

МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

© 2016 г. Н.М. Япарова

Южно-Уральский государственный университет

(454080 Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, д. 76)

E-mail: ddjy@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию: 09.08.2016

В статье предложен метод решения задачи идентификации неизвестной функции источника в параболическом уравнении с постоянными коэффициентами с граничными условиями Дирихле и Неймана. Представленный метод основан на использовании прямого и обратного преобразований Лапласа, что позволило свести исходную задачу к решению интегрального уравнения Вольтерра первого рода, характеризующую прямую зависимость неизвестной функции источника от известных граничных условий. Для численного решения полученного уравнения предлагается использовать регуляризирующие алгоритмы. В качестве одного из параметров регуляризации в предложенном численном методе выступает количество слагаемых в конечномерном аналоге ядра. С целью оценки эффективности предложенного подхода и получения экспериментальных оценок погрешности численных решений задачи идентификации функции источника был проведен вычислительный эксперимент. Результаты эксперимента и свидетельствуют о достаточной устойчивости численных решений, полученных на основе предложенного метода.

Ключевые слова: идентификации функции источника, преобразования Лапласа, уравнения Вольтерра, численные методы, вычислительный эксперимент.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Япарова Н.М. Метод решения обратной задачи идентификации функции источника с использованием преобразования Лапласа // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 3. С. 20–35. DOI: 10.14529/cmse160302.

Введение

Обратные задачи идентификации источника возникают при исследовании различных процессов, связанных с переносом и распределением вещества или энергии внутри тела [1–3]. Математически в линейном приближении эти процессы описываются уравнениями параболического типа с неизвестным неоднородным слагаемым, называемым функцией источника и дополнительно известными начальными и граничными условиями. Для получения устойчивого численного решения рассматриваемых задач используют различные методы регуляризации [4–8].

В статье предложен метод решения обратной задачи идентификации функции источника, основанный на применении прямого и обратного преобразований Лапласа. В подходах, использующих преобразования Лапласа, как правило, после выполнения прямого преобразования получают устойчивые решения с помощью методов регуляризации, а затем уже для этих решений применяют обратное преобразование (см., например, [9, 10]). Основная трудность при таком подходе состоит в том, что численная реализация обратного преобразования Лапласа сильно неустойчива. В данном исследовании предложен другой под-

ход, обобщающий результаты, представленные в работе [11]. В результате его применения сначала получают интегральное уравнение, устанавливающее явную зависимость функции источника от известных граничных и начальных данных, а затем уже для решения этого уравнения используют методы регуляризации. Аналогичная идея была использована в работах [12, 13] для решения обратной граничной задачи.

Практическая реализация предложенного подхода предусматривает разработку численного метода решения полученного интегрального уравнения. С разработкой и исследованием устойчивых численных алгоритмов связаны работы многих исследователей, например, [14–17]. В данном исследовании в качестве одного из возможных методов решения используется численный метод, основанный на схеме Лаврентьева с апостериорным выбором параметра регуляризации.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе приведена постановка задачи а также дополнительные свойства и ограничения на рассматриваемый класс функций. Второй раздел посвящен построению основного интегрального уравнения. В третьем разделе предложен численный метод решения полученного уравнения. В четвертой части статьи приведены результаты вычислительного эксперимента, основными целями которого являлись проверка эффективности предложенного подхода к решению задачи идентификации, основанному на преобразованиях Лапласа, а также получение экспериментальных оценок погрешностей регуляризованных решений. В заключении сформулированы итоговые выводы, полученные в результате проведенных исследований, а также указаны основные направления дальнейших исследований.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = au_{xx} + f(t), \quad x \in (0, \ell), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \ell], \quad t \geq 0, \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где функция $f(t)$ подлежит определению. Полагаем, что $g \in C^{2+\eta}[0, T]$ при всех $T > 0$, а $\eta \in (0, 1)$ и существуют константы M, m такие, что $|g(t)| \leq Me^{mt}$ для любого $t \in [0, T]$ при всех $T > 0$. Известно, что при некотором $g(t) = g_0(t)$ существуют точное значение $f_0(t)$ и функция $u_0(x, t)$, удовлетворяющая (1)–(3) при $f(t) = f_0(t)$, но вместо g_0 известны некоторые приближения g_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такие, что $\|g_\delta - g_0\|_{C(0, T)} \leq \delta$. Требуется сначала определить функцию $f_\delta^\alpha(t) \in C^{1+\eta}(0, T)$ при всех $T > 0$, а затем найти $u_\delta^\alpha(x, t) \in H^{2,1}((0, \ell) \times (0, T))$ при $T > 0$, удовлетворяющую (1)–(3). Единственность решения рассматриваемой задачи (1)–(3) была доказана в работе [18].

В данном исследовании предлагается разделить решение обратной задачи идентификации источника на два этапа. Первый этап заключается в сведении исходной задачи идентификации функции $f(t)$ к решению уравнения Вольтерра первого рода, характеризующего прямую зависимость функции $f(t)$ от граничных условий. На втором этапе осуществляется численное решение полученного интегрального уравнения и по результатам решения вычисляются значения функции $u_\delta^\alpha(x, t)$.

2. Построение интегрального уравнения

Сведем задачу (1)–(3) к интегральному уравнению. С этой целью найдем решение прямой задачи, предположив, что искомая функция $f(t)$ нам известна, то есть рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = au_{xx} + f(t), \quad x \in (0, \ell), \quad t \geq 0, \quad (4)$$

$$u(0, t) = u(\ell, t) = u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, \ell], \quad t \geq 0. \quad (5)$$

Найдя решение $u(x, t)$ этой задачи, и, выполнив затем соответствующие преобразования, получим уравнение, связывающее $f(t)$ и $u_x(0, t) = g(t)$.

Полагаем, что существуют $C, \bar{C} > 0$ и $\beta_0, \beta \geq 0$ такие, что $|u(x, t)| \leq Ce^{\beta_0 t}$ и $|f(t)| \leq \bar{C}e^{\beta t}$ выполнены при $x \in [0, \ell]$ и при всех $t \in [0, T]$ для любого $T > 0$. Дополнительно полагаем, что функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле для любого $t \in [0, T]$ при всех $T > 0$. Тогда, следуя результатам, представленным в работе [19], применим прямое преобразование Лапласа в задаче (4), (5). Обозначив изображения функций $u(x, t)$ и $f(t)$ как $\bar{u}(x, p)$ и $\bar{f}(p)$ соответственно, получаем, что операторное изображение прямой задачи (4), (5) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} - \frac{p}{a} \bar{u} &= -\bar{f}(p), \\ \bar{u}(0, p) &= \bar{u}(\ell, p) = 0. \end{aligned}$$

Решение этой задачи определяется формулой:

$$\bar{u}(x, p) = \frac{\bar{f}(p)}{p} \frac{sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\ell\right) - sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right) - sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell - x)\right)}{sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\ell\right)}. \quad (6)$$

Лемма 1. Решение $u(x, t)$ задачи (4), (5), имеет вид:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{\ell}\pi x\right)}{2m+1} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a t}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau. \quad (7)$$

Доказательство. Из теоремы, доказанной в [13] следует, что функцию $\bar{\psi}(x, p) = \frac{sh(\sqrt{p}x)}{sh(\sqrt{p}\ell)}$ можно представить в виде:

$$\bar{\psi}(x, p) = x + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin(\pi m x) \frac{p}{p + m^2 \pi^2}.$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\frac{sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}x\right)}{sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\ell\right)} = \frac{x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin\left(\frac{\pi m x}{\ell}\right) \frac{p}{p + \frac{m^2 \pi^2 a}{\ell^2}} \quad (8)$$

$$\frac{sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}(\ell - x)\right)}{sh\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\ell\right)} = \frac{\ell - x}{\ell} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} \sin\left(\frac{\pi m(\ell - x)}{\ell}\right) \frac{p}{p + \frac{m^2 \pi^2 a}{\ell^2}}.$$

Учитывая сходимость рядов в (8), выполним соответствующие преобразования в (6), получаем:

$$\bar{u}(x, p) = \frac{4}{\pi} \frac{\bar{f}(p)}{p} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{\ell} \pi x\right)}{2m+1} \frac{p}{p + \frac{(2m+1)^2 \pi^2 a}{\ell^2}}. \quad (9)$$

Принимая во внимание свойства функции $f(t)$, применим обратное преобразование Лапласа к обеим частям (9). Далее, используя теорему о свертке [19], получаем:

$$u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{\ell} \pi x\right)}{2m+1} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau.$$

Сходимость ряда (7) для любых $x \in [0, \ell]$ и $t \in [0, T]$ следует из теоремы Вейерштрасса и следующей оценки:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\sin\left(\frac{2m+1}{\ell} \pi x\right)}{2m+1} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{(2m+1)} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \frac{\bar{C} \ell^2 e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2} + \beta t}}{(\pi^2(2m+1)^2 a + \ell^2 \beta)} \leq \frac{\bar{C} \ell^2 e^{\beta t}}{\pi^2 a (2m+1)^3}. \end{aligned}$$

□

Обозначим $Q_T = (0, \ell) \times (0, T)$ при $T > 0$. В силу того, что численное решение задачи(1)–(3) может быть найдено только в ограниченной области \bar{Q}_T , и, учитывая, что для его построения нам потребуются только значения $u_x(0, t)$, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 1. Пусть решение $u(x, t)$ задачи (4), (5) определено формулой (7), тогда имеет место следующее представление

$$u_x(0, t) = \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau$$

при всех $t \in [0, T]$ для каждого $T > 0$, и для любых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что

$$\left\| \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau - g_\delta \right\|_{C(0, T)} \leq \varepsilon + \delta.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2m+1}{\ell} \pi x\right) e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau. \quad (10)$$

Применяя рассуждения, аналогичные приведенным в лемме 1, получаем:

$$\left| \cos\left(\frac{2m+1}{\ell} \pi x\right) e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 at}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a\tau}{\ell^2}} d\tau \right| \leq \frac{\bar{C} \ell^2 e^{\beta t}}{\pi^2 a (2m+1)^2}.$$

Из сходимости ряда $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}$, а также из теоремы Вейерштрасса следует сходимость ряда (10) при всех $x \in [0, \ell)$. Таким образом, используя свойства сходящихся рядов, получаем:

$$u_x(x, t) = \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^{\infty} \cos\left(\frac{2m+1}{\ell} \pi x\right) e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a t}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau.$$

Далее аппроксимируем функцию $u_x(0, t)$ конечным рядом. Тогда, в силу сходимости ряда (10) для любого $\varepsilon > 0$ найдется N такое, что

$$\left| \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a t}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau - u_x(0, t) \right| < \varepsilon. \quad (11)$$

Принимая во внимание условие (3), получаем требуемое неравенство. \square

Таким образом, мы можем сформулировать основной результат. Из теоремы 1 и условия (3) следует, что неизвестная функция источника $f(t)$ может быть определена при решении следующего уравнения:

$$\frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a t}{\ell^2}} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\pi^2(2m+1)^2 a \tau}{\ell^2}} d\tau = g(t) \quad (12)$$

при условии, что вместо точно заданной функции $g(t)$ известны $g_\delta(t)$ и $\delta > 0$ такие, что $\|g(t) - g_0(t)\| \leq \delta$ при всех $t \in [0, T]$.

3. Численный метод

Определив $K(t, \tau)$ при всех $t \in [0; T]$ соотношением

$$K_N(t - \tau) = \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a}{\ell^2} (t-\tau)},$$

и при условии, что $g(0) = 0$, мы можем рассматривать уравнение (12) как уравнение Вольтерра первого рода:

$$Af = \int_0^t K_N(t - \tau) f(\tau) d\tau = g(t). \quad (13)$$

Единственность решения этого уравнения при всех $t \in [0, T]$ для любых $T > 0$ была доказана в [20]. Решение уравнения (13) возможно получить, применяя различные численные методы, но выбор наиболее оптимального метода решения уравнения (13) не является целью данного исследования, поэтому нам достаточно рассмотреть один из возможных методов решения задачи идентификации. В качестве такого метода мы используем вычислительную схему, основанную на методе регуляризации Лаврентьева.

Построение численного решения задачи (1)–(3) осуществим в два этапа. На первом выбираем количество слагаемых в (11). Для этого ортогонализуем систему функций $\left\{ e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a}{\ell^2} t} \right\}_0^N$ для каждого $N \geq 2$ и $t \in [0, T]$. Обозначим через $\{\psi_m(t)\}_0^N$ полученную ор-

тогонализированную систему функций. Найдем коэффициенты $\{g_m(t)\}_0^N$ в разложении функции $g_\delta(t)$ по этой системе, используя формулу:

$$g_{\delta m} = \int_0^T g_\delta(\tau) \psi_m(\tau) d\tau.$$

Полагаем $g_{N\delta} = \sum_{m=0}^N g_{\delta m} \psi_m(t)$. Перегруппировав слагаемые в последнем соотношении, получаем $g_{N\delta} = \sum_{m=0}^N c_m e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a}{\ell^2} t}$, где $\{c_m(t)\}_0^N$ — коэффициенты, полученные после перегруппировки.

Далее при каждом значении N вычисляем величину h_N по формуле

$$h_N = \left\| \frac{4}{\ell} \sum_{m=0}^N c_m e^{-\frac{\pi^2(2m+1)^2 a}{\ell^2} t} - g_\delta \right\|_{C([0,T])}. \quad (14)$$

Используя условие $\delta \leq h_N \leq \delta + \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, находим N . Заметим, что при таком подходе величина N может принимать только небольшие значения.

На втором этапе получаем численные решения уравнения (13), используя вычислительную схему, основанную на методе регуляризации, предложенном в [21]. Согласно этому подходу, регуляризованное решение поставленной задачи определяется из уравнения:

$$Af + \alpha f = g_\delta, \quad (15)$$

при соблюдении условия $\|Af - g_\delta\| \leq \delta + \varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выбор параметра α можно осуществить с помощью различных подходов. В данном исследовании параметр α выберем следующим образом. Предположим, что для некоторого α_0 было получено решение f_δ^α уравнения (15). Вычислим $P = \|Af_\delta^\alpha\|$ и $M = \frac{P}{\|f_\delta^\alpha\|}$. Затем используем идею, предложенную в работе [22], согласно которой параметр регуляризации определим с помощью функции

$$\Psi(\alpha) = \|\alpha(\alpha E + A_{h_N})^{-2} g_\delta - f\| + \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\|g_\delta\| h_N}{\alpha^2},$$

где $0 < \alpha \leq M$. Для выбора параметра α мы на каждом этапе при фиксированном N определяем наименьшее по α значение функции $\Psi(\alpha)$. В работе доказано [22], что при таком подходе, мы получаем единственное обобщенное квазиоптимальное значение α . Таким образом, для численного решения уравнения Вольтерра мы получаем итерационную вычислительную схему, где параметрами регуляризации являются количество слагаемых N в ряде (11) и величина α .

4. Вычислительный эксперимент

Подход, позволяющий с помощью преобразований Лапласа свести решение задачи идентификации источника к интегральному уравнению, послужил основой для разработки численного метода и проведения вычислительного эксперимента. Основными целями эксперимента являлись оценка эффективности данного подхода, а также получение экспериментальных оценок погрешностей численных решений. Эксперимент проводился для тестовых функций с использованием равномерной сетки (x_i, t_j) из $(n + 1) \times (r + 1)$ узлов. В качестве

Таблица 1

Экспериментальные погрешности $\Delta_{f_{opt}}$

δ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0,02	0,0367	0,7471	0,0412	0,0522	0,1112	0,0811
0,05	0,0749	0,8551	0,0838	0,0732	0,1562	0,1672
0,1	0,1878	0,7878	—	0,1723	0,1885	0,2060

тестовых были использованы следующие функции:

$$f_1 = te^t, \quad f_2 = (1-t)e^{-2t}, \quad f_3 = t(e^{-t} - e^{-1}), \quad f_4 = \sin(3\pi t)e^{-t},$$

$$f_5 = \sin(10\pi t)e^{-t}, \quad f_6 = \begin{cases} \sin(5\pi t) - 2.5t^2, & t \in [0; 0.5), \\ \cos(5\pi t), & t \in [0.5; 1] \end{cases}$$

Основные этапы вычислительного эксперимента состояли в следующем.

Этап 1. Для тестовой функции $f_k(t)$ находим решение $u_k(x, t)$ прямой задачи (4), (5), используя конечно-разностные уравнения. Затем моделируем значения $g(t_j)$ в узлах (x_1, t_j) , с помощью конечно-разностных аппроксимаций частных производных. Далее задаем возмущение правой части уравнения (13) так, что $g_\delta(t_j) = g(t_j) + e_\delta(t_j)$, где $e_\delta(t_j)$ является случайной величиной равномерно распределенной на $[g(t_j) - \delta; g(t_j) + \delta]$.

Этап 2. Находим решение f_δ^α интегрального уравнения (13) с помощью предложенного численного метода. Для аппроксимации интегралов используем квадратуру правых прямоугольников. После построения f_δ^α вычисляем величину $\Delta_f = \|f_\delta^\alpha - f_k\|_{C(0,T)}$.

Этап 3. Подставляя найденные f_δ^α в (4) и используя (5), находим u_δ^α и вычисляем $\Delta_u = \|u_\delta^\alpha(x, t) - u_k(x, t)\|_{L_1(Q_T)}$.

Этап 4. Для исследования влияния параметров N и α на устойчивость метода повторяем этапы 2, 3 для различных N и α и вычисляем Δ_f при каждом повторе.

Заметим, что подходы, используемые для моделирования возмущенных данных и вычисления Δ_u обусловлены физическим смыслом задачи и спецификой проведения расчетов, основанных на экспериментальных данных, когда известен только максимальный уровень шума, а другие характеристики шума носят случайный характер и требуется, с одной стороны, избежать излишнего усложнения вычислительной процедуры, а с другой стороны, получить численное решение, имеющее приемлемый уровень погрешности.

Результаты вычислительного эксперимента приведены в таблицах и представлены на рисунках. Средние значения $\Delta_{f_{opt}}$ и $\Delta_{u_{opt}}$, полученные при различных δ и оптимальных значениях параметров $N(\delta)$ и $\alpha(\delta)$, представлены в таблицах 1 и 2, а соответствующие им графики и поверхности представлены на рис. 1–6. Таблицы 3–8 содержат результаты исследования влияния параметров N и α на погрешность решений при выбранном подходе к моделированию возмущенных данных. В статье представлены результаты этих исследований, полученные при $\delta = 0,02$.

На всех рисунках используются одинаковые обозначения. Одномерные рисунки иллюстрируют графики функций источника f . Обозначение «model» соответствует графикам тестовых функций f_k , $k = \overline{1,6}$ а графики решений f_δ^α уравнения (15) обозначены как f_δ .

Таблица 2

Экспериментальные погрешности $\Delta_{u_{opt}}$

δ	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0,02	0,0076	0,0174	0,0125	0,0169	0,0188	0,0215
0,05	0,0218	0,0230	0,0251	0,0198	0,0202	0,0243
0,1	0,0267	0,0272	—	0,0274	0,0291	0,0304

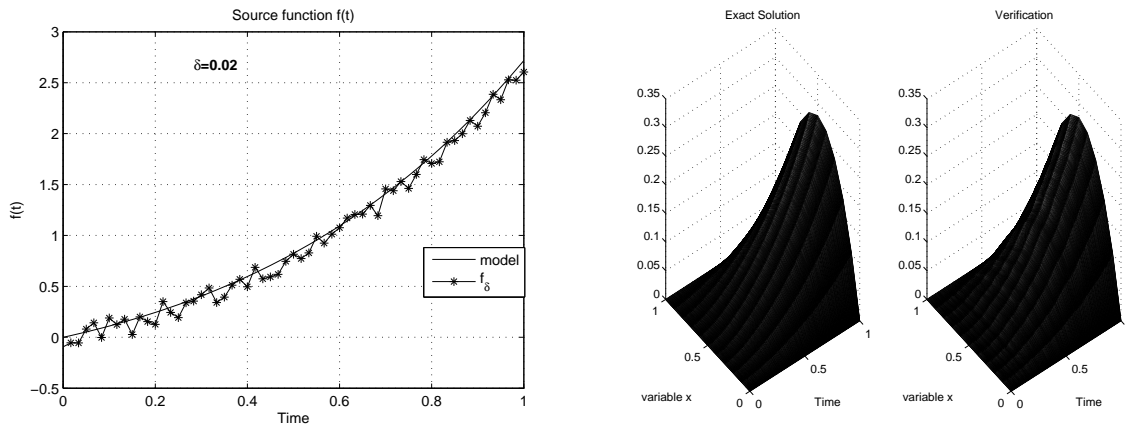


Рис. 1. Результаты численного решения задачи (1)–(3) для функции $f_1(t)$

Величина погрешности, при которой проводились расчеты, обозначена δ . Двумерные поверхности, имеющие обозначение «Exact Solution», соответствуют решениям u_k прямой задачи (4), (5), построенным для тестовых функций. Поверхности, соответствующие решению $u_\delta^\alpha(x, t)$, полученному с использованием функции f_δ^α , обозначены как «Verification».

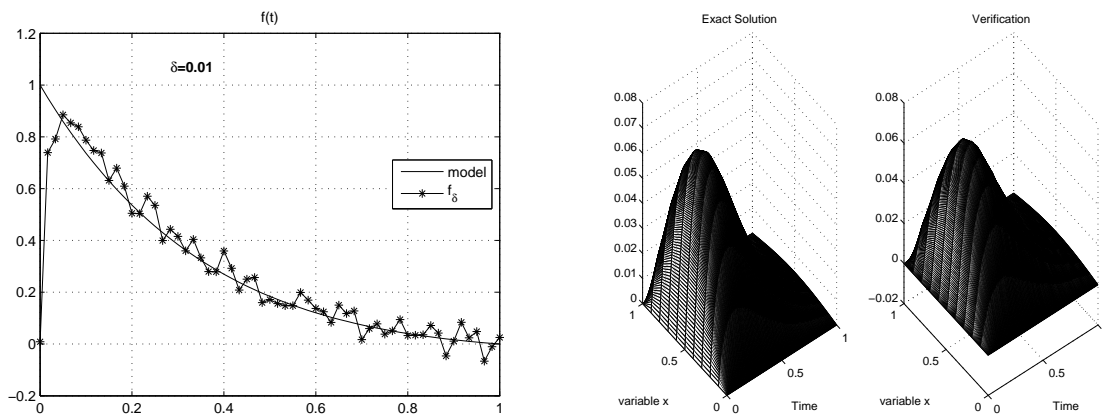


Рис. 2. Результаты численного решения задачи (1)–(3) для функции $f_2(t)$

На основании полученных результатов эксперимента можно сделать следующие выводы. Предложенный метод решения задачи идентификации функции источника позволяет получать регуляризованные решения с удовлетворительной точностью. При этом уровень погрешности исходных данных оказывают наиболее существенное влияние на величину погрешности приближенного решения f_δ^α . Влияние значений N и α на величину уклонения f_δ^α

Таблица 3

Экспериментальная погрешность Δ_{f_1} для функций f_1

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0,0557	0,0536	0,0510	0,0524	0,0529	0,0538
4	0,0548	0,0512	0,0462	0,0474	0,0480	0,0491
5	0,0425	0,0386	0,0367	0,0381	0,0402	0,0408
6	0,0478	0,0433	0,0424	0,0442	0,0455	0,0461
7	0,0521	0,0508	0,0515	0,0518	0,0522	0,0524

Таблица 4

Экспериментальная погрешность Δ_{f_2} для функций f_2

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0,8210	0,8115	0,7934	0,8024	0,8212	0,8234
4	0,8181	0,8023	0,7732	0,7874	0,8034	0,8177
5	0,8052	0,7756	0,7471	0,7618	0,7945	0,8067
6	0,8137	0,7893	0,7723	0,7856	0,8076	0,8111
7	0,8164	0,8005	0,7802	0,7912	0,8085	0,8123

Таблица 5

Экспериментальная погрешность Δ_{f_3} для функций f_3

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0,0490	0,0478	0,0463	0,0468	0,0472	0,0478
4	0,0474	0,0467	0,0437	0,0445	0,0448	0,0451
5	0,0453	0,0438	0,0412	0,0418	0,0421	0,0423
6	0,0464	0,0452	0,0441	0,0445	0,0451	0,0452
7	0,0470	0,0462	0,0450	0,0458	0,0462	0,0465

Таблица 6

Экспериментальная погрешность Δ_{f_4} для функций f_4

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0,0549	0,0543	0,0538	0,0542	0,0544	0,0546
4	0,0545	0,0539	0,0531	0,0535	0,0540	0,0542
5	0,0536	0,0529	0,0522	0,0533	0,0537	0,0539
6	0,0542	0,0536	0,0531	0,0535	0,0539	0,0542
7	0,0547	0,0542	0,0536	0,0540	0,0545	0,0549

Таблица 7

Экспериментальная погрешность Δ_{f_5} для функций f_5

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0,1157	0,1154	0,1141	0,1143	0,1145	0,1146
4	0,1153	0,1115	0,1132	0,1134	0,1137	0,1141
5	0,1147	0,1143	0,1112	0,1118	0,1122	0,1127
6	0,1149	0,1146	0,1127	0,1129	0,1131	0,1133
7	0,1151	0,1147	0,1135	0,1136	0,1136	0,1137

Таблица 8

Экспериментальная погрешность Δ_{f_6} для функций f_6

N	$\alpha = 10^{-3}$	$\alpha = 10^{-4}$	$\alpha = 10^{-5}$	$\alpha = 10^{-6}$	$\alpha = 10^{-7}$	$\alpha = 10^{-8}$
3	0,0842	0,0838	0,0836	0,0839	0,0841	0,0840
4	0,0834	0,0832	0,0826	0,0830	0,0837	0,0839
5	0,0828	0,0817	0,0811	0,0819	0,0825	0,0827
6	0,0830	0,0825	0,0819	0,0827	0,0828	0,0829
7	0,0832	0,0831	0,0827	0,0829	0,0830	0,0831

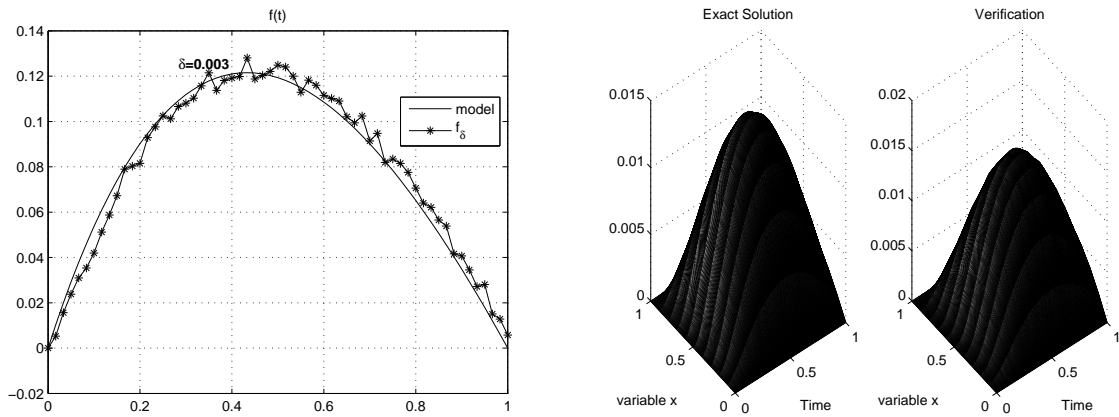


Рис. 3. Результаты численного решения задачи (1)–(3) для функции $f_3(t)$

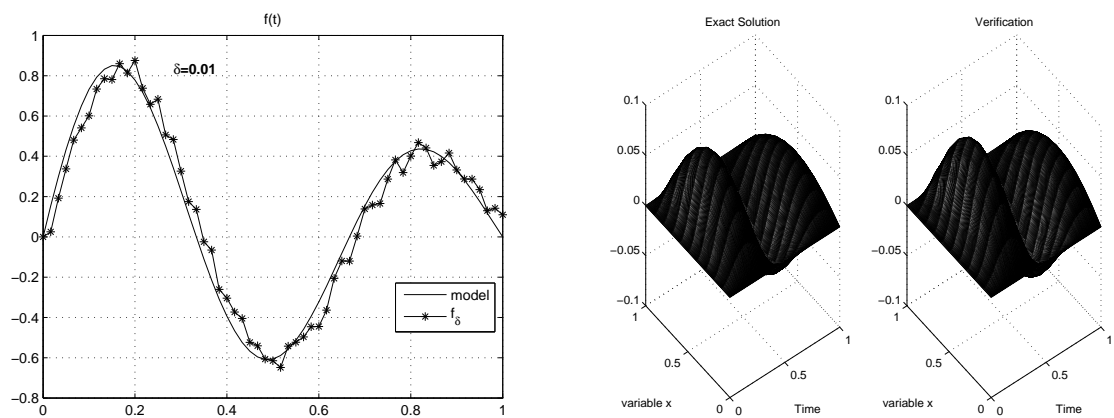


Рис. 4. Результаты численного решения задачи (1)–(3) для функции $f_4(t)$

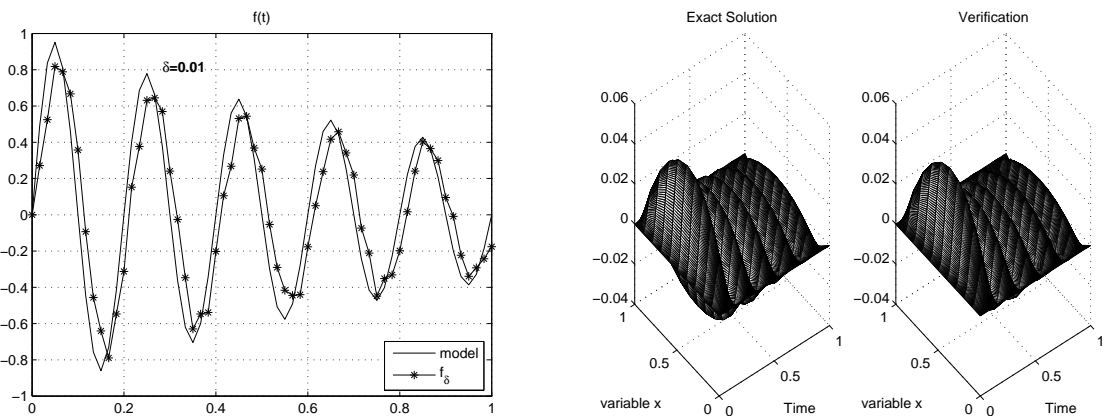


Рис. 5. Результаты численного решения задачи (1)–(3) для функции $f_5(t)$

от f_k при рассматриваемом подходе к моделированию возмущенных данных имеет гораздо меньший эффект, что позволяет ограничиваться небольшими значениями этих параметров при проведении расчетов, основанных на результатах реальных измерений.

Заключение

В статье рассмотрена обратная задача идентификации функции источника для параболического уравнения. С помощью применения прямого и обратного преобразований Лапласа

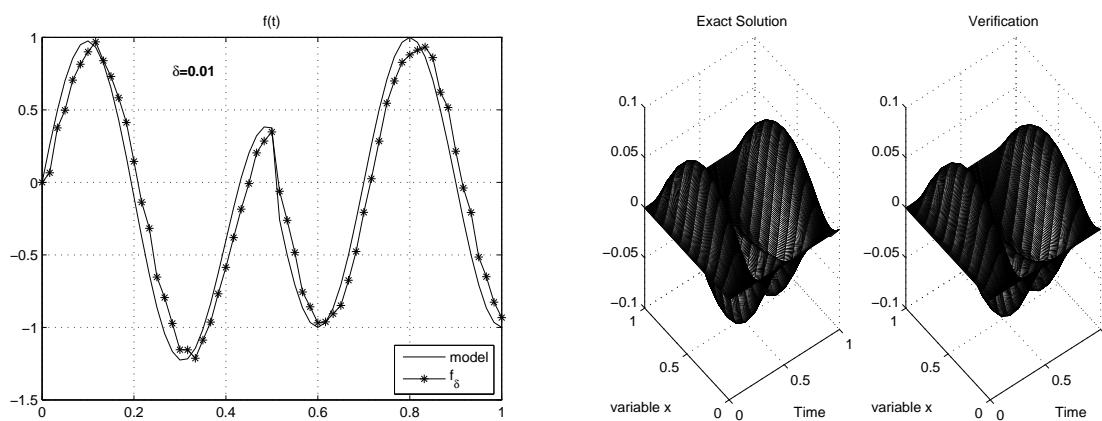


Рис. 6. Результаты численного решения задачи (1)–(3) для функции $f_6(t)$

са эта задача сводится к решению уравнения Вольтерра первого рода, характеризующее прямую зависимость неизвестной функции источника от известных граничных условий. Такой подход позволил исключить неустойчивую процедуру численного обращения преобразования Лапласа из вычислительной схемы. В статье предложен численный метод решения полученного интегрального уравнения, основанный на применении регуляризующего алгоритма с апостериорным выбором параметров регуляризации и послуживший основой для проведения вычислительного эксперимента. Результаты эксперимента свидетельствуют об устойчивости регуляризованных решений и достаточной эффективности предложенного подхода к решению задачи идентификации функции источника. Для более строгого исследования влияния параметра N на точность решений требуется провести дополнительные исследования, в которых возмущения в правой части (13) задаются специальным образом. Результаты данного исследования могут быть использованы при решении прикладных задач, возникающих, например, в металлургии, машиностроении, а также при исследовании различных диффузионных процессов.

С целью уточнения оценки погрешности решений, полученных при использовании этого подхода, и улучшения сходимости построенных решений в дальнейшем планируется рассмотреть численное решение уравнения такого типа с помощью подходов, основанных на устойчивых разностных методах, где в качестве параметра регуляризации выступает шаг сетки по аналогии с результатами, представленными в работах [12], [14].

Литература

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
2. Erdogan A.S., Sazaklioglu A.U. A note on the numerical solution of an identification problem for observing two-phase flow in capillaries // *Mathematical method in the Applied Sciences*. 2014. Vol. 37, No. 16. P. 2393–2405.
3. Zenkour A.M., Abouelregal A.E. Vibration of FG nanobeams induced by sinusoidal pulse-heating via a nonlocal thermoelastic model // *ACTA Mechanica*. 2014. Vol. 225, No. 12. P. 3409–3421.
4. Вабищевич П.Н. Численное решение задачи идентификации правой части параболического уравнения // *Известия вузов. Серия: Математика*. 2003. № 1(488). С. 9–36.
5. Гольдман Н.Л. Однозначность определения функции источника в квазилинейной обрат-

- ной задаче Стефана с финальным наблюдением // Доклады РАН. 2012. Т. 444, № 6. С. 597–601.
6. Прилепко А.И., Ткаченко Д.С. Корректность обратной задачи об источнике для параболических систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1540–1547.
 7. Черепанова О.Н., Шипина Т.Н. Об одной задаче идентификации функции источника в параболическом уравнении // Журнал Северного Федерального Университета. Серия: Математика и физика. 2009. Т. 2, № 3. С. 370–375.
 8. Hasanov A., Pektas B. Identification of an unknown time-dependent heat source term from overspecified Dirichlet boundary data by conjugate gradient method // Computers and Mathematics with Applications. 2013. Vol. 65, No. 1. P. 42–57.
 9. Cialkowski M., Grysa K. A sequential and global method of solving an inverse problem of heat conduction equation // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2010. Vol. 48, No. 1. P. 111–134.
 10. Monde M., Arima H., Liu W., Mitutake Y., Hammad J.A. An analytical solution for two-dimensional inverse heat conduction problems using Laplace transform // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2003. Vol. 46. P. 2135–2148.
 11. Япарова Н.М. Метод решения одной обратной задачи идентификации функции источника для систем с распределенными параметрами // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, № 5. С. 1549–1552.
 12. Солодуша С.В., Япарова Н.М. Численное решение обратной граничной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода // Сибирский журнал вычислительной математики. 2015. Т. 18, № 3. С. 327–335.
 13. Yaparova N. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem // Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. Vol. 22, No. 5. P. 832–847.
 14. Апарцин А.С., Бакушинский А.Б. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм // Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 1972. Вып. 1. С. 248–258.
 15. Васин В.В., Сerezникова Т.И. Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 2. С. 15–23.
 16. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издание, 2009. 457 с.
 17. Королев Ю.М., Ягола А.Г. Оценка погрешностей линейных обратных задачах при наличии априорной информации // Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии. 2012. Т. 13, № 1(25). С. 14–18.
 18. Bushuev I. Global uniqueness for inverse parabolic problems with final observation // Inverse Problems. 1995. Vol. 11, No. 4. P. L11–L16.
 19. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 291 с.
 20. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. М.: Наука, 1975. 302 с.
 21. Лаврентьев М.М. Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: НГУ, 1973. 71 с.

22. Леонов А.С. О квазиоптимальном выборе параметра регуляризации в методе Лаврентьева // Сибирский математический журнал. 1993. Т. 4, № 4. С. 695–703.
-

DOI: 10.14529/cmse160302

METHOD FOR SOLVING AN INVERSE TERM SOURCE PROBLEM BASED ON THE LAPLACE TRANSFORM

© 2016 N.M. Yaparova

South Ural State University (pr. Lenina 76, Chelyabinsk, 454080 Russia)

E-mail: ddjy@math.susu.ac.ru

Received: 09.08.2016

In this contribution, the method for solving the inverse source problem for parabolic partial differential equations with Dirichlet and Neumann boundary conditions is proposed. We reduce this problem to solving Volterra integral equation of the first kind via applications of the Laplace transforms. Then we use the regularization technique for numerical solving for the obtained equation. The integral equation describe the explicit dependence of the unknown source term on the Neumann boundary condition. The proposed approach allows to eliminate the unstable inverse Laplace transform from numerical scheme and simplify the computational procedure provided the basis to develop method for solving an inverse source problem. This approach to solving the inverse source problem is used for the first time. The efficiency of method and accuracy of the numerical solutions were evaluated by means of computational experiment.

Keywords: inverse source problem, Laplace transform, Volterra integral equation, numerical method

FOR CITATION

Yaparova N.M. Method for Solving an Inverse Term Source Problem Based on the Laplace Transform. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 3. pp. 20–35. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160302.

References

1. Alifanov O.M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse Heat Transfer Problems]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 280 p.
2. Erdogan A.S., Sazaklioglu A.U. A Note on the Numerical Solution of an Identification Problem for Observing Two-Phase Flow in Capillaries. *Mathematical Method in the Applied Sciences*. 2014. vol. 37, no. 16. pp. 2393–2405. DOI: 10.1002/mma.2985.
3. Zenkour A.M., Abouelregal A.E. Vibration of FG Nanobeams Induced by Sinusoidal Pulse-Heating via a Nonlocal Thermoelastic Model. *ACTA Mechanica*. 2014. vol. 225, no. 12. pp. 3409–3421. DOI: 10.1007/s00707-014-1146-9.
4. Vabishchevich P.N. Numerical Solution of the Problem Identifying the Right Part a Parabolic Equation. *Izvestiya vuzov. Seriya: Matematika* [Russian Mathematics]. 2003. vol. 47, no. 1. pp. 27–35. (in Russian)
5. Gol'dman N.L. Uniqueness of Determination of a Source Function in a Quasilinear Inverse Stefan Problem with Final Observation. *Doklady RAN* [Doklady Mathematics]. 2012. vol. 444, no. 6. pp. 597–601. (in Russian) DOI: 10.1134/s1064562412030337.

6. Prilepko A.I., Tkachenko D.S. Well-Posedness of the Inverse Source Problem for Parabolic Systems. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations]. 2004. vol. 40, no. 11. pp. 1619–1626. (in Russian) DOI: 10.1007/s10625-005-0080-y.
7. Cherepanova O.N., Shipina T.N. On a Problem of Identification of the Source Function in the Parabolic Equation. *Zhurnal Severnogo Federal'nogo Universiteta, Seriya: Matematika i fizika* [J. Noth. Federal Univ]. 2009. vol. 2, no. 3. pp. 370–375. (in Russian)
8. Hasanov A., Pektas B. Identification of an Unknown Time-Dependent Heat Source Term from Overspecified Dirichlet Boundary Data by Conjugate Gradient Method. *Computers and Mathematics with Applications*. 2013. vol. 65, no. 1. pp. 42–57. DOI: 10.1016/j.camwa.2012.10.009.
9. Cialkowski M., Grysa K. A Sequential and Global Method of Solving an Inverse Problem of Heat Conduction Equation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 2010. vol. 48, no. 1. pp. 111–134.
10. Monde M., Arima H., Liu W., Mitutake Y., Hammad J.A. An Analytical Solution for Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problems Using Laplace Transform. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2003. vol. 46. pp. 2135–2148. DOI: 10.1016/s0017-9310(02)00510-0.
11. Yaparova N.M. A Method for Solving the Inverse Problem of Identifying the Source Function for System with Distributed Parameters. *Vestnik tambovskogo universiteta. Seriya "Estestvennye i tekhnicheskie nauki"* [Tambov university reports. Series: Natural and Technical Sciences]. 2015. vol. 20, no. 5. pp. 1549–1552. (in Russian)
12. Solodusha S.V., Yaparova N.M. Numerical Solving an Inverse Boundary Problem of Heat Conduction Using Volterra Equations of the First Kind. *Sibirskiy zhurnal vychislitel'noy matematiki* [Numerical Analysis and Applications]. 2015. vol. 8, no. 3. pp. 267–274. (in Russian) DOI: 10.1134/s1995423915030076.
13. Yaparova N. Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2014. vol. 22, no. 5. pp. 832–847. DOI: 10.1080/17415977.2013.830614.
14. Apartsyn A.S., Bakushinskii A.B. Approximate Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind by the Quadratures Method. *Differentsialnye i integralnye uravneniya* [Differential and Integral Equations]. 1972. vol. 1. pp. 248–258. (in Russian)
15. Vasin V.V., Serezhnikova T.I. A Regularizing Algorithm for Approximation of a Non-Smooth Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational Technologies]. 2010. vol. 15, no. 2. pp. 15–23. (in Russian)
16. Kabanikhin S.I. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and Ill-Posed Problems. Theory and Applications]. De Gruyter, Germany. 2011. 457 p. DOI: 10.1515/9783110224016.
17. Korolev Yu.M., Yagola A.G. Error Estimation in Linear Inverse Problems with Prior Information. *Vychislitel'ny metody i programmirovaniye: novye vychislitel'nye tekhnologii* [Numerical Methods and Programming]. 2012. vol. 13, no. 1(25). pp. 14–18. (in Russian)
18. Bushuev I. Global Uniqueness for Inverse Parabolic Problems with Final Observation. *Inverse Problems*. 1995. vol. 11, no. 4. pp. L11–L16. DOI: 10.1088/0266-5611/11/4/001.

19. Doetsch G. *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasy i Zpreobrazovaniy* [Guide to the Applications of the Laplace and Z Transforms]. Moscow, Nauka, 1971. 291 p.
20. Krasnov M.L. *Integralnye uravneniya vvedenie v teoriyu* [Integral Equations. Introduction to the Theory]. Moscow, Nauka, 1975. 302 p.
21. Lavrentiev M.M. *Uslovno korrektnye zadachi dlya differentsialnykh uravnenij* [Conditionally Correct Problems for Differential Equations]. Novosibirsk, Publishing of Novosibirsk Government University, 1973. 71 p.
22. Leonov A.S. On Quasioptimum Selection of the Regularization Parameter in M.M. Lavreny'ev's Method. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal]. 1993. vol. 34, no. 4. pp. 695–703. (in Russian) DOI: 10.1007/bf00975172.