

# О ПОСТРОЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО-МОДИФИЦИРОВАННЫХ КВАЗИСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТОК И РЕШЕНИИ НА НИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ С КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2017 г. А.Н. Козырев, В.М. Свешников

*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН*

*(630090 Новосибирск, пр. Акад. Лаврентьева, д. 6)*

*E-mail: kozyrev@inbox.ru, victor@lapasrv.ssc.ru*

Поступила в редакцию: 01.05.2017

Разработаны новые подходы к локальной модификации квазиструктурированных сеток, которые позволяют отследить неоднородности краевой задачи в расчетной области и адаптивны к криволинейным границам, а также просты в использовании и не требуют хранения большого объема данных, как это необходимо в неструктурированных сетках. Такие сетки предлагается использовать для эффективного моделирования широкого класса электрофизических приборов. Экспериментально показана необходимость локальной модификации прямоугольных сеток при расчетах в областях с криволинейной границей. Разработаны двухшаговые алгоритмы локальной модификации рассматриваемых квазиструктурированных сеток. На первом шаге проводится модификация приграничных узлов путем их сдвига на границу области по нормали к ней, а на втором – преобразование тех сеточных элементов, которые не удовлетворяют критериям качества, в качественные сеточные элементы. Разработаны специальные алгоритмы проведения таких преобразований, которые не нарушают структурированности подсеток в подобластях. Даны рекомендации по построению сеток на границах сопряжения подобластей (интерфейсе), которые содержат несогласованные сетки. Разработаны алгоритмы локальной модификации сеток на интерфейсе между подобластями, одна из которых содержит отрезок границы расчетной области. Проведены серии численных экспериментов по решению модельной задачи, результаты которых показали обоснованность предлагаемых подходов.

*Ключевые слова: квазиструктурированные сетки, локальная модификация, метод декомпозиции, задачи сильноточной электроники*

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Козырев А.Н., Свешников В.М. О построении двумерных локально-модифицированных квазиструктурированных сеток и решении на них краевых задач в областях с криволинейной границей // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2017. Т. 6, № 2. С. 05–21. DOI: 10.14529/cmse170201.

## Введение

В работе [1] были намечены основные принципы построения квазиструктурированных сеток для решения задач сильноточной электроники [2], состоящих в расчете интенсивных пучков заряженных частиц, движущихся в электромагнитных полях. Преимущественная ориентация на данные задачи сохраняется и в настоящей работе. Важную роль в них играет расчет потенциала электрического поля в разномасштабных областях с криволинейной границей, приводящий к решению уравнения Пуассона. Рассматриваемые квазиструктурированные сетки являются адаптивными. Настройка внутренних подсеток, входящих в квазиструктурированные сетки, осуществляется путем регулировки плотности узлов в них, а подсетки вблизи криволинейных границ требуют специаль-

ного рассмотрения, что и делается в настоящей статье. Основой построения служат прямоугольные подсетки. Прямоугольные сетки плохо приближают решение вблизи криволинейных границ, что, в частности, следует из численных экспериментов, проведенных в настоящей работе. В связи с этим, осуществляется их локальная модификация, основные принципы которой были заложены в [1], а здесь существенно доработаны. Кроме того, разработаны критерии построения сеток на границе сопряжения подобластей (интерфейсе). Основой проверки качества построенных сеток служили результаты численных экспериментов по решению модельных задач в областях с криволинейными границами, имеющие аналитическое решение.

В настоящее время существует несколько способов построения адаптивных неструктурированных сеток: дифференциальные [3], в которых координаты узлов определяются путем решения дифференциальных уравнений в частных производных, алгебраические, в которых координаты узлов вычисляются из алгебраических соотношений [4], вариационные, основанные на минимизации функционала качества сеток [5, 6]. Мы не рассматриваем здесь неструктурированные сетки, так как решение задач сильноточной электроники на них чрезвычайно трудоемко. Дело в том, что при наличии большого числа заряженных частиц на первый план выходит задача, которая скрыта при формулировке численного алгоритма, а именно задача определения сеточного элемента, которому принадлежит заданная точка. Наиболее просто и эффективно она решается на структурированных прямоугольных сетках. Структурированные адаптивные сетки для сложных расчетных областей рассматривались в работе [7], но такие сетки содержат большое число непрямоугольных элементов, что негативно скажется на решении задач сильноточной электроники.

Локальная модификация прямоугольных сеток наиболее полно подходит для поставленных целей, так как непрямоугольные шаблоны строятся лишь в узкой полосе вблизи криволинейных границ, а большинство шаблонов внутри области, где проходит пучок заряженных частиц, остаются прямоугольными. Идея локальной модификации была изложена в работе [8]. Свое развитие она получила в работах [9, 10], включая реализацию в программах для решения задач сильноточной электроники. В [11] рассматривалась локальная модификация прямоугольных сеток, но для ликвидации некачественных сеточных элементов добавлялись узлы, нарушающие структурированность сеток. Общим недостатком работ по локальной модификации структурированных сеток является отсутствие эффективных средств локальной регулировки плотности узлов в подобласти прохождения пучка. Все это навело на мысль о разработке квазиструктурированных локально модифицированных сеток, состоящих из прямоугольных подсеток, которые адаптируются к внешней границе путем локальной модификации и к пучку заряженных частиц путем регулировки плотности узлов подсеток. Квазиструктурированные сетки с подсетками различных типов рассматривались в работе [12]. Их основным недостатком являлось то, что подсетки должны быть согласованными, что приводило к введению большого количества вспомогательных подобластей, чтобы удовлетворить требованию согласованности. Предлагаемые в настоящей работе сетки могут быть несогласованными. Сшивка решений краевых подзадач на несогласованных подсетках осуществляется при помощи метода декомпозиции, основанном на прямой аппроксимации уравнения Пуанкаре—Стеклова на интерфейсе [13].

В разделе 1 настоящей работы приводится постановка задачи и кратко излагаются алгоритмы ее решения. Раздел 2 содержит описание алгоритмов локальной модификации. В разделе 3 приводятся результаты численных экспериментов на согласованных и несогласованных сетках. В заключении кратко излагаются полученные результаты и перспективы дальнейших исследований.

## 1. Постановка задачи и алгоритмы ее решения

Придерживаясь ориентации на задачи сильноточной электроники, сосредоточим внимание на влиянии криволинейных границ на расчет потенциала электрического поля. Для этих целей рассмотрим следующую задачу.

Пусть в замкнутой двумерной (плоской или осесимметричной, допускающей двумерную постановку) области  $\bar{G} = G \cup \Gamma$  с границей  $\Gamma$  требуется решить краевую задачу для уравнения Пуассона

$$\Delta u = g_1, \quad lu|_{\Gamma} = g_2. \quad (1)$$

Здесь  $u = u(x, y)$  — искомая функция,  $g_1 = g_1(x, y)$ ,  $g_2 = g_2(x, y)$  — заданные функции, где  $x, y$  — декартовы или цилиндрические координаты, причем в последнем случае  $x = r, y = z$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $l$  — оператор граничных условий, включающих условия Дирихле или Неймана. Будем предполагать без существенного ограничения общности, что  $\Gamma$  является кусочно-гладкой границей, состоящей из отрезков прямых и дуг окружностей, и условие Неймана задано на отрезках прямых, параллельных координатным осям. Такие условия могут быть поставлены при расчете электрофизических процессов, причем условия Дирихле ставятся на электродах, а условия Неймана — на линиях симметрии. Отметим, что задача Неймана (без границ с условиями Дирихле) не входит в рассмотрение, а задача Дирихле (без границ с условиями Неймана) допускается.

Опишем вокруг расчетной области прямоугольник  $\bar{R} = \{0 \leq x \leq D_x, 0 \leq y \leq D_y\}$ , где  $D_x, D_y$  — заданы, ( $\bar{G} \subset \bar{R}$ ), в котором построим прямоугольную равномерную макросетку

$$\bar{\Omega}_H = \left\{ X_I = IH_x, Y_J = JH_y, I = \overline{0, N_x}, J = \overline{0, N_y}, H_x = \frac{D_x}{N_x}, H_y = \frac{D_y}{N_y} \right\},$$

где  $N_x, N_y$  — заданные целые числа, с шагами  $H_x, H_y \gg h$  ( $h$  — максимальный шаг сетки, на которой аппроксимируется задача (1)). Фактически мы тем самым проводим декомпозицию  $G$  на подобласти  $G_{I,J}$ . Среди них будем различать  $G_{I,J}^{(0)}$  — внешние,  $G_{I,J}^{(1)}$  — внутренние,  $G_{I,J}^{(2)}$  — граничные подобласти, которые соответственно не содержат точек  $G$ , содержат только точки  $G$ , содержат точки  $G$  и  $\Gamma$ . Точки пересечения координатных линий  $x = X_I, y = Y_J$  макросетки являются макроузлами, которые обозначим как  $T_p, p = \overline{1, P}$ , где  $P$  — число макроузлов, а отрезки координатных линий, принадлежащие расчетной области, образуют границу сопряжения подобластей  $\gamma$  или интерфейс.

В замкнутых подобластях  $\bar{G}_{I,J}^{(1)}, \bar{G}_{I,J}^{(2)}$  построим равномерные прямоугольные подсетки

$$\bar{\Omega}_{h,k} = \left\{ x_{i_k} = X_I + i_k h_{x,k}, y_{j_k} = Y_J + j_k h_{y,k}, i_k = \overline{0, n_{x,k}}, j_k = \overline{0, n_{y,k}} \right\}$$

с шагами  $h_{x,k} = \frac{X_{l+1} - X_l}{n_{x,k}}$ ,  $h_{y,k} = \frac{Y_{j+1} - Y_j}{n_{y,k}}$ . Здесь введена единая нумерация подобластей и подсеток по индексу  $k = \overline{1, K}$ , где  $K$  — известное целое число. Допускаются несогласованные подсетки, то есть шаги в смежных подсетках могут быть разными. Будем предполагать без существенного ограничения общности, что  $n_{x,k}$ ,  $n_{y,k}$  — есть 2 в целой степени и шаги в смежных несогласованных подсетках отличаются в два раза. По аналогии с подобластями будем различать подсетки двух типов *внутренние*  $\overline{\Omega}_{h,k}^{(1)}$  и *граничные*  $\overline{\Omega}_{h,k}^{(2)}$ .

Граничные подсетки  $\overline{\Omega}_{h,k}^{(2)}$  подвергаются локальной модификации, состоящей в сдвиге приграничных узлов на границу  $\Gamma$ , в результате которой они преобразуются в подсетки  $\overline{\Omega}_{h,k}^{(2,m)}$ . Локальная модификация узлов сетки на интерфейсе может затронуть и внутренние подсетки  $\overline{\Omega}_{h,k}^{(1)}$ , соседствующие с  $\overline{\Omega}_{h,k}^{(2,m)}$ , в результате чего они преобразуются в подсетки  $\overline{\Omega}_{h,k}^{(1,m)}$ .

На границе сопряжения введем сетку  $\omega_h$ , не содержащую макроузлы  $T_p$ :  $\omega_h = \{(x_i, y_i) \in \gamma, (x_i, y_i) \neq T_p, i = \overline{1, M}\}$ , где  $M$  — известное целое число. Дополнив  $\omega_h$  макроузлами  $T_p$ , образуем сетку  $\overline{\omega}_h = \{\omega_h, T_1, T_2, \dots, T_p\}$ . Объединение подсеток  $\overline{\Omega}_{h,k}^{(1,m)}$ ,  $\overline{\Omega}_{h,k}^{(2,m)}$  и  $\overline{\omega}_h$  образует результирующую квазиструктурированную сетку  $\overline{\Omega}_h$ , на которой решается краевая задача (1).

Решение исходной краевой задачи (1) проводится методом декомпозиции расчетной области на подобласти, сопрягаемые без наложения. Сшивка решений в под областях осуществляется путем решения уравнения Пуанкаре—Стеклова

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)_\gamma^{(+)} - \left( \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \right)_\gamma^{(-)} = 0 \quad (2)$$

на интерфейсе  $\gamma$ , где  $\vec{n}$  — нормаль к  $\gamma$ , а знаки  $+, -$  указывают на принадлежность объекта разным сторонам интерфейса. Для его решения строится внешний итерационный процесс по отысканию приближенных значений искомой функции на интерфейсе, которые мы обозначим через  $v_h$ . Внешним данный процесс назван потому, что на каждой его итерации внутренним итерационным методом находят приближенные значения искомой функции  $u_h$  в под областях. В узлах сетки  $\omega_h$  уравнение (2) аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений [13]

$$Av_h + b = 0,$$

где  $A = \{a_{i,j}, i, j = \overline{1, M}\}$  — квадратная матрица,  $b = \{b_i, i = \overline{1, M}\}$  — известный, а  $v_h = \{v_{h,i}, i = \overline{1, M}\}$  — искомый векторы. Решение данной системы осуществляется итерационным методом вида

$$v_h^{(\eta+1)} = \Lambda(v_h^{(\eta)}, Av_h^{(\eta)}), \quad \eta = 0, 1, \dots \quad (3)$$

где  $\Lambda$  — функция, определяющая конкретный алгоритм. Смысл формулы (3) заключается в том, что в данном итерационном процессе используются лишь сам вектор  $v_h^{(\eta)}$  и действие  $Av_h^{(\eta)}$  матрицы на вектор (здесь вместо  $v_h$  может быть какой-либо другой

вспомогательный вектор). Этим требованиям удовлетворяет, например, семейство быстросходящихся итерационных методов в подпространствах Крылова [14], примерами которых могут служить метод сопряженных градиентов, метод сопряженных невязок, метод обобщенных минимальных невязок.

Вычисление произведений  $Av_h^{(\eta)}$ , как показано в [13], реализуется по формуле

$$Av_h^{(\eta)} = f_h^{(\eta)} - b,$$

где компоненты  $f_{h,i}^{(\eta)}$  вектора  $f_h^{(\eta)}$  определяются как

$$f_{h,i} = (d_h^{(+)}u_h^{(+)})_i - (d_h^{(-)}u_h^{(-)})_i, \quad i = \overline{1, M}. \quad (4)$$

Здесь  $d_h^{(+)}, d_h^{(-)} = d_h$  — операторы аппроксимации нормальных производных, входящих в уравнение Пуанкаре—Стеклова (2), то есть

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \right)_h \approx d_h u_h. \quad (5)$$

Для вычисления вектора  $b$  функция  $v_h$  на интерфейсе полагается равной нулю, решаются краевые подзадачи в подобластях, вычисляются разности производных (4) в узлах сетки  $\omega_h$  на интерфейсе, которые и являются компонентами вектора  $b$ .

Сходимость итерационного процесса (3) считается достигнутой, если норма невязки  $\|f_h^{(\eta)}\| = \max |f_{h,i}^{(\eta)}|$  удовлетворяет неравенству  $\|f_h^{(\eta)}\| \leq \delta$ , где  $\delta$  — заданная малая величина.

Дополнив  $v_h$  значениями в макроузлах  $T_p$ , получим вектор  $\bar{v}_h$ , определенный на сетке  $\bar{\omega}_h$ . Компоненты данного вектора в макроузлах определяются из уравнений

$$(\Delta_h^{(p)} \bar{v}_h)_j = 0 \quad j = \overline{M+1, M+P}, \quad (6)$$

где  $\Delta_h^{(p)}$  — аппроксимация оператора Лапласа на сеточном шаблоне, включающем узлы сетки  $\omega_h$ , значения функции в которых предполагаются известными на текущей  $\eta$ -ой итерации (3), и один из макроузлов.

В целом решение краевой задачи (1) можно представить в виде последовательности следующих шагов.

Шаг 1. Задается начальное приближение  $\bar{v}_h^{(0)}$  в узлах сетки  $\bar{\omega}_h$ .

Шаг 2. Во внутренних и граничных подобластях на сетках  $\bar{\Omega}_{h,k}^{(1,m)}, \bar{\Omega}_{h,k}^{(2,m)}$  методом конечных объемов решаются краевые подзадачи, причем на отрезках интерфейса ставятся граничные условия Дирихле, определяемые по значениям  $\bar{v}_h^{(\eta)}$ .

Шаг 3. Рассчитываются разности производных по формулам (4).

Шаг 4. Делается очередной  $(\eta + 1)$ -ый шаг по решению уравнения Пуанкаре—Стеклова при помощи итерационного процесса (3), в результате чего находятся значения  $v_h^{(\eta+1)}$  в узлах сетки  $\omega_h$  (без макроузлов).

Шаг 5. Из формулы (6) находятся значения искомой функции на текущей внешней итерации в макроузлах, что дает  $\bar{v}_h^{(\eta+1)}$ .

Шаг 6. Если сходимость внешнего итерационного процесса (3) достигнута, то считается, что приближенное решение исходной задачи получено, если же это не так, то повторяются шаги 2–5.

## 2. Модификация подсеток вблизи границ

Как уже отмечалось, настоящая статья содержит развитие работы [1] в части локальной модификации квазиструктурированных сеток. Основные требования, которым должны соответствовать построенные в настоящей работе сетки, были следующими: 1) сохранение структурированности подсеток, 2) соблюдение порядка точности решения на квазиструктурированных сетках.

### 2.1. Модификация внутренних приграничных узлов

Локальной модификации подвергаются подсетки  $\bar{\Omega}_{h,k}$  путем сдвига узлов, отстоящих от границы на расстояние

$$\delta \leq \frac{h}{2} \quad (7)$$

где  $h$  — шаг подсетки, на границу области.

При проведении локальной модификации подсеток помимо сохранения структурированности подсеток мы будем стремиться к построению сеточных шаблонов, удовлетворяющих условию Делоне [15]. Для этого достаточно построения нетупоугольных сеточных элементов.

Локальная модификация осуществляется в два этапа. На первом из них узлы, удовлетворяющие условию (7), сдвигаются на границу по нормали к ней. Прямоугольный шаблон при этом может трансформироваться как в треугольный, так и в произвольный четырехугольный шаблон, который кратчайшей диагональю разбивается на два треугольника. В результате не исключено появление тупоугольных треугольников. Для их ликвидации (второй этап) поступаем следующим образом.

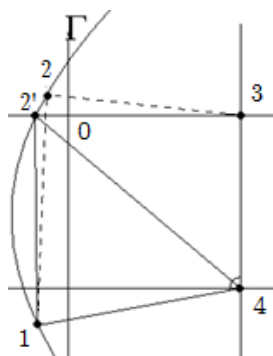


Рис. 1. Два тупых угла на одной стороне четырехугольного элемента

На рис. 1 изображена ситуация, при которой появляются тупоугольные треугольники из-за наличия двух тупых углов на одной стороне четырехугольного шаблона (на рис. 1 это сторона 34). Их ликвидация осуществляется по следующим правилам, приведенным в работе [1]. Меньший тупой угол 234 заменяется прямым 2'34. Это фактически означает модификацию сетки в данной окрестности не по нормали, а вдоль координатной линии, то есть вместо сдвига 02 применяется сдвиг 02'. Если же два тупых угла появляются на стороне, примыкающей к  $\Gamma$ , то аналогичная процедура сдвига вдоль координатных линий применяется к обоим узлам.

Рассмотрим два варианта устранения тупых углов в треугольных элементах, которые предлагаются в настоящей работе (алгоритмы, приведенные в [1] не давали требуемой точности).

Вариант 1 наиболее простой. Он изображен на рис. 2, где угол  $123$  тупой. Биссектрисой  $24$ , проведенной до пересечения с границей  $\Gamma$ , разобьем его на два остроугольных треугольника  $124$  и  $423$  (пунктиром здесь и на рис. 3 изображены вспомогательные линии). Появление точки  $4$  не влияет на структурированность сетки. Дело в том, что по предположению на рассматриваемом криволинейном куске границы  $\Gamma$  должно быть задано условие Дирихле, которое учитывается при построении сеточного уравнения в узле  $2$ . В результате точка  $4$  исключается из расчетов, то есть данная процедура разбиения выполняется только при расчете коэффициентов сеточных уравнений.

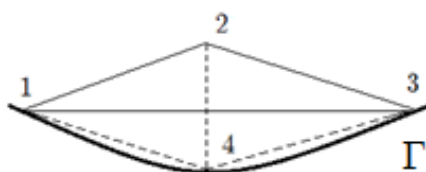


Рис. 2. Вариант 1 тупоугольных треугольников

Вариант 2 показан на рис. 3, где угол  $236$  тупой. В этом случае применить предыдущую процедуру нельзя, так как в результате разбиения получатся также тупоугольные треугольники, поэтому поступим следующим образом. Из точки  $3$  продолжим линию сетки до пересечения с границей  $\Gamma$  в точке  $1$ . Получим два элемента: 1)  $136$  прямоугольный треугольник и 2)  $24531$  пятиугольник. Последний разобьем линиями  $51$  и  $52$  на прямоугольные треугольники  $153$ ,  $245$  и остроугольный треугольник  $251$ . Так же, как в предыдущем варианте, точка  $1$  является вспомогательной. Она не нарушает структурированности сеток, так как исключается из сеточных уравнений в узлах  $3$  и  $5$  за счет учета граничных условий.

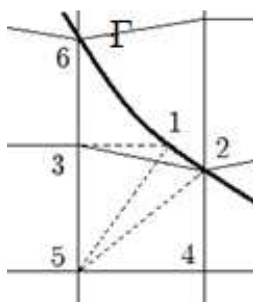


Рис. 3. Вариант 2 тупоугольных треугольников

## 2.2. Построение сетки на интерфейсе и аппроксимация уравнения Пуанкаре—Стеклова

Предлагается следующий способ построения сетки  $\omega_h$  на интерфейсе  $\gamma$ . На рис. 4 изображено два возможных варианта сопряжения смежных подсеток  $\bar{\Omega}_{h,+}$  и  $\bar{\Omega}_{h,-}$ : слева согласованные подсетки, справа — несогласованные подсетки.

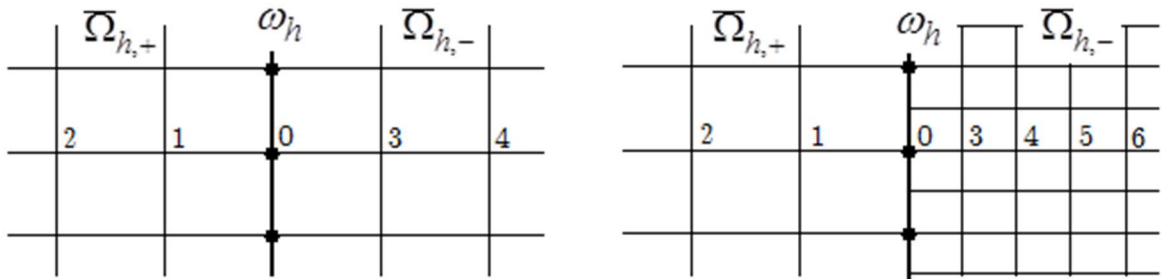


Рис. 4. Построение сетки  $\omega_h$  на интерфейсе

Для согласованных подсеток предлагается в сетку  $\omega_h$  включать узлы подсеток  $\bar{\Omega}_{h,+}$  и  $\bar{\Omega}_{h,-}$ , лежащие на  $\gamma$  (на рис. 4 это выделенные узлы). В случае несогласованных подсеток, если следовать этой же технологии, возникает вопрос: узлы какой подсетки включать в  $\omega_h$  — густой или редкой? Ответ на него дали результаты численных экспериментов по решению задачи, приведенной ниже в п.3, которые показали, что достаточно включить в  $\omega_h$  узлы редкой подсетки, так как включение узлов густой подсетки не увеличивает точности расчетов. Это обстоятельство позволяет обойтись малым числом уравнений, аппроксимирующих уравнение Пуанкаре—Стеклова, что положительно сказывается на времени решения задачи в целом.

Операторами  $d_h^{(+)}$ ,  $d_h^{(-)}$  аппроксимирующими нормальные производные (5) в уравнении Пуанкаре—Стеклова, служили трехточечные схемы второго порядка, которые для соседних равноотстоящих с шагами  $h_+$ ,  $h_-$  узлов, обозначенных цифрами 0, 1, 2, и 0, 3, 4, имеют вид

$$(d_h^{(+)}u_h)_0 = \frac{3(u_h)_0 - 4(u_h)_1 + (u_h)_2}{2h_+}, \quad (d_h^{(-)}u_h)_0 = \frac{-3(u_h)_0 + 4(u_h)_3 - (u_h)_4}{2h_-}. \quad (8)$$

Применение данных формул для смежных внутренних согласованных подсеток при  $h_+ = h_- = h$  не вызывает затруднений. Иначе обстоит дело, во-первых, с несогласованными внутренними подсетками и, во-вторых, с граничными подсетками.

Рассмотрим случай несогласованных внутренних подсеток, изображенный справа на рис. 4. Непосредственное применение формул (8) приводит к тому, что берутся неравные шаги: шаг  $h_+$  в подсетке  $\bar{\Omega}_{h,+}$  и шаг  $h_-$  в подсетке  $\bar{\Omega}_{h,-}$ , а также соответственно узлы 0, 1, 2 и 0, 3, 4. Численные эксперименты, проведенные с такой аппроксимацией производных с различными шагами, не дали удовлетворительной точности (см. табл. 4 в п.3). Тогда было решено взять при вычислении производных в  $\bar{\Omega}_{h,+}$  шаг  $h_+$  и узлы 0, 4, 6, то есть провести расчеты производных с одним и тем же шагом  $h_+$  в разных подобластях  $\bar{\Omega}_{h,+}$  и  $\bar{\Omega}_{h,-}$ . В этом случае точность расчетов повысилась, что показано в табл. 4. Объяснение этому следующее. Непосредственным разложением в ряд Тейлора можно убедиться в том, что

$$u'_\pm(0) = (d_h^{(\pm)}u)_0 + r_\pm(0),$$

где остаточный член  $r_\pm(0)$  равен

$$r_\pm(0) = \frac{1}{3}u'''(0)h_\pm^2 + O(h^3).$$

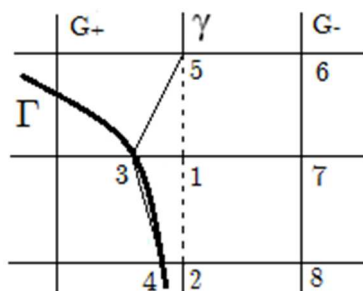


Здесь штрихи означают производные по нормали, а  $h = \max(h_+, h_-)$ . Тогда для разностей производных справедливы соотношения

$$f(0) = u'_+(0) - u'_-(0) = (d_h^{(+)}u)_0 - (d_h^{(-)}u)_0 + \frac{1}{3}(h_+^2 - h_-^2) + O(h^3).$$

Отсюда следует, что при равных шагах  $h_+ = h_-$  разность производных имеет на порядок выше точность, чем в случае неравных шагов.

Перейдем теперь к рассмотрению граничных подсеток. В работе [1] узлы сетки  $\bar{\omega}_h$  на интерфейсе не подвергались модификации. Это могло привести к тому, что в приграничных узлах интерфейса  $\gamma$  между граничной подобластью  $G_+$  и внутренней подобластью  $G_-$  на рис. 5, например, в узле 1 производная (5) в уравнении Пуанкаре—Стеклова аппроксимировалась по двум точкам 1 и 3 с первым порядком точности. Как показали численные эксперименты, тогда и решение имело первый порядок. Для повышения порядка точности было предложено проводить локальную модификацию узлов интерфейса путем их сдвига вдоль координатных линий на границу, что отражается на смежной подсетке в подобласти  $G_-$ , не являющейся граничной (не содержащей внешнюю границу). То есть узел 1 предлагается сдвинуть в точку 3, тогда в нем уже не решается уравнение Пуанкаре—Стеклова, так как он становится граничным. При этом ставится ограничение: смежные подсетки, имеющие интерфейс вблизи внешней границы



должны быть согласованными. Такая модификация, как следует из результатов численных экспериментов, приведенных ниже, повышает порядок точности до второго.

Рис. 5. Модификация узлов интерфейса вблизи внешней границы

### 3. Численные эксперименты

Основным критерием оценки качества построенных сеток служат результаты численных экспериментов по решению следующей модельной краевой задачи. В цилиндрическом конденсаторе, ограниченном двумя концентрическими окружностями с радиусами  $R_1 = 0,1$  и  $R_2 = 1$  с заданными на них потенциалами  $g(R_1) = 1$ ,  $g(R_2) = 2$  требуется рассчитать электрическое поле, то есть найти решение задачи (1). Ее аналитическое решение есть

$$u(r) = \ln^{-1} \frac{R_2}{R_1} \ln \frac{rR_2}{R_1^2}. \quad (9)$$

Численное решение данной задачи проводилось в двумерной постановке в декартовых координатах. Постановка рассматриваемой задачи во всей области была сделана с целью контроля симметрии сетки и значений функции. Симметрия была подтверждена экспериментально. Кроме того, с целью выяснения влияния условия Неймана на точ-

ность данная задача рассматривалась для четверти области, ограниченной линиями  $x=0$  и  $y=0$ , на которых задавалось условие симметрии  $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ . Результаты численных экспериментов показали, что условие симметрии не оказывает существенного влияния на точность.

Поставленная выше задача решалась как на согласованных, так и на несогласованных квазиструктурированных сетках. Принципы построения несогласованных сеток были следующими. Как видно из (9), рассматриваемая задача имеет особенность при  $r \rightarrow 0$ . В связи с этим, в граничных подобластях, содержащих границу с меньшим радиусом  $R_1$ , строились более густые подсетки, имеющие шаг в 2 раза меньший, чем шаг в остальных подобластях. Макросетка и подсетки были квадратными, имеющие параметры:  $N_x = N_y = N$ ,  $n_{x,k} = n_{y,k} = n$  — для согласованных подсеток и  $n_{x,k}^{(1)} = n_{y,k}^{(1)} = n_1$ ,  $n_{x,k}^{(2)} = n_{y,k}^{(2)} = n_2$  — для несогласованных подсеток. Конкретные значения параметров приводятся в нижеследующих таблицах. Краевая задача (1) аппроксимировалась на пятиточечных шаблонах в регулярных узлах и, в общем случае, на девятиточечных шаблонах в локально модифицированных узлах со вторым порядком точности. В численных экспериментах подсчитывалась максимальная относительная погрешность  $\varepsilon$  по формуле

$$\varepsilon = \max_{i,j \in \Omega_h} \left| \frac{u_{i,j} - (u_h)_{i,j}}{u_{i,j}} \right|. \quad (10)$$

Расчеты проводились при помощи пакета прикладных программ ЭРА-DD [16]. Каждая серия численных экспериментов была направлена на решение конкретного вопроса, которому ниже посвящается отдельный пункт.

### 3.1. Необходимость локальной модификации

Для ответа на вопрос о необходимости локальной модификации были проведены эксперименты по решению поставленной выше модельной задачи на равномерной квадратной сетке (простейший вариант квазиструктурированной сетки). Сетка не подвергалась модификации. Граничные условия Дирихле учитывались в точках пересечения координатных линий сетки с границей, что приводило к появлению сеточных шаблонов с неравномерными шагами.

Результаты расчетов на различных сетках при  $R_1 = 0,1$  приведены в табл. 1, где  $\varepsilon$  — погрешность, вычисленная по формуле (10).

Таблица 1

Погрешности  $\varepsilon$  без локальной модификации

Сетка	32×32	64×64	128×128
$\varepsilon$	1,66	0,85	0,48

Из данной таблицы видно, что погрешность линейно, а не квадратично, как предсказывает теория [17], убывает с уменьшением шага сетки. Причина этого в появлении шаблонов с сильно неравномерными шагами, от которых необходимо избавляться. Этого мы достигаем при помощи локальной модификации приграничных узлов.

### 3.2. Численные эксперименты на согласованных сетках

Поставленная выше методическая задача решалась на согласованных сетках, которые подвергались локальной модификации по алгоритмам, изложенным выше. Расчеты проводились при различных параметрах  $N$  и  $n$  соответственно макросетки и подсеток, конкретные значения которых приведены в нижеследующих таблицах. На рис. 6 изображена сетка для  $N = 4, n = 8$ .

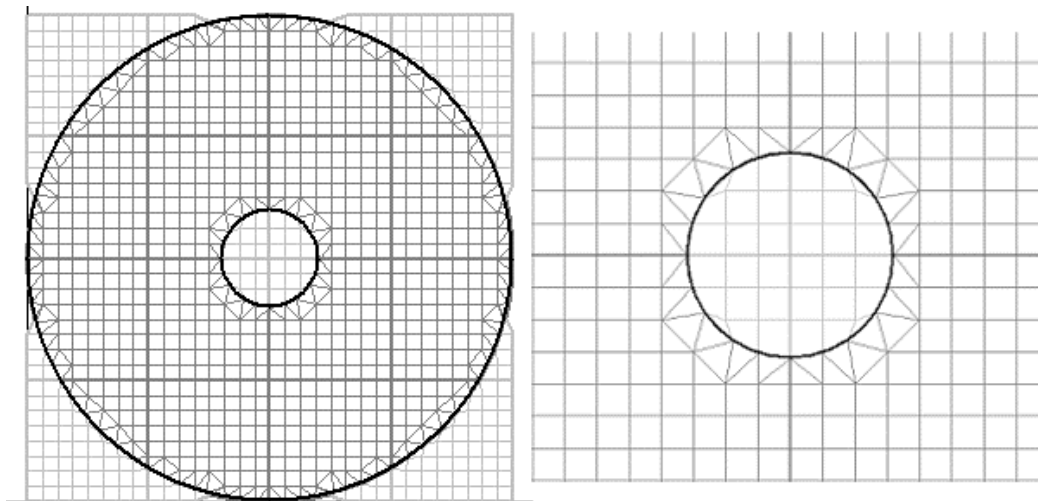


Рис. 6. Согласованная локально модифицированная сетка во всей области и вблизи границы

Кроме значения  $R_1 = 0,1$ , для выяснения характера влияния особенности проводились расчеты для  $R_1 = 0,2$ . Результаты расчетов приведены в табл. 2, причем верхние подстроки соответствуют  $R_1 = 0,1$ , а нижние —  $R_1 = 0,2$ .

Таблица 2

Погрешности  $\varepsilon$  расчетов на согласованных сетках с различными радиусами внутренней окружности

n \ N	4	8	16
8	9,88E-01	1,59E-01	3,91E-02
	2,13E-01	5,46E-02	1,24E-02
16	1,56E-01	3,51E-02	1,06E-02
	4,97E-02	1,49E-02	4,84E-03
32	3,52E-02	1,03E-02	3,29E-03
	1,45E-02	4,89E-03	1,36E-03
64	1,03E-02	3,27E-03	8,24E-04
	4,88E-03	1,36E-03	3,86E-04

Из табл. 2 можно сделать следующие выводы.

1. Погрешность с уменьшением шага сетки уменьшается приблизительно квадратично (особенно это заметно на густых сетках), что подтверждает второй порядок точности.
2. Сравнение результатов табл. 2, полученных с локальной модификацией, с результатами табл. 1, полученных без локальной модификации (надо сравнивать табл. 1 с

верхними подстроками первого столбца табл. 2), говорит о том, что в результате локальной модификации значительно (от 1,6 до 14 раз) повысилась точность расчетов.

- Сравнение результатов расчетов с различными радиусами говорит о том, что при удалении от особенности, как и следовало ожидать, точность расчетов увеличивается.

### 3.3. Расчеты на несогласованных сетках

Как уже отмечалось, для несогласованных смежных подсеток в сетку  $\omega_h$  включаются узлы редкой подсетки. Тогда на очередном шаге решения уравнения Пуанкаре—Стеклова граничные значения функции на интерфейсе для решения краевой подзадачи на смежной густой подсетке определяются интерполяцией. Были рассмотрены два метода интерполяции: 1) сплайновая кубическая интерполяция [18] и 2) линейная интерполяция, то есть в данном случае полусумма соседних значений. Для первого варианта результаты расчетов приведены в верхних подстроках табл. 3, а для второго – в нижних подстроках. Расчеты проводились на различных квазиструктурированных несогласованных сетках, параметры которых указаны в нижеследующих таблицах

**Таблица 3**

Погрешности  $\varepsilon$  расчетов на несогласованных сетках с различными вариантами интерполяции

$n_1-n_2 \backslash N$	4	8	16
8-16	1,57E-01	3,39E-02	1,05E-02
	0,20	0,23	9,14E-02
16-32	3,51E-02	1,03E-02	3,31E-03
	6,93E-02	8,84E-02	3,98E-02
32-64	1,03E-02	3,29E-03	8,31E-04
	2,84E-02	3,90E-02	1,88E-02

Сравнение результатов в подстроках данной таблице говорит о том, что погрешность линейной интерполяции оказывает негативное влияние на точность решения, а сплайновая интерполяция значительно повышает точность, поведение погрешности становится адекватным (соблюдается второй порядок точности).

Сравнение расчетов на несогласованных сетках (табл. 3) и расчетов на согласованных сетках (табл. 2) показывает хорошее совпадение результатов (сравниваются результаты верхних подстрок при  $n = n_2$ ). Этот факт говорит о преимуществах квазиструктурированных несогласованных сеток, которые сгущаются только в районе особенности. Действительно, согласованные сетки имеют значительно (почти до 4 раз) большее число узлов по сравнению с соответствующими несогласованными сетками для обеспечения той же точности. То есть, согласованные структурированные сетки содержат лишние узлы, которые необходимы только для поддержки структурированности, а для обеспечения требуемой точности достаточно использовать квазиструктурированные несогласованные сетки, содержащие значительно меньшее число узлов.

В табл. 4 приведены результаты решения задачи с двумя вариантами аппроксимации производных на границе сопряжения несогласованных подсеток: 1) с одинаковыми

шагами  $h_+ = h_-$ , 2) с различными шагами  $h_+ \neq h_-$ . В табл. 4 приведены значения погрешности для обоих вариантов (верхние подстроки – первый вариант, нижние – второй).

Из результатов данной таблицы следует, что расчеты с одинаковым шагом дают более высокую точность (особенно это заметно на густых сетках), что подтверждает теоретический вывод, приведенный в п. 2.2 настоящей работы.

**Таблица 4**  
Погрешности  $\varepsilon$  расчетов на границе сопряжения  
с различными вариантами аппроксимации производных

$n_1-n_2 \backslash N$	4	8	16
8-16	1.57E-01	3.39E-02	1.05E-02
	1.50E-01	4.68E-02	1.78E-02
16-32	3.51E-02	1.03E-02	3.31E-03
	3.62E-02	1.77E-02	5.20E-03
32-64	1.03E-02	3.29E-03	8.31E-04
	1.02E-02	5.28E-03	1.29E-03

## Заключение

В работе предлагаются новые способы построения квазиструктурированных локально-модифицированных сеток. Такие сетки ориентированы преимущественно на решение задач сильноточной электроники с интенсивными пучками заряженных частиц. Данные задачи характеризуются сложной конфигурацией внешних границ и неоднородностью пучка. Для адаптации сеток к внешним границам разработана локальная модификация, а адаптации сеток к неоднородностям пучка проводится путем регулировки плотности узлов подсеток в подобластях. Качество построенных сеток проверено на примерах решения модельной краевой задачи в области с криволинейными границами. Проведены серии численных экспериментов, которые показали, что погрешность решения убывает со вторым порядком при дроблении шага сетки, в то время как расчеты без локальной модификации демонстрируют только первый порядок. Исследованы вопросы о выборе сетки на интерфейсе, точности интерполяции и аппроксимации уравнения Пуанкаре—Стеклова при расчетах на несогласованных сетках. Показано преимущество квазиструктурированных сеток по сравнению с расчетами на структурированных согласованных сетках.

Дальнейшее направление исследований связано с улучшением качества квазиструктурированных сеток путем построения специальных треугольных подсеток в граничных подобластях, включающих сеточные элементы с криволинейными сторонами.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00168)*

## Литература

1. Свешников В.М., Беляев Д.О. Построение квазиструктурированных локально-модифицированных сеток для решения задач сильноточной электроники // Вестник

- ЮУрГУ. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2012. № 40(299). С. 130–140.
2. Сыровой В.А. Введение в теорию интенсивных пучков заряженных частиц. Москва: Энергоатомиздат. 2004. 522 с.
  3. Liseikin V.D. Grid generation methods. Berlin, Springer-Verlag, 1999. 363 p.
  4. Шокин Ю.И., Данаев Н.Т., Хакимзянов Г.С., Шокина Н.Ю. Лекции по разностным схемам на подвижных сетках. Часть 2. Алматы: Изд-во КазНУ. 2008. 184 с.
  5. Сидоров А.Ф. Об одном алгоритме расчета оптимальных разностных сеток // Труды математического института им. В.А. Стеклова. 1966. Т. 74. С. 147–151.
  6. Ушакова О.В. Алгоритм построения двумерных оптимальных адаптивных сеток // Математическое моделирование. 1997. Т. 9, № 2. С. 88–90.
  7. Анучина А.И., Артемова Н.А., Бронина Т.Н., Гордейчук В.А., Ушакова О.В. О разработке алгоритма построения сеток в конструкциях, образованных объемами вращения, в том числе и при их деформации // Тезисы докладов VIII Всероссийской конференции, посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова и Всероссийской молодежной школы-конференции (Абрау-Дюрсо, 5–10 сентября 2016 г.). Екатеринбург: Изд-во Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 2016. С. 7–9.
  8. Мацокин А.М. Автоматизация триангуляции областей с гладкой границей при решении уравнений эллиптического типа // Препринт. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1975. № 15. 15 с.
  9. Ильин В.П., Ицкович Е.А., Куклина Г.Я., Сандер И.А., Сандер С.А., Свешников В.М. Расчет электростатических полей на локально-модифицированных сетках // Вычислительные методы и технология решения задач математической физики. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1993. С. 63–72.
  10. Свешников В.М. Численный расчет пучков заряженных частиц на локально модифицированных сетках // Препринт. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО РАН, 1997. № 1109. 28 с.
  11. Sander I.A. The program of Delaunay triangulation construction for the domain with the piecewise smooth boundary // Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Numerical Analysis. Novosibirsk: NCC Publisher, 1998. P. 71–79.
  12. Ильин В.П., Свешников В.М., Сынах В.С. О сеточных технологиях для двумерных краевых задач // Сибирский журнал индустриальной математики. 2000. Т. 3, № 1. С. 124–136.
  13. Свешников В.М. Построение прямых и итерационных методов декомпозиции // Сибирский журнал индустриальной математики. 2009. Т. 12, № 3(39). С. 99–109.
  14. Ильин В.П. Методы и технологии конечных элементов. Новосибирск: Изд-во ИВ-МиМГ (ВЦ) СО РАН. 2007. 371 с.
  15. Скворцов А.В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне // Вычислительные методы и программирование. 2002. Т. 3, № 1. С. 18–43.
  16. Беляев Д.О., Козырев А.Н., Свешников В.М. Пакет прикладных программ ЭРА-DD для решения двумерных краевых задач на квазиструктурированных сетках // Вестник НГУ. 2010. Т. 8, № 1. С. 3–11.
  17. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука. 1977. 656 с.
  18. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. Москва: Наука. 1977. 456 с.

Свешников Виктор Митрофанович, д.ф.-м.н., зав. лаб., лаборатория вычислительной физики, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (г. Новосибирск, Россия)

Козырев Александр Николаевич, м. н. с., лаборатория вычислительной физики, Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (г. Новосибирск, Россия)

---

DOI: 10.14529/cmse170201

**ON THE CONSTRUCTION OF TWO-DIMENSIONAL  
LOCAL-MODIFIED QUASISTRUCTURED GRIDS AND  
SOLVING ON THEM TWO-DIMENSIONAL BOUNDARY  
VALUE PROBLEM IN THE DOMAINS WITH  
CURVILINEAR BOUNDARY**

**A.N. Kozyrev, V.M. Sveshnikov**

*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS*

*(pr. Akademika Lavrentjeva 6, Novosibirsk, 630090 Russia)*

*E-mail: kozyrev@inbox.ru, victor@lapasrv.sccc.ru*

Received: 01.05.2017

New approaches to local modification quasistructured grids, which allow to track the inhomogeneous boundary value problems in the computational domain and adaptable to curved boundaries, as well as easy to use and does not require the storage of large amounts of data as required in unstructured grids are developed. Such grids are proposed to use for the efficient simulation of a wide class of electro physical devices. It is experimentally shown the need for a local modification of the rectangular grid in calculations in domains with curvilinear boundary. The two-step algorithms for local modifications of considered quasistructured grids are developed. On the first step modification of the near boundary nodes is carried out by the its shift along the normal to boundary and on the second step the transformation of the grid elements that do not meet the quality criteria in a quality grid elements is carried out. Special algorithms for such transformations, which do not violate the structuring subgrids in subdomains are developed. Recommendations for the construction of grids on the interface of subdomains that contain the uncoordinated grids have been done. Algorithms local modification of grids on the interface between the subdomains, one of which contains a segment of the computational domain boundaries, have been developed. The series of numerical experiments on solving a model problem are carried out. The results of numerical experiments showed the validity of the proposed approaches.

*Keywords: quasistructured grids, local modification, domain decomposition method, problems of high current electronics*

**FOR CITATION**

Kozyrev A.N., Sveshnikov V.M. On the construction of two-dimensional local-modified quasistructured grids and solving on them two-dimensional boundary value problem in the domains with curvilinear boundary. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2017. vol. 6 no 2. pp. 05–21. (in Russian). DOI: 10.14529/cmse170201.

## References

1. Sveshnikov V.M., Belyaev D.O. Construction of Quasi-Structured Locally Modified Grids for Solving Problems of High Current Electronics. *Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Vychislitel'naya matematika i informatika"* [Bulletin of South Ural State University. Series: *Computational Mathematics and Software Engineering*. 2012. no. 40(299). pp. 130–140. (in Russian)
2. Syrovoy V.A. *Vvedenie v teoriyu intensivnykh puchkov zaryazhennykh chastits* [Introduction to the Theory of Intense Charged Particle Beams]. Moscow, Energoatomizdat, 2004. 552 p.
3. Liseikin V.D. Grid Generation methods. Berlin, Springer-Verlag, 1999. 363 p.
4. Shokin Yu.I., Danaev N.T., Hakimzyanov G.S., Shokina N.Yu. *Lektsii po raznostnym skhemam na podvizhnykh setkakh. Chast' 2* [Lectures on the Difference Scheme on Moving Grids.Part 2]. Almaty, Kazakh National University, 2008. 184 p.
5. Sidorov A.F. An Algorithm for Calculating the Optimal Difference Grids. *Trudy matematicheskogo instituta im. V.A. Steklova*. [Proceedings of the Mathematical Steklov Institute]. 1966. vol. 74. pp. 147–151. (in Russian)
6. Ushakova O.V. An Algorithm for Constructing Two-dimensional Optimal Adaptive Grids. *Matematicheskoe modelirovanie* [Mathematical modeling]. 1997. vol. 9, no 2. pp. 88–90. (in Russian)
7. Anuchina A.I., Artemova N.A., Bronina T.N., Gordeychuk V.A., Ushakova O.V. On the development of the algorithm for constructing grids in the constructions formed by volumes of rotation, including when their deformation. *Tezisy dokladov VIII Vserossiiskoi konferentsii, posvyashchennoi pamyati akademika A.F. Sidorova i Vserossiiskoi molodezhnoi shkoly-konferentsii (Abrau–Dyurso, 5–10 sentyabrya 2016 g.)*. [Abstracts of the VIII All–Russian conference dedicated to the memory of A.F. Sidorov and Russian youth school–conference (Abrau–Durso, 5–10 September 2016)]. Ekaterinburg: Publishing House of the Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics. UB RAS, 2016. pp. 7–9. (in Russian)
8. Matsokin A.M.. Automation triangulation of domains with smooth boundary for solving elliptic equations. Preprint. Novosibirsk: Computing Center of USSR Academy of Sciences, 1975. no. 15. 15 p.
9. Ilin V.P., Itskovich E.A., Kuklina G.Y., Sander I.A., Sander S.A., Sveshnikov V.M. Calculation of Electrostatic Fields on Locally Modified Grids. *Vychislitel'nye metody i tekhnologiya resheniya zadach matematicheskoi fiziki* [Computational methods and technology solutions of problems of mathematical physics]. Novosibirsk: Computing Center of SB RAS, 1993. pp. 63–72. (in Russian)
10. Sveshnikov V.M. The numerical calculation of charged particle beams on locally modified grids. Preprint. Novosibirsk: Computing Center of Russian Academy of Sciences, 1997. Vol. 1109. 28 p.
11. Sander I.A. The program of Delaunay triangulation construction for the domain with the piecewise smooth boundary. Bulletin of the Novosibirsk Computing Center. Series: Numerical Analysis. Novosibirsk: NCC Publisher, 1998. pp. 71–79.
12. Ilin V.P., Sveshnikov V.M., Synakh V.S. On Grid Technologies for Two-Dimensional Boundary Value Problems. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics]. 2000. vol. 3, no. 1. pp. 124–136. (in Russian)



13. Sveshnikov V.M. Construction of Direct and Iterative Methods of Decomposition. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics]. 2009. vol. 12, no. 3(39). pp. 99–109. (in Russian)
14. Ilin V.P. *Metody i tekhnologii konechnykh elementov* [Methods and Technologies of Finite Elements]. Novosibirsk, ICM&MG SBRAS, 2007. 370 p.
15. Skvortcov A.V. Overview of Algorithms for Constructiong Delanau Triangulation. *Vychislitel'nye metody i programmirovanie* [Numerical Methods and Programming]. 2002. vol. 3, no. 1. pp. 18–43. (in Russian)
16. Belyaev D.O., Kozyrev A.N., Sveshnikov V.M. Program Package ERA-DD for Solving Two-Dimensional Boundary Value problems on Quasi-Structured Grids. *Vestnik NGU* [Novosibirsk State University Journal of Information Technologies]. 2010. vol. 8, no. 1. pp. 3–11. (in Russian)
17. Samarskiy A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1977. 656 p.
18. Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noy matematiki* [Methods of Computational Mathematics]. Moscow, Nauka, 1977. 456 p.