойчивость численных решений. Предложенная схема послужила основой для разработки численного метода и проведения вычислительного эксперимента. Результаты эксперимента для серии тестовых функций также представлены в данной работе и свидетельствуют о достаточной эффективности предложенного метода дискретной регуляризации.

Ключевые слова: обратные задачи, численный метод, метод регуляризации, оценка погрешности, вычислительная схема

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Япарова Н.М. Численный метод решения обратной задачи с неизвестными начальными условиями для нелинейного параболического уравнения // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 2. С. 43–58. DOI: 10.14529/cmse160204.

Введение

Исследования многих процессов тепло- и массопереноса приводят к формированию математических моделей, представленных нелинейными параболическими уравнениями с граничными условиями, известными на части границы. В этих задачах требуется найти неизвестную функцию, удовлетворяющую имеющимся уравнениям внутри рассматриваемой области, а также граничным условиям. Примеры подобного рода задач можно найти в работах [1–6]. Один из подходов, позволяющий найти требуемые функции, заключается в решении обратных граничных задач. При этом сначала на оставшейся части границы восстанавливают граничную функцию, а уже затем, используя полученные результаты, находят решение поставленной задачи во внутренних точках. Исследованиям в этой области посвящены, например, работы [7–13]. Другое динамично развивающееся направление решения задач тепло- и массопереноса связано с разработкой и исследованием численных методов, основанных на использовании конечно-разностных и дифференциально-разностных схем. Различные методы, относящиеся к этому направлению, представлены, например, в работах [15–19]. Общей чертой существующих подходов является то, все эти методы разрабатываются с учетом известных начальных условий. С другой стороны, протекание многих процессов тепло- и массообмена связано с ситуацией, когда осуществить измерение во всем теле требуемой температурной или концентрационной функции не представляется возможным. Это приводит

к возникновению математических моделей с неизвестными начальными условиями. Один из путей решения данной проблемы заключается, например, во введении фиктивных начальных условий [1–2, 14], что неизбежно отражается на точности получаемых решений.

В данном исследовании полагают, что начальные условия неизвестны исследователям и для построения численного решения обратной граничной задачи с неизвестными начальными условиями предлагают метод дискретной регуляризации, основанный на использовании конечно-разностных схем. Основная идея метода заключается в том, что, в отличие от существующих подходов, где вычисление требуемой функции во внутренних точках рассматриваемой области осуществляется по переменной, характеризующей время, мы находим неизвестную функцию относительно пространственной переменной. Такой подход позволяет значительно уменьшить влияние неизвестных начальных условий на результаты численного решения задач с неизвестными начальными условиями. Подобный подход был рассмотрен в работах [20–21] для линейных параболических уравнений.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе приведена постановка задачи, а также дополнительные свойства и ограничения на рассматриваемый класс функций. Во втором разделе предложена вычислительная схема метода дискретной регуляризации. Третий и четвертый разделы посвящены исследованию устойчивости основной вычислительной схемы метода. В третьем разделе установлена зависимость погрешности общей вычислительной схемы от величин шагов дискретизации. В четвертом разделе исследована локальная устойчивость метода при соответствующем выборе соотношения шагов дискретизации и параметра регуляризации, и получены некоторые оценки погрешности численного решения рассматриваемой задачи. В пятой части статьи приведены результаты вычислительного эксперимента, основными целями которого являлись проверка принципиальной возможности построения численного решения задачи, устойчивого в некоторой подобласти и получение экспериментальных оценок погрешности метода. В заключении сформулированы итоговые выводы, полученные в результате проведенных исследований, а также указаны основные направления дальнейших исследований.

1. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндрическую область $\Omega \subset R^3$ и $\Omega = S_\ell \times R$, где S_ℓ — кольцо, ограниченное окружностями $\partial_1 S_\ell$ и $\partial_2 S_\ell$ с радиусами ℓ_0 и ℓ соответственно. Множество Ω ограничено поверхностями $\partial_1 \Omega = \partial_1 S_\ell \times R$ и $\partial_2 \Omega = \partial_2 S_\ell \times R$, а $Q = S_\ell \times (0, T)$. Рассмотрим уравнение

$$c(u)\rho(u)u_t = \operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u), \quad (x, y, z, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

где $t \in (0, T)$, $z \in R$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, а функция $u(x, y, z, t)$ — осесимметрична и принимает постоянные значения вдоль любой прямой, параллельной оси Oz . Дополнительно известны граничные условия:

$$u|_{\partial_1 \Omega \times [0, T]} = p(t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial_1 \Omega \times [0, T]} = q(t), \quad (2)$$

где вектор n является внешней нормалью к $\partial_1 \Omega$, при $\ell_0 \rightarrow 0$. Коэффициентные функции $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ в (1) положительны, дважды непрерывно дифференцируемы в со-

ответствующей области. Известно, что при некоторых $p(t) = p_0(t)$ и $g(t) = g_0(t)$ существует функция u_0 , удовлетворяющая (1), (2) но вместо точных значений $p_0(t)$ и $q_0(t)$ известны некоторые приближения p_δ , q_δ и некоторый уровень погрешности δ такие, что $\|p_0(t) - p_\delta\|_{C([0,T])} \leq \delta$ и $\|q_0(t) - q_\delta\|_{C([0,T])} \leq \delta$. В данной задаче необходимо найти $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющую (1), (2) и граничное значение функции

$$u|_{\partial_2 \Omega \times (0,T)} = \phi(t) \quad (3)$$

Из результатов, представленных в работе [16, 23] следует существование функции $u_\delta^\alpha \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\overline{D_T})$, удовлетворяющей в некоторой области $D_T \subset \Omega_T$ соотношениям (1), (2), а также $\phi_\delta^\alpha \in H^{2,1+\beta}(0,T)$, где $\beta \in (0,1)$, удовлетворяющей (3).

Из результатов измерений величин $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ в используемом материале известно, что зависимость этих коэффициентов от значений функции $u(x, y, z, t)$ допускает представление в виде полиномов. На практике наиболее часто используют линейную зависимость. При этом точность такого представления такова, что погрешность полиномиальных аппроксимаций не оказывает значительного влияния на величину погрешности определения требуемой функции $u(x, y, z, t)$ в исследуемом теле. Учитывая свойства $c(u), \rho(u), \lambda(u)$, для вычисления этих величин используем разложение по формуле Тейлора в окрестности точки $u^* = u(0,0,0,0)$:

$$\begin{aligned} c(u) &= c(u^*) + c'(u^*)(u(x, y, z, t) - u^*), & \rho(u) &= \rho(u^*) + \rho'(u^*)(u(x, y, z, t) - u^*), \\ \lambda(u) &= \lambda(u^*) + \lambda'(u^*)(u(x, y, z, t) - u^*), \end{aligned}$$

где $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \ell_0$, а значения $c(u^*), \rho(u^*), \lambda(u^*), c'(u^*), \rho'(u^*), \lambda'(u^*)$ получены из результатов измерений соответствующих величин в материале, используемом в исследуемом теле. Тогда полагаем

$$\begin{aligned} k_c &= c'(u^*), \quad k_\rho = \rho'(u^*), \quad k_\lambda = \lambda'(u^*), \\ c_0 &= c(u^*) - k_c u^*, \quad \rho_0 = \rho(u^*) - k_\rho u^*, \quad \lambda_0 = \lambda(u^*) - k_\lambda u^*. \end{aligned}$$

Получаем, что $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ определяются формулами

$$c(u) = c_0 + k_c u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda u.$$

Перейдем к цилиндрической системе координат, выполняя сдвиг по радиусу. Тогда область Q преобразуется в $Q_\ell = \{(r, t) : 0 < r < R, 0 < t < T\}$, где $R = \ell - \ell_0$, а уравнение (1) примет вид:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(u)r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad (r, t) \in Q_\ell.$$

Раскрывая оператор $\frac{\partial}{\partial r}$, получаем следующее представление задачи (1), (2):

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in Q_\ell. \quad (4)$$

$$u(0, t) = p(t), \quad u_r(0, t) = q(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где коэффициенты $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ определим формулами

$$c(u) = c_0 + k_c u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda u. \quad (6)$$

Требуется по p_δ , q_δ и δ данным найти функцию $u_\delta^\alpha(r, t)$, являющуюся решением задачи (4)–(6) и определить граничную функцию $\phi_\delta^\alpha(t)$. Если из теплофизических характеристик процесса известно, что функция $u(r, t)$ достаточно гладкая, и мы можем полагать, что существуют константы Φ, β, R, C такие, что $\max |u(r, t)| \leq \Phi e^{\beta(r+t)}$ в каждой точке $(r, t) \in \overline{Q}_\ell$, а

$$\max \left\{ \max_{(r,t) \in \overline{Q}_\ell} |u_{tt}|, \max_{(r,t) \in \overline{Q}_\ell} |u_{rr}|, \max_{(r,t) \in \overline{Q}_\ell} |u_{rrrr}| \right\} \leq C, \quad (7)$$

то для решения задачи (4)–(6) используем метод дискретной регуляризации. Вычислительная схема метода представлена в следующем разделе.

2. Метод дискретной регуляризации

Рассмотрим конечно-разностную сетку G в области Q_ℓ ,

$$G = \left\{ \begin{array}{l} (r_i, t_j): r_i = (i-1)h, t_j = (j-1)\tau, \\ h = R/N; \tau = T/M; i = \overline{1, N+1}; j = \overline{1, M+1} \end{array} \right\},$$

где значение M не превосходит количества измерений, выполненных для $p(t)$ и $q(t)$.

Обозначим $u_{i,j} = u(r_i, t_j)$. Составим конечно-разностный аналог задачи (4)–(6). С этой целью используем конечно-разностное представление частных производных по r и по t в каждой точке G , предложенное в [22] и рассмотрим множество дискретных функций $V_h = \{v(r_i, t_j) = v_{i,j}\}$, заданных на G . Конечно-разностный аналог уравнения (4) имеет вид:

$$c_{i,j} \rho_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} = \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{v_{i+1,j} - v_{i,j}} \frac{(v_{i+1,j} - v_{i,j})^2}{h^2} + \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)h} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h} + \lambda_{i,j} \frac{(v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j})}{h^2}$$

В отличие от существующих методов, использующих данный шаблон, мы выразим из этого уравнения $v_{i+1,j}$, что позволит значительно уменьшить влияние неизвестных начальных условий на результаты численного решения. Получаем при $i = \overline{2, N}$ и $j = \overline{1, M}$

$$v_{i+1,j} = v_{i,j} + \frac{c_{i,j} \rho_{i,j} (i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} + \frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} (v_{i,j} - v_{i-1,j}) \quad (8)$$

Граничные условия в конечно-разностной форме представлены следующим образом:

$$v_{1,j} = u_{1,j} = p_j \quad v_{2,j} = u_{1,j} + hq_j = p_j + hq_j \quad (9)$$

Непосредственное использование уравнения (8) не позволяет получать устойчивые решения задачи (4)–(6), более того, использование уравнения (8) невозможно при $j = M+1$. Поэтому для построения численного решения рассматриваемой задачи используем метод дискретной регуляризации. Суть метода заключается в том, что коэффициенты в уравнении (8) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= c_0 + k_c v_{i,j}, \quad \rho_{i,j} = \rho_0 + k_\rho v_{i,j}, \quad \lambda_{i,j} = \lambda_0 + k_\lambda v_{i,j}, \\ \lambda_{i+1,j} &= \lambda_0 + (k_\lambda - \alpha) v_{i,j} = \lambda_{i,j} - \alpha v_{i,j}, \end{aligned} \quad (10)$$

где α — некоторый параметр регуляризации и шаги дискретизации выбираются согласовано с уровнем погрешности, а для вычисления значений $v_{i,M+1}$ используется следующая схема:

$$v_{i+1,M+1} = v_{i,M+1} + \frac{(i-1)}{\lambda_{i+1,M+1}(i-1) + \lambda_{i,M+1}} \left(\frac{c_{i,M+1} \rho_{i,M+1} h^2}{\tau(1-\sigma)} (v_{i,M+1} - v_{i,M}) + \lambda_{i,M+1} (v_{i,M+1} - v_{i-1,M+1}) \right) + \frac{\sigma}{(1-\sigma)} \frac{1}{(i-1)h^2} \times \frac{(\lambda_{i+1,M}(i-1) + \lambda_{i,M})(v_{i+1,M} - v_{i,M}) - \lambda_{i,M}(i-1)(v_{i,M} - v_{i-1,M})}{\lambda_{i+1,M+1}(i-1) + \lambda_{i,M+1}}, \quad (11)$$

где $\sigma \in (0,1)$, а коэффициенты в уравнении (11) также вычисляются согласно формулам (10) и шаги дискретизации также согласуются.

3. Алгоритмические особенности метода дискретной регуляризации

Исследуем устойчивость вычислительной схемы (8)–(10). С этой целью, мы используем подход, принятый в теории регуляризации, см., например, [24]. Введем в рассмотрение функции w_i при всех $i = \overline{1, N}$, определяемые формулой:

$$w_{i+1} = \max_{j=1, M+1} |v_{i+1,j} - v_{i,j}|,$$

где $v_{i,j}$ удовлетворяет (8)–(10) и определим условия, при соблюдении которых будет иметь место неравенство $w_{N+1} \leq K\delta$, где K — некоторая константа.

Так как значение M не превосходит количества измерений, выполненных исследователями для функций $p(t)$ и $q(t)$, то мы полагаем, что M и, следовательно, величина шага дискретизации τ по переменной, характеризующей время, нам известна. Выберем значения N , характеризующей шаг дискретизации по пространственной переменной и параметр регуляризации α так, чтобы при известном значении M имело место требуемое неравенство.

Сначала оценим α и коэффициенты в (8). Обозначим $\mu = \max_{i,j} \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i,j}i - \alpha(i-1)|v_{i,j}|}$, и $\eta = \max_{i,j} \frac{c_{i,j} \rho_{i,j} (i-1) h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}) \tau}$. Полагаем α таким, что при всех $i = \overline{1, N+1}$ и $j = \overline{1, M+1}$ выполнено

$$\alpha < \min_{i,j} \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)|v_{i,j}|}. \quad (12)$$

Имеем:

$$1 - \frac{1}{N+1} < \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i,j}i - \alpha(i-1)|v_{i,j}|} < 1, \quad (13)$$

тогда $\mu < 1$. С учетом (10) получаем следующую оценку:

$$w_{i+1} \leq \eta \max_{j=1, M} |v_{i,j+1} - v_{i,j}| + \mu w_i.$$

Так как нам не известны начальные условия, то мы можем учитывать только ограниченность функции $u(r, t)$. Имеем:

$$\max_{j=1, M} |v_{i, j+1} - v_{i, j}| \leq 2\Phi e^{R+T}.$$

Полагая $S = \max_{j=1, M+1} |q_j|$, учитывая (9) и выбирая $N > R + 1$, получаем

$$w_2 = \max_{j=1, M+1} |v_{2, j} - v_{1, j}| \leq \max_{j=1, M+1} |q_j h| \leq h(S + \delta) \leq S + \delta,$$

$$w_{i+1} \leq 2\Phi e^{R+T} (\eta + \mu\eta + \mu^2\eta + \dots + \eta\mu^{i-2}) + (S + \delta)\mu^{i-1} < 2\Phi e^{R+T} \eta \frac{1}{1-\mu} + (S + \delta)\mu^{i-1},$$

при $i = \overline{3, N+1}$. Тогда

$$w_{N+1} \leq \eta 2\Phi e^{R+T} \frac{1}{1-\mu} + (S + \delta)\mu^{N-2}. \quad (14)$$

Из (10) следует, что имеет место оценка $\eta \leq \frac{h^2}{\tau} \max_{i=2, N+1, j=1, M} \frac{c_{i, j} \rho_{i, j}}{\alpha v_{i, j} (i-1)}$. Отсюда и того,

что $\alpha(i-1)v_{i, j} \leq \alpha(i-1)|v_{i, j}| < \lambda_{i, j}$ следует, что для получения устойчивого решения необходимо выполнение условия $\frac{h^2}{\tau} < \max_{i=2, N+1, j=1, M} \frac{\alpha(i-1)v_{i, j}}{c_{i, j} \rho_{i, j}} < \min_{i=2, N+1, j=1, M} \frac{\lambda_{i, j}}{c_{i, j} \rho_{i, j}}$. Учитывая

эти особенности, получаем, что шаги дискретизации должны удовлетворять соотношению

$$\frac{h^2}{\tau} \leq \frac{1}{2} \Phi e^{-(R+T)} \delta \min_{i=2, N+1, j=1, M+1} \frac{\lambda_{i, j}}{c_{i, j} \rho_{i, j}}. \quad (15)$$

Тогда

$$w_{N+1} \leq \frac{\delta}{1-\mu} + (S + \delta)\mu^{N-2} \leq K\delta.$$

Принимая во внимание, что при предложенном подходе $\mu < 1$, получаем, что для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы величина N , характеризующая количество частей разбиения отрезка $[0, R]$, удовлетворяла соотношению:

$$N > 2 + \log_{\mu} \left(\left(K - \frac{1}{1-\mu} \right) \frac{\delta}{S + \delta} \right), \quad (16)$$

где $\left(K - \frac{1}{1-\mu} \right) \frac{\delta}{S + \delta} < 1$. Последнее достигается, если положить $K = 1 + \frac{1}{1-\mu}$.

Таким образом, соотношение $w_{N+1} \leq K\delta$ имеет место при известном значении M , если выполнено условие (12), (15) и (16).

4. Локальная устойчивость метода дискретной регуляризации

Выполним оценку погрешностей конечномерных аппроксимаций при известном M , выбранном из условия (16) значения N и α , удовлетворяющем полагая, что коэффициентные погрешности не оказывают существенного влияния на суммарную погрешность метода.

Используя конечномерные аппроксимации частных производных, получаем, что при $i = \overline{2, N+1}$ и $j = \overline{1, M}$ имеет место следующее представление:

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} = & u_{i,j} + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) + \\ & + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(\tau) + 2 \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \\ & + \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h^2}{(u_{i+1,j} - u_{i,j})(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})} (\underline{Q}(h))^2 + \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h^2) \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функции s_i , определяемые формулой:

$$s_i = \max_{j=\overline{1, M+1}} |v_{i,j} - u_{i,j}|, \quad i = \overline{1, N+1}.$$

где $v_{i,j}$ удовлетворяет (8)–(10), а $u_{i,j}$ является решением задачи (4)–(6). Для исследования устойчивости необходимо оценить величину s_{N+1} при выбранных значениях M , N и α . Имеем:

$$\begin{aligned} s_{i+1} \leq & s_i + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})\tau} 2\Phi e^{(R+T)} + 2 \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} s_{i,j} + \\ & + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(\tau) + 2 \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h^2}{(u_{i+1,j} - u_{i,j})(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})} (\underline{Q}(h))^2 + \\ & + \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h^2) \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим слагаемые в (17). С учетом (14) и (15) имеем:

$$\frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}\tau} 2\Phi e^{(R+T)} \leq \delta \quad (18)$$

Из соотношения (11), определения μ и того, что $\alpha |v_{i,j}|(i-1) < \lambda_{i,j}$, следует

$$\frac{|\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}|(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{\alpha |v_{i,j}|(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} < \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} < \mu h \quad (19)$$

Из (6) следует, что $\frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} = k_\lambda$. С другой стороны, из (10) следует, что

$\lambda_{i+1,j} = \lambda_{i,j} - \alpha v_{i,j}$, тогда, полагая $\lambda^* = \min_{i=\overline{1, N+1}, j=\overline{1, M+1}} \lambda_{i,j}$ и учитывая (12) и (19), имеем:

$$\left| \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \right| \frac{(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq k_\lambda \frac{h^2}{\lambda_{i,j}} \leq \frac{k_\lambda h^2}{\lambda^*}, \quad (20)$$

$$\frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \mu \leq 1, \quad \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{\mu}{i-1} \leq \mu \leq 1. \quad (21)$$

Из соотношений (7), (17)–(21) следует, что

$$s_{i+1} \leq (1 + 2\mu)s_i + \delta + \left(\eta C \tau^2 + 3\mu C h^2 + \left(\frac{k_\lambda}{\lambda^*} C^2 + \mu C \right) h^4 \right), \quad i = \overline{2, N}. \quad (22)$$

Полагаем $\Psi = \eta C \tau^2 + 3\mu Ch^2 + \left(\frac{k_\lambda}{\lambda^*} C^2 + \mu C\right) h^4$. Из того, что $s_2 = \max_{j=1, M+1} |v_{2,j} - u_{2,j}| \leq \max_{j=1, M+1} |u_{1,j} + hq_j - (u_{1,j}^0 + hq_j^0)| + Ch \leq \delta + h\delta + Ch$, где $u_{1,j}^0, q_j^0$ — точные значения соответствующих функций, а $u_{1,j}, q_j$ — приближенные значения, следует, что соотношение (22) имеет вид

$$s_{i+1} \leq (1 + 2\mu)s_i + \delta + \Psi \leq (1 + 2\mu)^{i-1} s_2 + \left(\sum_{k=0}^{i-2} (1 + 2\mu)^k\right) (\delta + \Psi).$$

Тогда при $i = \overline{2, N}$ выполнено

$$s_{N+1} \leq (1 + 2\mu)^{N-1} \left(\delta + h\delta + Ch + \frac{1}{4\mu^2} (\delta + \Psi) \right). \quad (23)$$

Из соотношений (15), (16), (23) следует, что устойчивость метода зависит от величины шагов дискретизации и для получения приближенного решения необходимо выбирать достаточно небольшие значения N .

5. Вычислительный эксперимент

Основная цель вычислительного эксперимента заключалась в проверке принципиальной возможности построения численного решения во всей области рассматриваемой обратной нелинейной задачи методом дискретной регуляризации и получение соответствующей граничной функции (4). Кроме того, для получения экспериментальных оценок погрешностей были вычислены величины отклонения найденных граничных функций от тестовых значений. Основные этапы эксперимента заключаются в следующем.

На начальном этапе эксперимента находим решение прямой задачи:

$$c(u)\rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in Q_t. \quad (24)$$

$$u(0, t) = p(t), \quad u(R, t) = \phi(t), \quad t \in [0, T], \quad (25)$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad r \in [0, R] \quad (26)$$

где коэффициенты определены формулами:

$$c(u) = c_0 + k_c u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda u, \quad (27)$$

Далее, определяем функцию $q(t)$ по формуле $q(t_j) = \frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{h}$, а затем находим $p_\delta(t_j), q_\delta(t_j)$ как значения случайных величин, равномерно распределенных на соответствующих интервалах $[p(t_j) - \delta, p(t_j) + \delta]$ и $[q(t_j) - \delta, q(t_j) + \delta]$.

На следующем этапе с помощью предложенной вычислительной схемы получаем численное решение задачи (4)–(6) для p_δ, q_δ , как внутри области, так и на границе.

Результаты численного решения задачи (4)–(6) для некоторых тестовых функций представлены на нижеприведенных рисунках и табл.1. Так как исходное уравнение (1) не содержит дополнительной функции источника, то в качестве тестовых функций использовались функции, представимые в экспоненциальном виде. Все рисунки имеют одинаковую структуру и используют одинаковые обозначения. На левых рисунках изображены графики граничной функции. Обозначение u_0 соответствует графику тестовой

функции, а u_δ^α — численному решению задачи идентификации граничной функции. Многомерные поверхности, представленные на правых рисунках, иллюстрируют решения прямой задачи (24)–(27) и обратной задачи (4)–(6), полученные во всей области Q_t . Поверхности, имеющие название “Exact solution” соответствуют численному решению прямой задачи (24)–(27), а поверхности “Regularized solution” — численному решению задачи (4)–(6).

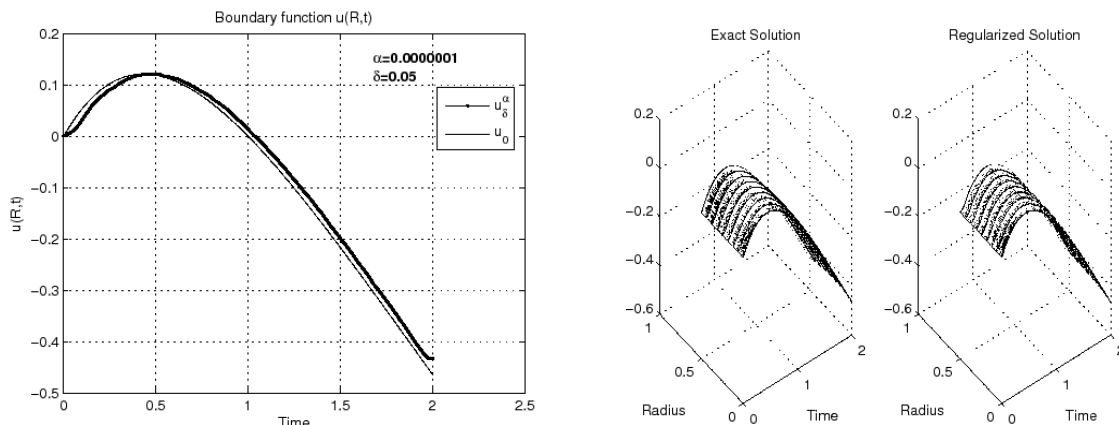


Рис. 1. Результаты численного решения нелинейной обратной граничной задачи для тестовых функций $u(0,t) = u(R,t) = te^{-t}$

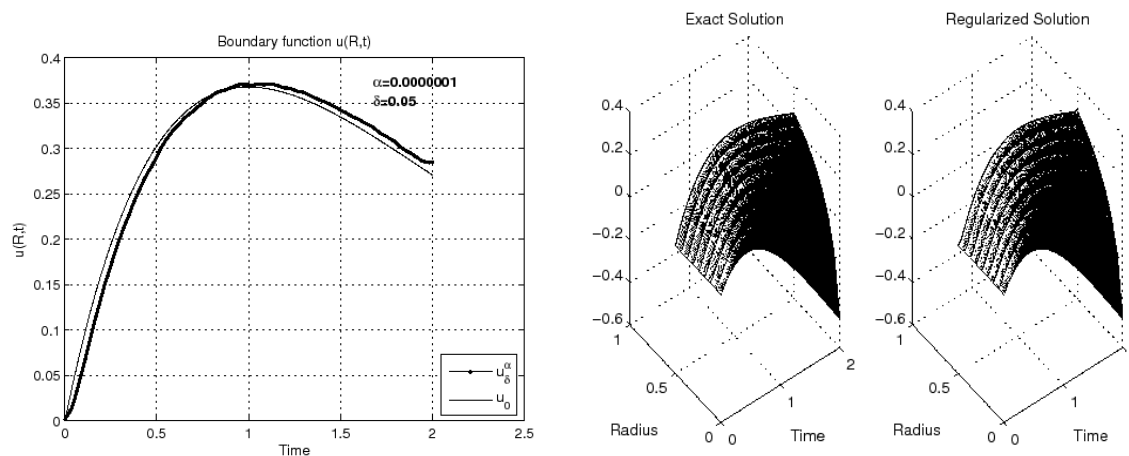


Рис. 2. Результаты численного решения нелинейной обратной граничной задачи для тестовых функций $u(0,t) = t(e^{-t} - e^{-1})$, $u(R,t) = te^{-t}$

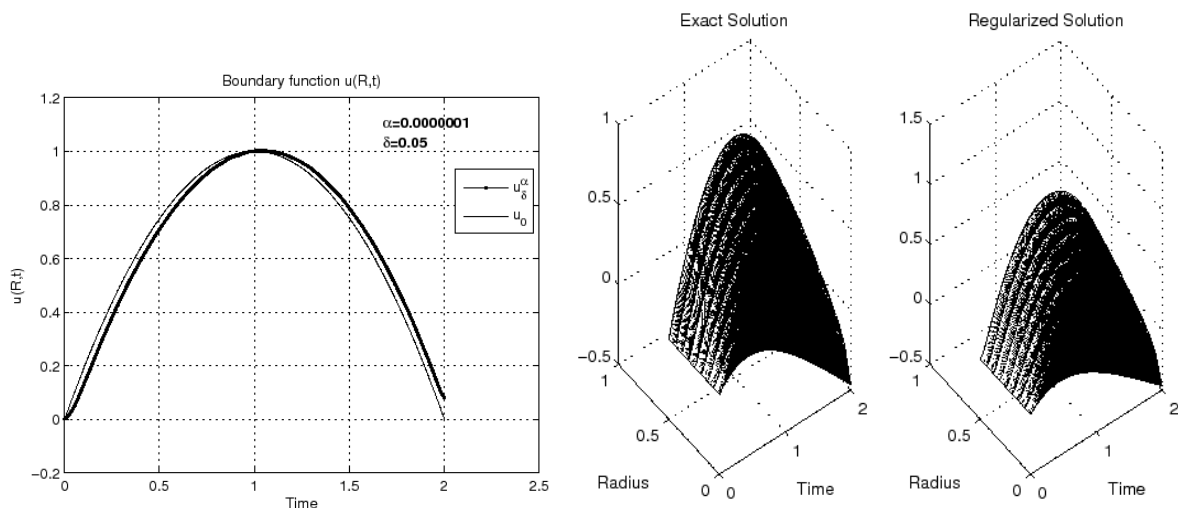


Рис. 3. Результаты численного решения нелинейной обратной граничной задачи для тестовых функций $u(0,t) = te^{-t}$, $u(R,t) = 1 - (t-1)^2$

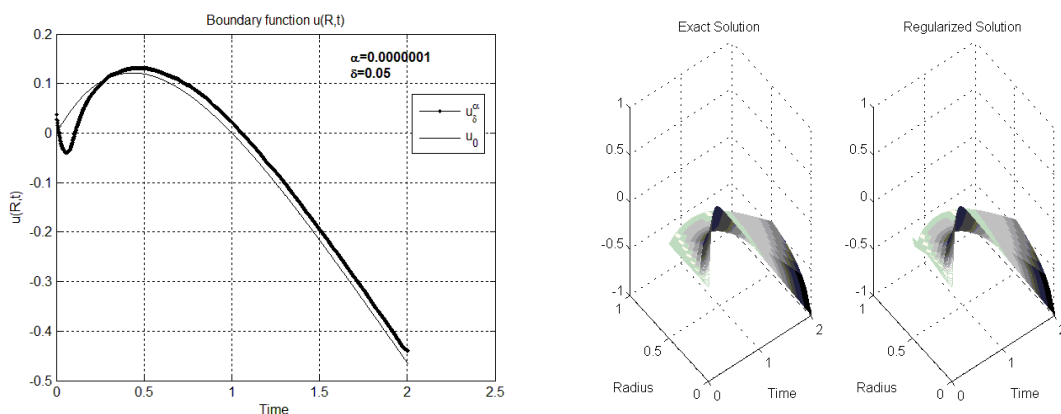


Рис. 4. Результаты численного решения нелинейной обратной граничной задачи для тестовых функций $u(0,t) = \frac{1-e^{-t/\gamma}}{1-e^{-1/\gamma}} - t$, $u(R,t) = te^{-t}$

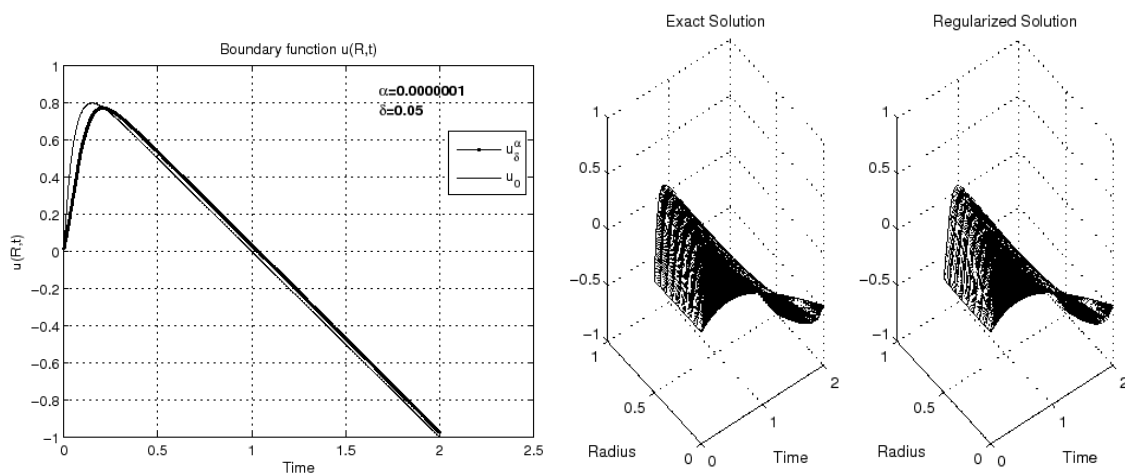


Рис. 5. Результаты численного решения нелинейной обратной граничной задачи для тестовых функций $u(0,t) = te^{-t}$, $u(R,t) = \frac{1-e^{-t/\gamma}}{1-e^{-1/\gamma}} - t$, где $\gamma > 0$

С целью получения экспериментальных оценок погрешностей были найдены величины $\Delta_\delta(N) = \|u_0 - u_\delta^\alpha\|_{C(0,T)}$, где u_0 — тестовое значение функции $u(R,t)$, а u_δ^α — численное решение задачи (4)–(6). Для краткости изложения в табл. 1 приведены некоторые средние значения $\Delta_\delta(N)$, полученные при $\delta = 0,05$ и соответствующей реализации условий (5) в тестовых функциях.

Таблица 1

Экспериментальные оценки погрешности численных решений

Тестовые функции	N	$\Delta_\delta(N)$
$u(0,t) = te^{-t}$ $u(R,t) = te^{-t}$	5	0,0377
	6	0,0346
	7	0,0282
	8	0,0252
	9	$0,5 \cdot 10^{81}$
	10	$5 \cdot 10^{208}$
$u(0,t) = \frac{1-e^{-t/\gamma}}{1-e^{-1/\gamma}} - t, \gamma = 0.05$ $u(R,t) = te^{-t},$	5	0,1084
	6	0,1026
	7	0,0805
	8	0,0765
	9	$0,5 \cdot 10^5$
	10	$2 \cdot 10^{133}$
$u(0,t) = te^{-t},$ $u(R,t) = \frac{1-e^{-t/\gamma}}{1-e^{-1/\gamma}} - t, \gamma = 0.05$	5	0,2795
	6	0,2688
	7	0,2556
	8	0,2555
	9	$2 \cdot 10^{56}$
	10	$0,5 \cdot 10^{123}$

Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что предложенный метод дискретной регуляризации позволяет с достаточной точностью определять неизвестную граничную функцию, а также находить требуемую функцию $u(r,t)$ во всей рассматриваемой области при условии согласования величин шагов дискретизации и параметра α .

Заключение

В статье рассмотрена обратная граничная задача для нелинейного параболического уравнения с неизвестными начальными условиями. Для численного решения задачи предложен метод дискретной регуляризации и проведено исследование устойчивости основной вычислительной схемы метода. С целью проверки эффективности предложенного метода и получения экспериментальных оценок погрешностей был проведен вычислительный эксперимент. Результаты эксперимента согласуются с полученными теоретическими оценками и свидетельствуют о том, что метод обладает свойством саморегуляризации. Предложенная вычислительная схема позволяет значительно уменьшить влия-

ние неизвестных начальных условий и, соответственно, получать численные решения в соответствующей подобласти с достаточной точностью. Результаты данного исследования могут быть использованы при решении прикладных задач, возникающих, например, в металлургии, в метрологии, а также при исследовании наноструктур.

Для уточнения оценок погрешностей предложенного метода в дальнейшем планируется провести исследование устойчивости полной вычислительной схемы и оценить влияния саморегуляризирующих свойств алгоритма на величину погрешностей численных решений.

Литература

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2009. – 784 с.
3. Прокудина Л.А., Вяткин Г.П. Самоорганизация возмущений в жидких пленках // Доклады Академии наук. 2011. Т. 439, № 4. С. 481–484.
4. Булгакова Г.Т., Кондратьева Н.Р. Аналитическая модель вертикального вытеснения нефти водой с учетом вязкостных, гравитационных и капиллярных // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2012. № 1. С. 208–213.
5. Шестаков А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. Министерство образования и науки Российской Федерации, Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2013. 257 с.
6. Мартинсон Л.К., Чигирева О.Ю. Температурное поле цилиндрического тела в режиме периодического разогрева // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2015. № 3 (60). С. 88–98.
7. Dorofeev K.Y., Nikolaeva N.N., Titarenko V.N., Yagola A.G. New approaches to error estimation to Ill-posed problems with application to inverse problems of heat conductivity // Journal of Inverse and Ill-posed problems. 2002. Vol. 10. No 2. P.155–169.
8. Танана В.П. Об оценке погрешности метода решения одной обратной задачи для параболического уравнения // Сибирский журнал вычислительной математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 451–465.
9. Табаринцева Е.В. О решении граничной задачи для параболического уравнения методом вспомогательных граничных условий // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2011. №32 (249). С. 68–76.
10. Танана В.П., Гайнова И.А., Сидикова А.И. Об оценке погрешности приближенного решения одной переопределенной обратной задачи тепловой диагностики // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. XV, № 1. С. 145–154.
11. Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Прямые и итерационные методы решения обратных и некорректных задач // Сибирские электронные математические известия. 2008. Т. 5. С. 595–608.

12. Zhang Y., Lukyanenko D.V., Yagola A.G. Using Lagrange principle for solving two-dimensional integral equation with a positive kernel // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2015. DOI: 10.1080/17415977.2015.1077445.
13. Солодуша С.В., Япарова Н.М. Численное решение обратной граничной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2015. Т. 18, № 3. С. 327–335.
14. Дрозин А.Д., Дудоров М.В., Роцин В.Е., Гамов П.А., Менихес Л.Д. Математическая модель образования кристаллических зародышей в переохлажденном расплаве эвтектического сплава // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. 2012. № 11 (270). С. 66–77.
15. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. СПб.: Лань. 2009. 608 с.
16. Вабищевич П.Н. Монотонные разностные схемы для задач конвекции / диффузии // *Дифференциальные уравнения*. 1994 Т. 30, №3. С. 503–515.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
18. Камонт З., Кропельница К. Неявные разностные методы для эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2011. Т. 14, № 4. С. 361–379.
19. Глазырина О.В., Павлова М.Ф. Исследование сходимости метода конечных элементов для решения параболических уравнений с нелинейным нелокальным пространственным оператором // *Дифференциальные уравнения*. 2015. Т. 51, №7. С. 876.
20. Япарова Н.М. Численный метод решения некоторых обратных задач теплопроводности с неизвестными начальными условиями // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника*. 2015. Т. 15, № 2. С. 55–65.
21. Япарова Н.М. Метод решения некоторых многомерных обратных граничных задач параболического типа без начальных условий // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника*. 2015. Т. 15, № 2. С. 97–108.
22. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
23. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967. 736 с.
24. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. Изд-во МГУ, 1990. 115 с.

Япарова Наталья Михайловна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), ddjy@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 30 декабря 2015 г.

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING AN INVERSE PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN INITIAL CONDITIONS

N.M. Yaparova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The paper is devoted to the inverse problem for a nonlinear parabolic equation with unknown initial conditions. A computational scheme for solving this problem is proposed. This approach allows obtain the numerical solution in internal points of domain and the unknown boundary function. The proposed scheme is based on the using of finite-difference equations and regularization technique. We investigate the stability of computational method. We obtained the dependence of stability on the discretization steps and level error of the initial data The proposed scheme proved the basis for development of numerical method and for the computational experiment. The experimental results are also presented in this paper, and confirm the effectiveness of the method.

Keywords inverse problem, numerical method, regularization method, error estimate, computational scheme.

FOR CITATION

Yaparova N.M. Numerical Method for Solving an Inverse Problem for Nonlinear Parabolic Equation with Unknown Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2016. vol. 5, no. 2. pp. 43–58. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160204.

References

1. Alifanov O.M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse Heat Transfer Problems]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 280 p. (in Russian)
2. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational Heat Transfer]. Moscow, Editorial URSS, 2003. 784 p. (in Russian)
3. Prokudina L.A. Vyatkin G.P. Self-Organization of Perturbations in Fluid Films. *Doklady Akademii nauk* [Doklady Physics]. 2011. vol. 56, no. 8. pp. 444–447.
4. Bulgakova G.T., Kondrat'eva N.R. Analiticheskaya model' vertikal'nogo vytesneniya nefti vodoj s uchetom vyazkostnyh, gravitacionnyh i kapillyarnyh sil [Analytical Model of Vertical Oil-Water Displacement with the Account of Viscous, Capillary and Gravity Forces]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences]. 2012. no. 1. pp. 208–213. (in Russian)
5. Shestakov A.L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya v dinamicheskikh izmereniyah* [The Methods of Control Theory in Dynamic Measurements]. Chelyabinsk, Publishing of the South Ural State University, 2013. 257 p. (in Russian)
6. Martinson L.K., Chigiryova O.Y. *Temperaturnoe pole cilindricheskogo tela v rezhime periodicheskogo razogreva* [Thermal Fields of a Cylindrical Body During Cyclic Heating].

- Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.EH. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series: Natural Sciences]. 2015. no. 3(60). pp. 88–98. (in Russian)
7. Dorofeev, K.Y., Nikolaeva N.N., Titarenko V.N., Yagola A.G. New Approaches to Error Estimation to Ill-Posed Problems with Application to Inverse Problems of Heat Conductivity. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2002. vol. 10, no. 2. pp. 155–169.
 8. Tanana V.P. An order-optimal method for solving an inverse problem for a parabolic equation. *Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki* [Numerical Analysis and Applications]. 2010. vol. 3, no. 4. pp. 367–371.
 9. Tabarinceva E.V. O reshenii granichnoj zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya metodom vspomogatel'nyh granichnyh uslovij [About Solution of the Boundary Inverse Problem for Parabolic Equation by Means of Subsidiary Boundary Conditions Method]. *Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"* [Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematics. Mechanics. Physics]. 2011. no. 32(249). pp. 68–76. (in Russian)
 10. Tanana V.P., Gajnova I.A., Sidikova A.I. Ob otsenke pogreshnosti priblizhennogo resheniya odnoy pereopredelennoj obratnoj zadachi teplovoy diagnostiki [The Estimation of Approximate Solutions an Overdetermined Inverse Problem of Thermal Diagnostics]. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics]. 2012. vol. XV, no. 1. pp. 145–154. (in Russian)
 11. Kabanihin S.I., Shishlenin M.A. Pryamye i iteratsionnye metody resheniya obratnykh i nekorrektnykh zadach [Direct and Iterative Methods for Solving Inverse and Ill-Posed Problems]. *Sibirskie ehlektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports]. 2008. vol. 5, pp. 595–608. (in Russian)
 12. Zhang Y., V. Lukyanenko D.V., Yagola A.G. Using Lagrange Principle for Solving Two-Dimensional Integral Equation with a Positive Kernel. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2015. DOI: 10.1080/17415977.2015.1077445.
 13. Solodusha S.V., Yaparova N.M. Numerical Solving an Inverse Boundary Value Problem of Heat Conduction Using Volterra Equations of the First Kind. *Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki* [Numerical Analysis and Applications]. 2015. vol. 8, no. 3. pp. 267–274.
 14. Drozin A.D., Dudorov M.V., Roshchin V.E., Gamov P.A., Menihes L.D. Matematicheskaya model' obrazovaniya kristallicheskiz zardyshey v pereokhlazhdennom rasplave evtekticheskogo splava [Mathematical Description of the Nucleation in Supercooled Eutectic Melt]. *Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"* [Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematics. Mechanics. Physics]. 2011. no. 11(270). pp. 66–77. (in Russian)
 15. Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noj matematiki* [Methods of Computational Mathematics]. St. Petersburg, Publishing of the Lan', 2009. 608 p. (in Russian)
 16. Vabishchevich P.N. Monotone Finite-Difference Schemes on Triangular Grids for Convection-Diffusion Problems. *Differencialnye Uravneniya* [Differential Equations]. 1994. vol. 42, no. 9. pp. 1317–1330.
 17. Tihonov A.N. Samarskij A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Publishing of the Moscow State University, 1999. 799 p. (in Russian)

18. Kamont Z., Kropelnicka K. Neyavnye raznostnye metody dlya evolyutsionnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [Implicit Difference Methods for Evolution Functional Differential Equations]. *Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki* [Numerical Analysis and Applications]. 2011. vol. 14, no. 4. pp. 361–379. (in Russian)
19. Glazyrina O.V. Pavlova M.F. Study of the Convergence of the Finite-Element Method for Parabolic Equations with a Nonlinear Nonlocal Spatial Operator. *Differentsialnye Uravneniya* [Differential Equations]. 2015. vol. 51, no. 7. pp. 872–885.
20. Yaparova N.M. Chislenny metod resheniya nekotorykh obratnykh zadach teploprovodnosti s neizvestnymi nachal'nymi usloviyami [Numerical Method for Solving Some Inverse Heat Conduction Problems with Unknown Initial Conditions]. *Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika"* [Bulletin of the South Ural State University, Series: Computer Technologies, Automatic Control and Radioelectronics]. 2015. no. 2. pp. 55–65. (in Russian)
21. Yaparova N.M. Metod resheniya nekotorykh mnogomernykh obratnykh granichnykh zadach parabolicheskogo tipa bez nachal'nykh usloviy [Method for Solving Some Multi-dimensional Inverse Boundary Value Problems for Parabolic PDEs Without Conditions]. *Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika"* [Bulletin of the South Ural State University, Series: Computer Technologies, Automatic Control and Radioelectronics]. 2015. no. 3. pp. 97–108. (in Russian)
22. Samarskij A.A. Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1971. 552 p. (in Russian)
23. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uralceva N.N. Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and Quasi-Linear Parabolic Equations]. Moscow, Nauka, 1967. 736 p. (in Russian)
24. Tihonov A.N., Goncharskij A.V., Stepanov V.V., YAgola A.G. Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach [Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems]. Moscow, Publishing of the Moscow State University, 1990. 115 p. (in Russian)

Received December 30, 2015.