УДК 517.948

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ В ТОЧКЕ ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ

В.П. Танана, Т.С. Камалтдинова

Предложен новый подход к оценке погрешности нелинейного метода проекционной регуляризации в точке при решении некорректных задач. Приведено сравнение этой погрешности на множестве.

Ключевые слова: некорректная задача, метод проекционной регуляризации, оценка погрешности, модуль непрерывности, гильбертово пространство.

Введение

При оценке погрешности методов решения некорректно поставленных задач приходится сталкиваться с трудностью, связанной с неопределенностью точного решения. Выход из этого положения заключается в том, что дополнительно вводится класс корректности и предполагается, что точное решение задачи принадлежит этому классу. Затем (см. [1]) оценка погрешности определяется на этом классе. Естественно, что при таком подходе, для получения оценки, из класса корректности выбирается «худший» элемент. Этот подход приводит к тому, что реальная погрешность оказывается меньше теоретической.

В настоящей работе, при условии кусочной гладкости точного решения, сделана попытка сравнить оценку погрешности в точке с оценкой на классе. Для этой цели использован нелинейный метод проекционной регуляризации [2].

1. Постановка задачи

Пусть $L_2(-\infty,\infty)$ - комплексное пространство, а $Z \subset L_2(-\infty,\infty)$. Элемент $u(x) \in Z$ тогда и только тогда, когда

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + \psi(x),$$

где

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} a_i\left(x^2 - x_i^2\right), & |x| \le x_i \\ 0, & |x| > x_i \end{cases},$$

a_i и $x_i > 0$, а $\psi(-x) = \psi(x)$ и

$$\psi(x) \in W_2^{3/2}(-\infty,\infty).$$

Рассмотрим линейные, неограниченные, замкнутые операторы T и G с областями определения $D(T)$ и $D(G) \subset L_2(-\infty,\infty)$ и множествами значений $R(T)$ и $R(G) \subset L_2(-\infty,\infty)$ такие, что

$$\overline{R(T) \cap D(G)} = L_2(-\infty,\infty),$$

где $\overline{R(T) \cap D(G)}$ - замыкание множества $R(T) \cap D(G)$.

Поставим задачу вычисления значения Tf_0 оператора T в точке $f_0 \in D(T)$

$$Tf = u. \qquad (1)$$

Предположим, что при $f = f_0$ элемент $u_0 = Tf_0$ принадлежит множеству Z, но точное значение f_0 нам не известно, а вместо него даны $f_\delta \in L_2(-\infty,\infty)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\|f_\delta - f_0\| \le \delta. \tag{2}$$

Требуется, используя априорную информацию f_δ и δ, определить приближенное значение $u_\delta \in L_2(-\infty,\infty)$ задачи (1), (2) и оценить уклонение $\|u_\delta - u_0\|$.

2. Основные понятия

Определение 1. Семейство $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ операторов T_δ, непрерывно отображающих $L_2(-\infty,\infty)$ в себя, будем называть методом решения задачи (5), (6), если для любого $u_0 \in Z$

$$\sup_{f_\delta}\left\{\|T_\delta f_\delta - u_0\| : f_\delta \in L_2(-\infty,\infty), \|f_\delta - T^{-1}u_0\| \le \delta\right\} \to 0 \; при \; \delta \to 0 .$$

Введем оценку погрешности $\Delta_\delta(u_0,\delta)$ метода $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ в точке $u_0 \in Z$

$$\Delta_\delta(u_0,\delta) = \sup_{f_\delta}\left\{\|T_\delta f_\delta - u_0\| : f_\delta \in L_2(-\infty,\infty), \|f_\delta - T^{-1}u_0\| \le \delta\right\}.$$

Обозначим через M_r множество, определяемое формулой

$$M_r = \{u : u \in R(T) \cap D(G), \|Gu\| \le r\}.$$

На нем определим модуль непрерывности $\omega(\tau,r)$ (см. [1]), формулой

$$\omega(\tau,r) = \sup_f\left\{\|Tf\| : f \in T^{-1}(M_r), \|f\| \le \tau\right\}; \quad \tau, r > 0, \tag{3}$$

а также оценку погрешности $\Delta_\delta(M_r,\delta)$ метода $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ на множестве M_r

$$\Delta_\delta(M_r,\delta) = \sup_{u_0, f_\delta}\left\{\|T_\delta f_\delta - u_0\| : u_0 \in M_r, f_\delta \in L_2(-\infty,\infty), \|f_\delta - T^{-1}u_0\| \le \delta\right\}.$$

Известно, что для любого метода $\{T_\delta : 0 < \delta \le \delta_0\}$ справедлива оценка

$$\Delta_\delta(M_r,\delta) \ge \omega(\delta,r); \quad 0 < \delta \le \delta_0. \tag{4}$$

3. Нелинейный метод проекционной регуляризации

Для решения задачи (1), (2) перейдем от функций $u(x)$ и $f(x)$ к Фурье-образам $\hat{u}(\xi) = F[u(x)]$ и $\hat{f}(\xi) = F[f(x)]$, где F – преобразование Фурье в $L_2(-\infty,\infty)$.

При этом переходе операторы T и G перейдут в операторы $\hat{T}$ и $\hat{G}$, действующие в пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ и определяемые действительными функциями $t(\xi)$ и $g(\xi)$.

$$\hat{T}\hat{f}(\xi) = t(\xi)\hat{f}(\xi); \; \hat{f}(\xi) \in D(\hat{T})$$

$$D(\hat{T}) = \left\{\hat{f}(\xi) : \hat{f}(\xi) \in L_2(-\infty,\infty), t(\xi)\hat{f}(\xi) \in L_2(-\infty,\infty)\right\}$$

и

$$\hat{G}\hat{u}(\xi) = g(\xi)\hat{u}(\xi); \; \hat{u}(\xi) \in D(\hat{G}),$$

$$D(\hat{G}) = \left\{\hat{u}(\xi) : \hat{u}(\xi) \in L_2(-\infty,\infty), g(\xi)\hat{u}(\xi) \in L_2(-\infty,\infty)\right\}$$

При этом множество M_r перейдет в $\hat{M}_r = F[M_r]$, определяемое

$$\hat{M}_r = \left\{\hat{u}(\xi) : \hat{u}(\xi) \in R(\hat{T}) \cap D(\hat{G}), \|\hat{G}\hat{u}(\xi)\| \le r\right\}.$$

На $\hat{M}_r$, аналогично (3), определим модуль непрерывности $\hat{\omega}(\tau,r)$ формулой

$$\hat{\omega}(\tau, r) = \sup_{\hat{f}} \left\{ \left\| \hat{T}\hat{f} \right\| : \hat{f} \in \hat{T}^{-1}\left(\hat{M}_r\right), \left\| \hat{f} \right\| \le \tau \right\}.$$

Из теоремы Планшереля следует, что задача (1), (2) перейдет в метрически эквивалентную задачу

$$\hat{T}\hat{f} = \hat{u}. \tag{5}$$

Предположим, что при $\hat{f} = \hat{f}_0$ элемент $\hat{u}_0 = \hat{T}\hat{f}_0$ принадлежит множеству $\hat{Z} = F[Z]$, но вместо $\hat{f}_0$ нам известны $\hat{f}_\delta \in L_2(-\infty, \infty)$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\left\| \hat{f}_\delta - \hat{f}_0 \right\| \le \delta. \tag{6}$$

В дальнейшем предположим, что функции $t(\xi)$ и $g(\xi)$ непрерывные, четные, положительные и строго возрастающие на $[0, \infty)$. Кроме того, $t(\xi) \to \infty$ и $g(\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$
.

Нелинейный метод проекционной регуляризации [2] зададим семейством $\left\{ \hat{T}_\delta : 0 < \delta \le \delta_0 \right\}$ операторов $\hat{T}_\delta$, непрерывно отображающих $L_2(-\infty, \infty)$ в себя и определяемых формулами

$$\hat{T}_\delta \hat{f}_\delta(\xi) = \begin{cases} \hat{T}_{\hat{\alpha}\left(\hat{f}_\delta, \delta\right)} \hat{f}_\delta(\xi); & \left\| \hat{f}_\delta(\xi) \right\| > 3\delta \\ 0; & \left\| \hat{f}_\delta(\xi) \right\| \le 3\delta \end{cases},$$

где $\hat{T}_\alpha \hat{f}(\xi) = \begin{cases} \hat{T}\hat{f}(\xi); & \|\xi\| \le \alpha \\ 0; & \|\xi\| > \alpha \end{cases}$, $\alpha > 0$, а $\hat{\alpha}\left(\hat{f}_\delta, \delta\right)$ определяется уравнением

$$\int_\alpha^\infty \left| \hat{f}_\delta(\xi) \right|^2 d\xi = 9\delta^2.$$

Таким образом, приближенное решение $\hat{u}_\delta(\xi)$ задачи (5), (6) определим формулой

$$\hat{u}_\delta(\xi) = \hat{T}_\delta \hat{f}_\delta(\xi).$$

4. Оценка погрешности $\left\| \hat{u}_\delta - \hat{u}_0 \right\|$

Лемма 1. Если $\hat{Z} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} n\hat{M}_r$, а функция $\dfrac{g^2(\xi)}{1+\xi^4}$ убывает на $[0, \infty)$, то

$$\int_0^\infty \frac{g^2(\xi)}{1+\xi^4} d\xi < \infty.$$

Теорема 1. Предположим, что выполнены условия леммы 1, $\hat{u}_0 \in \hat{Z} \cap \hat{M}_r$ и для любого $k > 0$ найдутся числа d_k, d'_k *и* $\xi_k > 0$ такие, что для любого ξ, удовлетворяющего условию $|\xi| > \xi_k$ справедливы соотношения

$$d_k \le \frac{g(\xi)}{g(k\xi)} \le d'_k.$$

Тогда $\dfrac{\Delta_\delta(\hat{u}_0, \delta)}{\hat{\omega}(\delta, r)} \to 0$ при $\delta \to 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда
$\dfrac{\Delta_\delta(\hat{u}_0, \delta)}{\Delta_\delta\left(\hat{M}_r, \delta\right)} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

5. Решение обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2};\ -\infty<x<\infty,\ t\in(0,t_0],\ t_0>0\,, \tag{7}$$

где $u(x,t)\in C\{(-\infty,\infty)\times[0,t_0]\}\bigcap C^{2,1}\{(-\infty,\infty)\times(0,t_0]\}$ для любого $t\in(0,t_0]$, $u(x,t), u'_x(x,t), u''_{xx}(x,t)\in L_2(-\infty,\infty)\bigcap L_1(-\infty,\infty)$ и существует $\chi(x)\in L_1(-\infty,\infty)$ такая, что почти для любого $t\in(0,t_0]$

$$\left|u(x,t)\right|+\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|\le\chi(x),\quad x\in(-\infty,\infty).$$

Пусть нам дано распределение $\varphi(x)\in L_2(-\infty,\infty)\bigcap L_1(-\infty,\infty)$ в момент времени t_0

$$u(x,t_0)=\varphi(x);\quad -\infty<x<\infty, \tag{8}$$

а начальное распределение $u_0(x)$

$$u(x,0)=u_0(x);\quad -\infty<x<\infty \tag{9}$$

требуется определить.

Предположим, что при $\varphi(x)=\varphi_0$ существует $u_0(x)\in Z$, такое, что решение задачи (7), (9) удовлетворяет условию $u(x,t_0)=\varphi_0(x)$, но точное значение $\varphi_0(x)$ нам не известно, а вместо него даны некоторое приближение $\varphi_\delta(x)\in L_2(-\infty,\infty)\bigcap L_1(-\infty,\infty)$ и $\delta>0$ такие, что

$$\left\|\varphi_\delta(x)-\varphi_0(x)\right\|_{L_2}\le\delta. \tag{10}$$

Требуется, используя исходные данные (φ_δ,δ) задачи (7), (8), (10), определить приближенное решение $u_\delta(x)\in L_2(-\infty,\infty)$ и оценить величину $\left\|u_\delta(x)-u_0(x)\right\|_{L_2}$.

Применив к задаче (7), (8), (10) преобразование Фурье F, сведем ее к задаче вычисления значений неограниченного оператора $\hat{T}$

$$\hat{T}\hat{\varphi}_\delta(\lambda)=e^{\lambda^2 t_0}\hat{\varphi}_\delta(\lambda)=\hat{u}(\lambda). \tag{11}$$

$$\left\|\hat{\varphi}_\delta(x)-\hat{\varphi}_0(x)\right\|_{L_2}\le\delta. \tag{12}$$

Приближенное решение $\hat{u}_\delta(\lambda)$ задачи (11), (12) определим формулой

$$\hat{u}_\delta(\lambda)=\begin{cases} e^{\lambda^2 t_0}\hat{\varphi}_\delta(\lambda); & |\lambda|\le\alpha(\hat{\varphi}_\delta,\delta)\\ 0; & |\lambda|>\alpha(\hat{\varphi}_\delta,\delta)\end{cases},$$

где $\alpha(\hat{\varphi}_\delta,\delta)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\alpha(\hat{\varphi}_\delta,\delta)}^{\infty}\left|\hat{\varphi}_\delta(\lambda)\right|^2 d\lambda=9\delta^2$$

Пусть $\hat{Z}=F[Z]$, $\hat{M}_r$ определим формулой

$$\hat{M}_r=\left\{\hat{u}(\lambda):\hat{u}(\lambda)\in R(\hat{T}),\left\|g(\lambda)\hat{u}(\lambda)\right\|\le r\right\},$$

где $g(\lambda)=g(-\lambda),\ g\in C(-\infty,\infty),\ g(\lambda)>0,$ строго возрастая, стремится к бесконечности.

$\hat{\omega}(\delta,r)=\sup\limits_{\hat{\varphi}}\left\{\left\|\hat{T}\hat{\varphi}\right\|:\hat{\varphi}\in\hat{T}^{-1}\left(\hat{M}_r\right),\|\hat{\varphi}\|\le\delta\right\}$,

$\Delta_\delta\left(\hat{u}_0,\delta\right)=\sup\limits_{\hat{\varphi}_\delta}\left\{\left\|\hat{u}_\delta(\lambda)-\hat{u}_0(\lambda)\right\|:\hat{\varphi}_\delta\in L_2(-\infty,\infty),\left\|\hat{\varphi}_\delta-\hat{T}^{-1}\hat{u}_0\right\|\le\delta\right\}$,

а $\Delta_\delta\left(\hat{M}_r,\delta\right)=\sup\limits_{\hat{u}_0,\hat{\varphi}_\delta}\left\{\left\|\hat{u}_\delta-\hat{u}_0\right\|:\hat{u}_0\in M_r,\hat{\varphi}_\delta\in L_2(-\infty,\infty),\left\|\hat{\varphi}_\delta-\hat{T}^{-1}\hat{u}_0\right\|\le\delta\right\}$.

Теорема 3. Предположим, что $\hat{Z}\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}n\hat{M}_r$, $\dfrac{g^2(\lambda)}{1+\lambda^4}$ убывает на $[0,\infty)$, $\hat{u}_0(\lambda)\in\hat{Z}\cap\hat{M}_r$ и $\left\|\hat{\varphi}_\delta\right\|>3\delta$.

Тогда

$$\frac{\Delta_\delta\left(\hat{u}_0,\delta\right)}{\hat{\omega}(\delta,r)}\to 0 \quad \textit{при} \quad \delta\to 0.$$

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 3 справедливо соотношение

$$\frac{\Delta_\delta\left(\hat{u}_0,\delta\right)}{\Delta_\delta\left(\hat{M}_r,\delta\right)}\to 0 \quad \textit{при} \quad \delta\to 0.$$

Заключение

Введена оценка погрешности в точке при решении некорректных задач. Приведено сравнение этой погрешности с погрешностью на множестве. Другие методы решения задачи (7)–(9) и ее нелинейного варианта рассмотрены, например, в работе [3].

Литература

1. Ivanov, V.K. Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications / V.V. Vasin, V.P. Tanana. – VSP, 2002
2. Танана, В.П. Об оценке погрешности приближенного решения одной обратной задачи в классе кусочно-гладких функций / А.Б. Бредихина, Т.С. Камалтдинова // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, №1. – С. 281–288.
3. Табаринцева Е.В. Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полулинейного дифференциального уравнения / Е.В. Табаринцева // Сиб. журнал вычисл. матем. – 2005. – Т. 8, № 3. – С. 259–271.

Танана Виталий Павлович, заведующий кафедрой вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет, tvpa@susu.ac.ru

Камалтдинова Татьяна Сергеевна, старший преподаватель, Южно-Уральский государственный университет, KamaltdinovaTS@ mail.ru.

ON POINT-WISE ERROR ESTIMATE IN SOLVING INVERSE PROBLEMS

V.P. Tanana, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation),
T.S. Kamaltdinova, South Ural State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

A new approach to the point-wise error estimation for the projection ill posed problems is suggested in the article. We compare point-wise error estimate with the error estimate on a set.

Keywords: ill-posed problem, method of projective regularization, error estimation, module of coninuity.

References

1. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications. VSP, 2002.
2. Tanana V.P., Bredikhina A.B., Kamaltdinova T.S. On an error estimate for an approximate solution for an inverse problem in the class of piecewise smooth functions. Supplement to Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics and Mechanics Ural Branch of RAS. 2012. Vol. 18, No. 1. P. 281–288.
3. Tabarintseva E.V. On error estimate of the quasi-reversibility method to solve the Cauchy problem for a semielinear differential equation. Siberian journal of numerical mathematics. 2005. Vol. № 3. P. 259–271.

Поступила в редакцию 14 января 2013 г.