

# ГАРАНТИРОВАННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

© 2018 А.С. Шелудько

*Южно-Уральский государственный университет*

*(454080 Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, д. 76)*

*E-mail: sheludkoas@susu.ru*

Поступила в редакцию: 18.01.2018

Рассматривается задача оценивания параметров дискретных моделей хаотических процессов по зашумленным измерениям. Исследуется применение гарантированного подхода, что предполагает множественное представление неопределенности о неизвестных переменных в модели (переменной состояния, параметре и ошибках измерений). Разрабатываемый алгоритм основан на интервальном анализе и может быть реализован в прямом и обратном времени. Результатом гарантированного оценивания являются множественные (интервальные) оценки, которые содержат истинные значения неизвестных переменных. Предложенный алгоритм может быть эффективно использован в сочетании с методами, разрабатываемыми в рамках оптимизационного и динамического подходов к решению задачи оценивания. Алгоритм гарантированного оценивания можно рассматривать как процедуру уточнения множества возможных значений переменных целевой функции при применении метода наименьших квадратов и его модификаций. Это позволяет уменьшить число локальных экстремумов целевой функции и сократить время вычислений при применении алгоритмов глобальной оптимизации. Найденные множественные оценки также могут быть использованы для проверки корректности оценок, полученных в результате применения модификаций фильтра Калмана для нелинейных моделей. Для анализа эффективности алгоритма исследуется зависимость результатов оценивания от числа измерений и уровня шума.

*Ключевые слова: хаотическое отображение, оценивание параметров, гарантированный подход, множественная оценка, интервальный анализ, информационное множество.*

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Шелудько А.С. Гарантированное оценивание параметров дискретных моделей хаотических процессов // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2018. Т. 7, № 1. С. 25–39. DOI: 10.14529/cmse180103.

## Введение

Моделирование хаотических процессов [1, 2] имеет множество приложений в различных областях исследований [3, 4]. Независимо от области применения центральной задачей при этом является задача оценивания параметров модели по данным измерений [5, 6]. Результат решения задачи оценивания в дальнейшем влияет на точность алгоритмов фильтрации, прогнозирования и управления. Работы, связанные с решением задачи оценивания параметров моделей хаотических процессов (обширный обзор представлен в [7]), можно разделить на две группы в зависимости от типа исследуемой модели. Основное внимание исследователей (об этом можно судить по количеству публикаций) сосредоточено на классе моделей, заданных в виде систем нелинейных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \lambda), \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Разрабатываемые в рамках этого направления алгоритмы не всегда могут с той же эффективностью применяться для дискретных моделей хаотических процессов, заданных

в виде одномерных (как правило, однопараметрических) отображений

$$x_k = f(x_{k-1}, \lambda), \quad x_k \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Во многом это связано с тем, что модели вида (1) описывают временные процессы, которые по своим характеристикам близки к ошибкам измерений (эти модели также используются в качестве генераторов шумов [2]).

В данной работе рассматривается задача оценивания параметра  $\lambda$  хаотического отображения (1) по зашумленным измерениям

$$y_k = x_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

где  $v_k$  — ошибки измерений. В модели (1), (2) неизвестным также является начальное условие  $x_0$ , от которого неявно зависит значение переменной состояния  $x_k$  в момент времени  $k$ :

$$x_k = f^k(x_0, \lambda).$$

Запись  $f^k$  означает выполнение  $k$  итераций отображения (1):

$$f^k(x_0, \lambda) = \underbrace{f(f \dots f(x_0, \lambda) \dots)}_k.$$

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводится обзор методов, разрабатываемых в рамках оптимизационного и динамического подходов к решению рассматриваемой задачи. В разделе 2 обсуждается применение гарантированного подхода и возможность его использования в сочетании с другими методами. В разделе 3 рассматривается алгоритм гарантированного оценивания в прямом и обратном времени. В разделе 4 исследуется зависимость результатов оценивания от числа измерений и уровня шума. В заключении приводятся особенности предложенного алгоритма и направления дальнейших исследований.

## 1. Обзор литературы

### 1.1. Оптимизационный подход

Оптимизационный подход основан на решении задачи минимизации целевой функции, которая определяет меру близости реализации модели (1) к измеряемым значениям (2). Наиболее распространенным является применение метода наименьших квадратов (МНК) [6], то есть минимизация целевой функции

$$F(x_0, \lambda) = \sum_{k=1}^N \left( y_k - f^k(x_0, \lambda) \right)^2. \quad (3)$$

Основная сложность при таком подходе — многоэкстремальность целевой функции (3) [8], которая возникает из-за сложной зависимости реализации хаотического отображения (1) от начального условия  $x_0$  и параметра  $\lambda$  [1, 2]. Это приводит к необходимости применения трудоемких алгоритмов глобальной оптимизации [9]. На рис. 1 показана целевая функция (3) для примера, который будет рассмотрен в разделе вычислительных экспериментов.

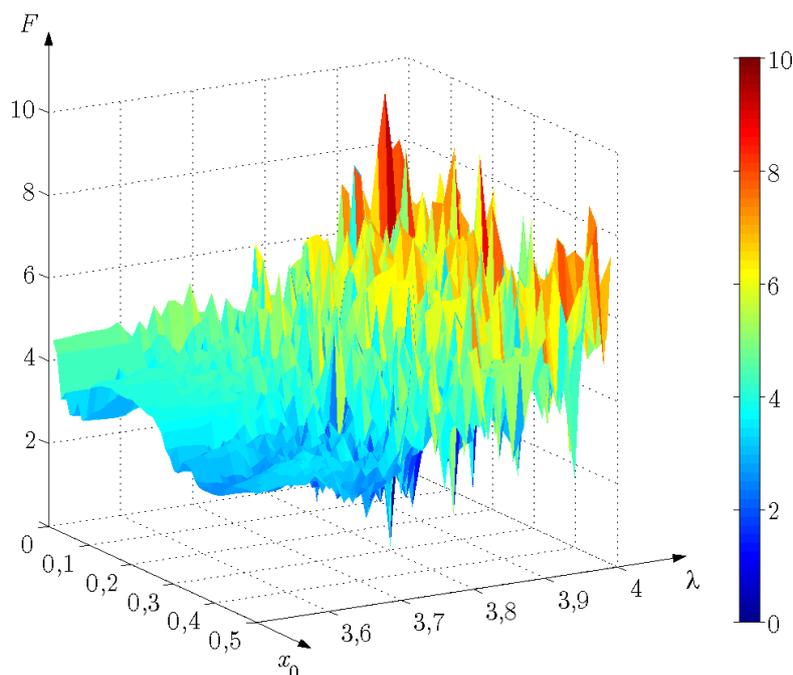


Рис. 1. Пример многоэкстремальной целевой функции при применении МНК

В [10] предложено использовать МНК в сочетании с итерированием в обратном времени. Задача минимизации решается для целевой функции

$$F(x_N, \lambda) = \sum_{k=0}^{N-1} \left( y_{N-k} - f^{-k}(x_N, \lambda) \right)^2, \quad (4)$$

где запись  $f^{-k}$  означает выполнение  $k$  итераций обратного отображения

$$x_k = f^{-1}(x_{k+1}, \lambda). \quad (5)$$

Ожидается, что целевая функция (4) имеет меньшее число локальных экстремумов, так как при обращении времени пропадает существенная зависимость от начального условия (в обратном времени — от значения  $x_N$  в конечный момент времени). Данный прием имеет недостаток, связанный с неоднозначностью обратного отображения (5). Кроме того, получить обратное отображение в явном виде не всегда возможно.

Еще одной модификацией МНК является метод множественной стрельбы [6, 8], который основан на представлении целевой функции в виде

$$F(x_{k_0}, x_{k_1}, \dots, x_{k_m}, \lambda) = \sum_{i=0}^m \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} \left( y_k - f^{k-k_i}(x_{k_i}, \lambda) \right)^2, \quad (6)$$

где  $x_{k_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  — узловые точки. При этом  $k_0 = 0$ ,  $k_{m+1} = N$  и  $k_i < k_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$ . Задача минимизации целевой функции (6) решается при ограничениях в виде равенств:

$$x_{k_{i+1}} = f^{k_{i+1}-k_i}(x_{k_i}, \lambda), \quad i = 0, 1, \dots, m-1.$$

В рамках оптимизационного подхода также разрабатываются методы, использующие другие виды целевых функций. В [11] предлагается использовать меру близости, которая

не зависит от начального условия, а именно близость между аттракторами хаотических отображений. В [12] используется свойство монотонной зависимости среднего значения реализации хаотического отображения от параметра. В алгоритме, предложенном в [13], при вычислении целевой функции используется результат решения задачи нелинейной фильтрации.

### 1.2. Динамический подход

Динамический подход основан на решении задачи оценивания расширенного вектора состояния  $\tilde{\mathbf{x}}_k = [x_k \ \lambda_k]^T$  нелинейной динамической системы, эквивалентной уравнению (1):

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = f(x_{k-1}, \lambda_{k-1}), \\ \lambda_k = \lambda_{k-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Уравнение измерений (2) при этом имеет вид:

$$y_k = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{x}}_k + v_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

где матрица измерений  $\mathbf{G} = [1 \ 0]$ . Для решения задачи оценивания вектора состояния  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  используются модификации фильтра Калмана (ФК) для нелинейных моделей [8, 14]. Применение стохастических алгоритмов в рассматриваемой задаче может привести к некорректным результатам [15], так как нелинейные свойства хаотического отображения (1) оказывают влияние на сходимость оценок ФК [16, 17]. В частности, истинное значение вектора состояния  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  может не принадлежать доверительному множеству (эллипсу) (рис. 2). В терминах оптимизационного подхода это означает, что последовательность оценок вектора состояния  $\tilde{\mathbf{x}}_k$  сходится к точке локального экстремума, отличной от точки глобального минимума.

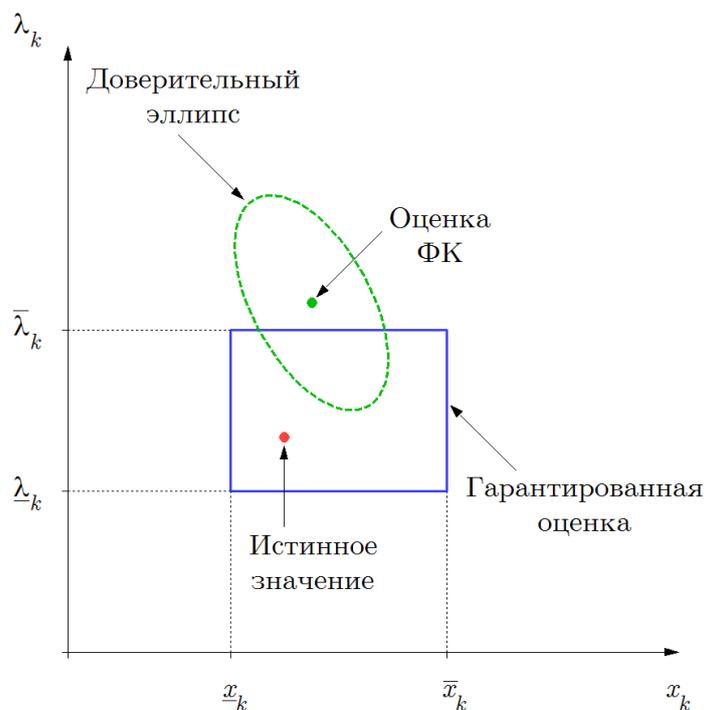


Рис. 2. Ситуация, когда применение ФК приводит к некорректному результату

## 2. Гарантированный подход

Для преодоления сложностей, возникающих при оптимизационном и динамическом подходе, предлагается использование гарантированного подхода [18, 19], который получил широкое применение при решении задачи идентификации нелинейных моделей [20–23]. Гарантированное оценивание основано на множественном представлении неопределенности о неизвестных переменных в модели. Предполагается, что априорная информация о начальном условии  $x_0$ , параметре  $\lambda$  и ошибках  $v_k$  представлена в виде множественных (интервальных) оценок:

$$x_0 \in X_0 = [\underline{x}_0; \bar{x}_0], \lambda \in \Lambda_0 = [\underline{\lambda}_0; \bar{\lambda}_0], v_k \in V_k = [\underline{v}_k; \bar{v}_k]. \quad (9)$$

Результатом гарантированного оценивания в момент времени  $k$  являются множественные оценки  $X_k$  и  $\Lambda_k$ , которые содержат истинные значения переменной состояния  $x_k$  и параметра  $\lambda$  соответственно:

$$x_k \in X_k = [\underline{x}_k; \bar{x}_k], \lambda \in \Lambda_k = [\underline{\lambda}_k; \bar{\lambda}_k].$$

Применительно к модели (7), (8) результатом является последовательность множеств  $P_k = X_k \times \Lambda_k$ , которые содержат истинные значения расширенного вектора состояния  $\tilde{x}_k$ , то есть истинную траекторию системы (рис. 3) [20, 21]. В теории гарантированного оценивания множество  $\tilde{X}_k$  состояний системы (7), совместимых с измерениями (8) и априорными ограничениями (9), называется информационным множеством [18, 24]. Для нелинейных систем информационное множество может быть невыпуклым и несвязанным [18], а также иметь фрактальную структуру [25]. Задача гарантированного оценивания в этом случае состоит в построении аппроксимации информационного множества [23]. В рассматриваемой задаче множество  $P_k$  представляет собой внешнюю оценку информационного множества  $\tilde{X}_k \subseteq P_k$  [19, 26]. Найденные множественные оценки могут быть использованы для проверки корректности стохастических алгоритмов. Например, в ситуации, показанной на рис. 2 точечная оценка ФК не принадлежит множеству  $P_k$ .

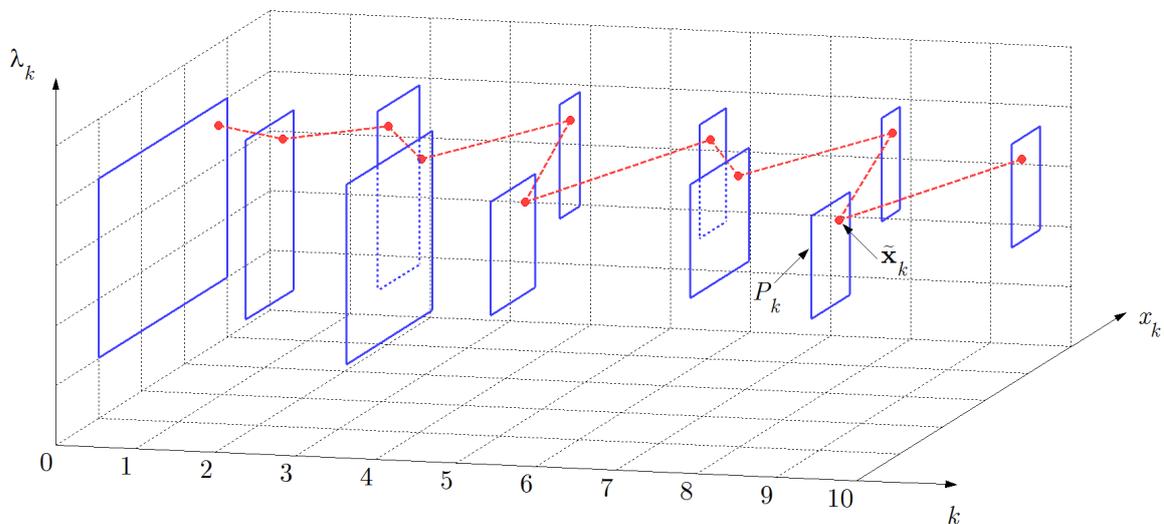


Рис. 3. Гарантированные оценки расширенного вектора состояния

Результаты гарантированного оценивания могут быть использованы для уточнения множества возможных значений переменных целевой функции при оптимизационном подходе, что позволяет уменьшить число локальных экстремумов и сократить время вычислений при применении алгоритмов глобальной оптимизации.

Кроме того, теоретическое обоснование применения МНК и модификаций ФК основано на предположении о том, что ошибки измерений являются белым гауссовским шумом с нулевым математическим ожиданием и известной дисперсией. При гарантированном подходе не требуется выдвигать предположений о модели ошибок. Применение алгоритма гарантированного оценивания для различных моделей ошибок измерений рассмотрено в [27].

### 3. Алгоритм гарантированного оценивания

Разрабатываемый алгоритм гарантированного оценивания основан на интервальном анализе: отображение  $f$  рассматривается как интервальное преобразование [19, 26]. В данном разделе используются следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f(X, \Lambda) &= \{u \mid u = f(x, \lambda), x \in X, \lambda \in \Lambda\}, \\ f(x, \Lambda) &= \{u \mid u = f(x, \lambda), \lambda \in \Lambda\}, \\ f(X, \lambda) &= \{u \mid u = f(x, \lambda), x \in X\}. \end{aligned}$$

Верхние индексы «+» и «-» обозначают прямое и обратное время соответственно.

*Алгоритм гарантированного оценивания в прямом времени.* Пусть  $X_0^+$ ,  $\Lambda_0^+$  — априорные множественные оценки в начальный момент времени  $k = 0$ . Для  $k = 1, 2, \dots, N$  множественные оценки  $X_k^+$ ,  $\Lambda_k^+$  определяются в соответствии со следующими шагами алгоритма.

**Шаг 1.** Построение множества  $X_{k/k-1}$  прогнозных значений переменной состояния  $x_k$  исходя из множественных оценок  $X_{k-1}^+$ ,  $\Lambda_{k-1}^+$  найденных на предыдущем временном шаге:

$$X_{k/k-1} = f(X_{k-1}^+, \Lambda_{k-1}^+). \quad (10)$$

**Шаг 2.** Построение множества  $Y_k$  значений переменной состояния  $x_k$ , совместимых с измерением  $y_k$ , исходя из множественной оценки  $V_k$  для ошибки  $v_k$ :

$$\begin{aligned} Y_k &= \{x \mid x = y_k - v, v \in V_k\} = \\ &= \{x \mid y_k - \bar{v}_k \leq x \leq y_k - \underline{v}_k\} = \\ &= [y_k - \bar{v}_k; y_k - \underline{v}_k]. \end{aligned} \quad (11)$$

**Шаг 3.** Множественная оценка  $X_k^+$  переменной состояния  $x_k$  определяется как пересечение множеств (10) и (11):

$$X_k^+ = X_{k/k-1} \cap Y_k. \quad (12)$$

Уравнения (10)–(12) аналогичны операциям построения множеств достижимости при гарантированном оценивании вектора состояния линейных динамических систем [24].

**Шаг 4.** Уточнение множественной оценки  $\Lambda_k^+ \subseteq \Lambda_{k-1}^+$  параметра  $\lambda$ :

$$\Lambda_k^+ = \{\lambda \in \Lambda_{k-1}^+ \mid f(\lambda, X_{k-1}^+) \cap X_k^+ \neq \emptyset\}. \quad (13)$$

Алгоритм гарантированного оценивания в обратном времени. Пусть в конечный момент времени  $k = N$  множественные оценки  $X_N^- = X_N^+$ ,  $\Lambda_N^- = \Lambda_N^+$ . Для  $k = N - 1, N - 2, \dots, 0$  множественные оценки  $X_k^-, \Lambda_k^-$  определяются в соответствии со следующими шагами алгоритма.

**Шаг 1.** Уточнение множественной оценки  $X_k^- \subseteq X_k^+$  переменной состояния  $x_k$ :

$$X_k^- = \{x \in X_k^+ \mid f(x, \Lambda_{k+1}^-) \cap X_{k+1}^- \neq \emptyset\}. \quad (14)$$

**Шаг 2.** Уточнение множественной оценки  $\Lambda_k^- \subseteq \Lambda_{k+1}^-$  параметра  $\lambda$ :

$$\Lambda_k^- = \{\lambda \in \Lambda_{k+1}^- \mid f(\lambda, X_k^-) \cap X_{k+1}^- \neq \emptyset\}. \quad (15)$$

При реализации алгоритма для конкретного отображения (1) необходимо учитывать, что множественные оценки находятся в виде непрерывных интервалов, так как операции (13)–(15), строго говоря, подразумевают возможность получения несвязанных множеств. Также необходимо отметить, что эффективность рассмотренного алгоритма зависит от того, насколько априорные множественные оценки  $V_k$  адекватны реальным значениям ошибок  $v_k$ . Вопрос выбора множественных оценок  $V_k$  для ошибок измерений обсуждается в [27].

## 4. Результаты вычислительных экспериментов

Рассматривается задача оценивания параметра  $\lambda$  квадратичного отображения [2]

$$x_k = \lambda x_{k-1}(1 - x_{k-1}). \quad (16)$$

Истинное значение параметра  $\lambda = 3,8$ , начальное условие  $x_0 = 0,3$ , число измерений  $N = 30$ . На рис. 4 показаны реализация  $x_k$  квадратичного отображения (16), ошибки  $v_k$  и зашумленные измерения  $y_k$  (2). Значения ошибок  $v_k$  получены с помощью генератора псевдослучайных чисел с нормальным распределением, нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением  $\sigma_v = 0,05$  (используется функция *randn* из стандартной библиотеки *Matlab*). Априорные множественные оценки:

$$X_0^+ = [0; 0,5], \Lambda_0^+ = [3; 4], V_1 = \dots = V_N = [-3\sigma_v; 3\sigma_v].$$

Результаты алгоритма гарантированного оценивания (вычислительная схема для квадратичного отображения приводится в [28]) представлены на рис. 5, 6. После обработки измерений в прямом и обратном времени получены следующие множественные оценки начального условия и параметра:

$$X_0^- = [0,2570; 0,3381], \Lambda_0^- = [3,7382; 4].$$

На рис. 7 представлено сравнение множеств  $P_0^+ = X_0^+ \times \Lambda_0^+$  и  $P_0^- = X_0^- \times \Lambda_0^-$ , которые представляют собой соответственно априорное и уточненное множество возможных значений переменных целевой функции (3) при применении МНК (см. рис. 1).

Для исследования зависимости результатов от числа измерений и уровня шума рассматривается  $n = 10^4$  тестовых примеров. В рассматриваемой задаче под уровнем шума подразумевается величина среднеквадратического отклонения  $\sigma_v$  генерируемых значений

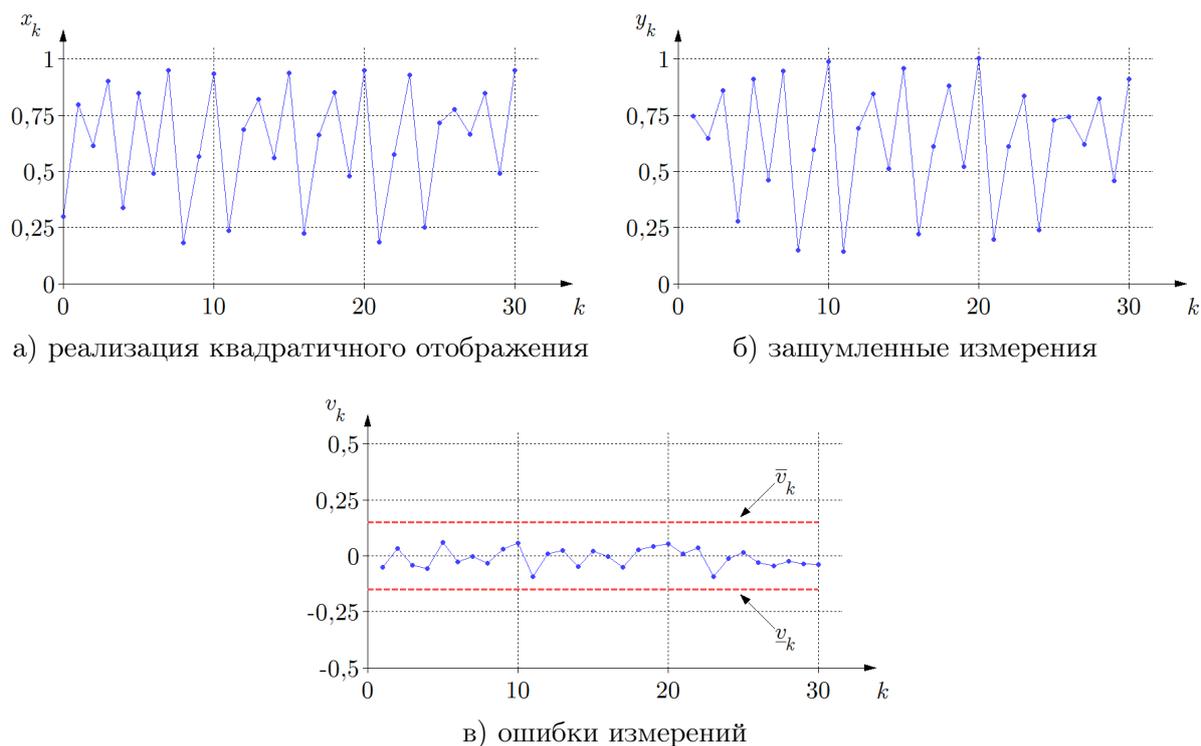


Рис. 4. Временные процессы, рассматриваемые в примере

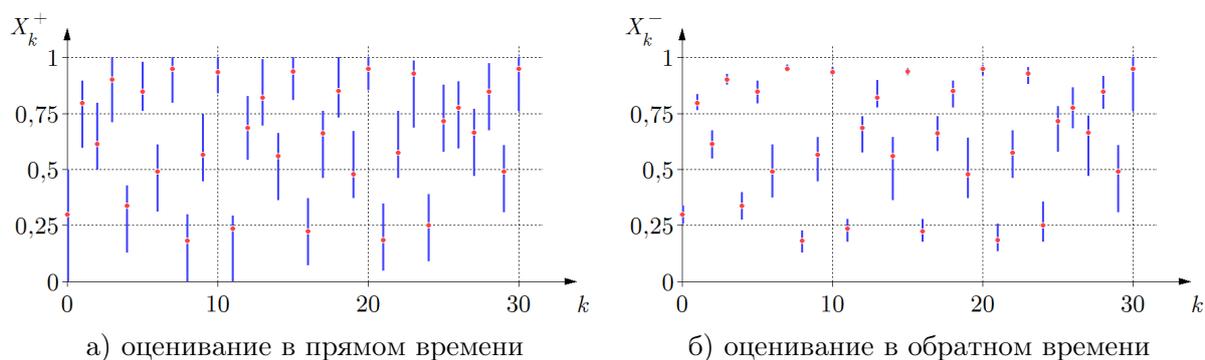


Рис. 5. Множественные оценки переменной состояния (точками отмечены истинные значения)

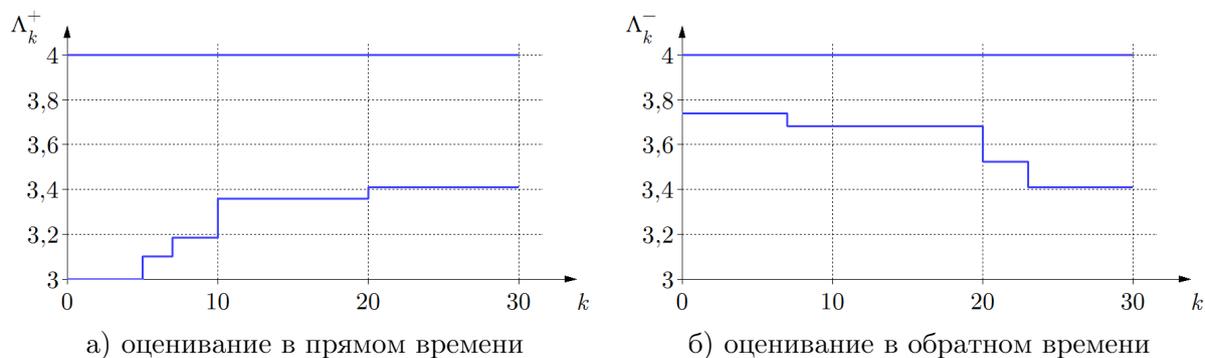
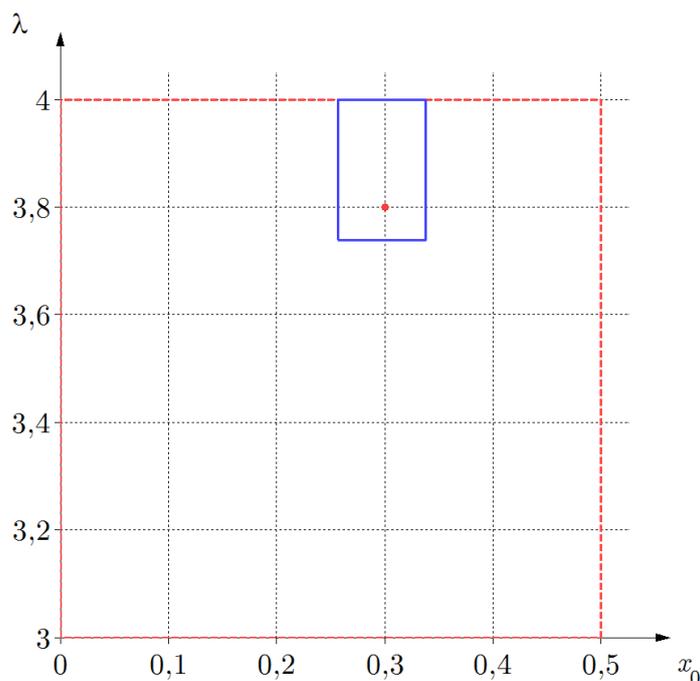


Рис. 6. Уточнение границ множественной оценки параметра



- Истинное значение    - - - - Априорное множество    — Уточненное множество

**Рис. 7.** Сравнение априорного и уточненного множеств возможных значений начального условия и параметра

ошибок  $v_k$ . На рис. 8 показана зависимость между величиной  $\sigma_v$  и отношением сигнал/шум, которое рассчитывается по формуле:

$$C/Ш = 20 \lg \frac{\sigma_x}{\sigma_v},$$

где  $\sigma_x$  — выборочное среднеквадратическое отклонение реализации квадратичного отображения. Для каждого тестового примера значения начального условия  $x_0 \in (0; 0,5)$  и параметра  $\lambda \in [3,6; 4]$  квадратичного отображения (16) выбираются из соответствующих интервалов возможных значений с помощью генератора псевдослучайных чисел с равномерным распределением (используется функция *rand* из стандартной библиотеки *Matlab*). Во всех случаях априорные множественные оценки выбираются как в рассмотренном выше примере.

В качестве количественной характеристики эффективности алгоритма гарантированного оценивания рассматривается отношение площадей множеств  $P_0^-$  и  $P_0^+$  (см. рис. 7):

$$\delta = \frac{(\bar{x}_0^- - \underline{x}_0^-) (\bar{\lambda}_0^- - \underline{\lambda}_0^-)}{(\bar{x}_0^+ - \underline{x}_0^+) (\bar{\lambda}_0^+ - \underline{\lambda}_0^+)} \times 100\%.$$

Величина  $\delta$  показывает, какую часть от априорной неопределенности составляет множество возможных значений начального условия  $x_0$  и параметра  $\lambda$ , найденное в результате применения алгоритма гарантированного оценивания. На рис. 9 показана зависимость величины  $\delta$  от числа  $N$  измерений и среднеквадратического отклонения  $\sigma_v$  ошибок измерений. При отношении  $C/Ш > 15$  дБ и числе измерений  $N > 20$  размер уточненного множества возможных значений не превышает 10% от величины априорной неопределенности.

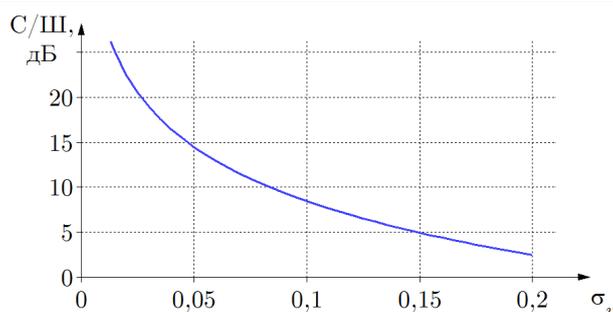


Рис. 8. Зависимость отношения сигнал/шум от среднеквадратического отклонения ошибок измерений

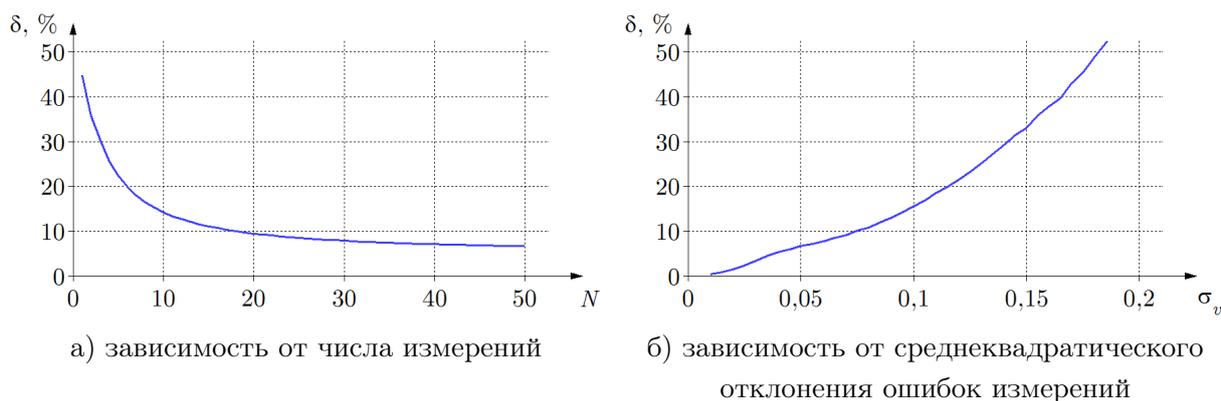


Рис. 9. Зависимость характеристики эффективности алгоритма от параметров задачи (в среднем для  $n = 10^4$  тестовых примеров)

## Заключение

При решении задачи оценивания параметров моделей хаотических процессов возникают сложности, связанные с многоэкстремальностью целевой функции (при оптимизационном подходе) и влиянием нелинейных свойств хаотического отображения на сходимость оценок стохастических алгоритмов (при динамическом подходе).

Применение гарантированного подхода предполагает, что априорная информация о неизвестных переменных представлена в виде множественных (интервальных) оценок. Рассмотренный алгоритм гарантированного оценивания представляет собой рекуррентную процедуру построения множественных оценок переменной состояния и параметра хаотического отображения, которая может быть реализована в прямом и обратном времени. Построение множественных оценок основано на интервальном анализе, поэтому сложность реализации алгоритма зависит от конкретного вида хаотического отображения.

При корректных априорных предположениях найденные множественные оценки обязательно содержат истинные значения неизвестных переменных и могут быть использованы для проверки корректности применения стохастических алгоритмов при динамическом подходе к решению задачи оценивания. Перспективным направлением дальнейших исследований может стать одновременное использование алгоритма гарантированного оценивания и фильтра Калмана.

Если задача оценивания решается в рамках оптимизационного подхода, результаты предварительной обработки измерений с помощью алгоритма гарантированного оценивания могут быть использованы для уточнения множества возможных значений переменных

целевой функции. Это позволяет уменьшить число локальных экстремумов целевой функции и сократить время вычислений при применении алгоритмов глобальной оптимизации. Отметим, что декартово произведение интервалов является простейшим вариантом внешней аппроксимации множества возможных значений. В дальнейшем предполагается использование алгоритма гарантированного оценивания для построения аппроксимации в виде объединения непересекающихся подмножеств (прямоугольников).

*Статья выполнена при поддержке Правительства РФ (Постановление № 211 от 16.03.2013 г.), соглашение № 02.А03.21.0011.*

## Литература

1. Devaney R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley, 1989. 336 p.
2. Sprott J.C. Chaos and Time-Series Analysis. Oxford University Press, 2003. 507 p.
3. Skiadas C.H., Skiadas C. Handbook of Applications of Chaos Theory. CRC Press, 2016. 934 p.
4. Thompson J.M.T. Chaos, Fractals and Their Applications // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. Vol. 26, No. 13. DOI: 10.1142/S0218127416300354.
5. Аносов О.Л., Бутковский О.Я., Кравцов Ю.А. Восстановление динамических систем по хаотическим временным рядам: краткий обзор // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т. 8, № 1. С. 29–48.
6. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Современные проблемы моделирования по временным рядам // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. 2006. Т. 6, № 1–2. С. 3–27.
7. Aguirre L.A., Letellier C. Modeling Nonlinear Dynamics and Chaos: A Review // Mathematical Problems in Engineering. 2009. Article ID 238960. DOI: 10.1155/2009/238960.
8. Voss H.U., Timmer J., Kurths J. Nonlinear Dynamical System Identification from Uncertain and Indirect Measurements // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2004. Vol. 14, No. 6. P. 1905–1933. DOI: 10.1142/S0218127404010345.
9. Gotmare A., Bhattacharjee S.S., Patidar R., George N.V. Swarm and Evolutionary Computing Algorithms for System Identification and Filter Design: A Comprehensive Review // Swarm and Evolutionary Computation. 2017. Vol. 32. P. 68–84. DOI: 10.1016/j.swevo.2016.06.007.
10. Smirnov D.A., Vlaskin V.S., Ponomarenko V.I. Estimation of Parameters in One-Dimensional Maps from Noisy Chaotic Time Series // Physics Letters A. 2005. Vol. 336. P. 448–458. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.12.092.
11. Jafari S., Sprott J.C., Pham V.-T. et al. A New Cost Function for Parameter Estimation of Chaotic Systems Using Return Maps as Fingerprints // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2014. Vol. 24, No. 10. DOI: 10.1142/S021812741450134X.
12. Liu L., Hu J., Li H. et al. Parameter Estimation of a Class One-Dimensional Discrete Chaotic System // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2011. Article ID 696017. DOI: 10.1155/2011/696017.
13. Nakamura T., Hirata Y., Judd K. et al. Improved Parameter Estimation from Noisy Time Series for Nonlinear Dynamical Systems // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2007. Vol. 17, No. 5. P. 1741–1752. DOI: 10.1142/S021812740701804X.

14. Walker D.M. Parameter Estimation Using Kalman Filters with Constraints // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2006. Vol. 16, No. 4. P. 1067–1078. DOI: 10.1142/S0218127406015325.
15. Judd K. Fifty Years of Forecasting Chaos and the Shadow of Imperfect Models // Nonlinear Theory and Its Applications. 2016. Vol. 7, No. 2. P. 234–249. DOI: 10.1587/nolta.7.234.
16. Leung H., Zhu Z., Ding Z. An Aperiodic Phenomenon of the Extended Kalman Filter in Filtering Noisy Chaotic Signals // IEEE Transactions on Signal Processing. 2000. Vol. 48, No. 6. P. 1807–1810. DOI: 10.1109/78.845941.
17. Feng J., Fan H., Tse C.K. Convergence Analysis of the Unscented Kalman Filter for Filtering Noisy Chaotic Signals // Proceedings of the 2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS) (New Orleans, USA, May 27–30, 2007), 2007. P. 1681–1684. DOI: 10.1109/ISCAS.2007.377916.
18. Куржанский А.Б., Фурасов В.Д. Идентификация нелинейных процессов — гарантированные оценки // Автоматика и телемеханика. 1999. № 6. С. 70–87.
19. Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. Applied Interval Analysis. Springer, 2001. 379 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0249-6.
20. Raissi T., Ramdani N., Candau Y. Set Membership State and Parameter Estimation for Systems Described by Nonlinear Differential Equations // Automatica. 2004. Vol. 40, No. 10. P. 1771–1777. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.05.006.
21. Abdallah F., Gning A., Bonnifait P. Box Particle Filtering for Nonlinear State Estimation Using Interval Analysis // Automatica. 2008. Vol. 44, No. 3. P. 807–815. DOI: 10.1016/j.automatica.2007.07.024.
22. Kumkov S.I., Mikushina Y.V. Interval Approach to Identification of Catalytic Process Parameters // Reliable Computing. 2013. Vol. 19, No. 2. P. 197–214.
23. Paulen R., Villanueva M., Fikar M., Chachuat B. Guaranteed Parameter Estimation in Nonlinear Dynamic Systems Using Improved Bounding Techniques // Proceedings of the 2013 European Control Conference (ECC) (Zurich, Switzerland, July 17–19, 2013), 2013. P. 4514–4519.
24. Blanchini F., Miani S. Set-Theoretic Methods in Control. Birkhauser, 2015. 630 p. DOI: 10.1007/978-3-319-17933-9.
25. Prostiakov P.V. Fractal Structure for the Guaranteed Observation Problem. An Example // Applied Mathematics Letters. 2001. Vol. 14, No. 4. P. 507–511. DOI: 10.1016/S0893-9659(00)00185-3.
26. Shary S.P. A New Technique in Systems Analysis under Interval Uncertainty and Ambiguity // Reliable Computing. 2002. Vol. 8, No. 5. P. 321–418. DOI: 10.1023/A:1020505620702.
27. Шелудько А.С., Ширяев В.И. Алгоритм гарантированного оценивания параметра одномерного хаотического отображения // Информационные технологии. 2015. Т. 21, № 1. С. 30–34.
28. Sheludko A.S., Shiryaev V.I. Guaranteed State and Parameter Estimation for One-Dimensional Chaotic System // Proceedings of the 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM) (Chelyabinsk, Russia, May 19–20, 2016), 2016. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911580.

Шелудько Антон Сергеевич, ассистент, кафедра прикладной математики и программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (Челябинск, Российская Федерация)

---

DOI: 10.14529/cmse180103

## GUARANTEED PARAMETER ESTIMATION FOR DISCRETE-TIME CHAOTIC SYSTEMS

© 2018 A.S. Sheludko

*South Ural State University*

*(pr. Lenina 76, Chelyabinsk, 454080 Russia)*

*E-mail: sheludkoas@susu.ru*

Received: 18.01.2018

This paper considers the problem of parameter estimation from noisy measurements of discrete-time chaotic systems. The guaranteed approach assumes that the uncertainty is represented by intervals of possible values of the unknown variables (state, model parameter and measurement errors). The developed algorithm is based on interval analysis and can be used in the forward and backward time direction. The result of the guaranteed estimation is interval estimates that contain the true values of the unknown variables. The proposed algorithm can be usefully associated with common estimation methods developed in the field of optimization approach and estimation in real time. If the estimation problem is solved by the least squares method or its modifications, the guaranteed algorithm can be used to specify the set of possible values of the unknown variables. It decreases the number of local minima of the cost function. Computed interval estimates may also be used to verify the results obtained using the modifications of the Kalman filter for nonlinear systems. In the practical section, the dependence of the results on the number of available measurements and noise level is examined.

*Keywords: chaotic map, parameter estimation, guaranteed approach, interval estimate, interval analysis, information set.*

### FOR CITATION

Sheludko A.S. Guaranteed Parameter Estimation for Discrete-Time Chaotic Systems. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2018. vol. 7, no. 1. pp. 25–39. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse180103.

*This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Non Commercial 3.0 License which permits non-commercial use, reproduction and distribution of the work without further permission provided the original work is properly cited.*

### References

1. Devaney R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley, 1989. 336 p.
2. Sprott J.C. Chaos and Time-Series Analysis. Oxford University Press, 2003. 507 p.
3. Skiadas C.H., Skiadas C. Handbook of Applications of Chaos Theory. CRC Press, 2016. 934 p.
4. Thompson J.M.T. Chaos, Fractals and Their Applications. International Journal of Bifurcation and Chaos. 2016. vol. 26, no. 13. DOI: 10.1142/S0218127416300354.
5. Anosov O.L., Butkovskii O.Ya., Kravtsov Yu.A. Reconstruction of Dynamical Systems from Chaotic Time Series: Short Review. *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineinaya dinamika* [Izvestiya VUZ. Applied Nonlinear Dynamics]. 2000. vol. 8, no. 1. pp. 29–48. (in Russian)

6. Bezruchko B.P., Smirnov D.A. Contemporary Problems in Modeling from Time Series. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya Fizika* [Izvestiya of Saratov University. New Series. Series Physics]. 2006. vol. 6, no. 1–2. pp. 3–27. (in Russian)
7. Aguirre L.A., Letellier C. Modeling Nonlinear Dynamics and Chaos: A Review. *Mathematical Problems in Engineering*. 2009. Article ID 238960. DOI: 10.1155/2009/238960.
8. Voss H.U., Timmer J., Kurths J. Nonlinear Dynamical System Identification from Uncertain and Indirect Measurements. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2004. vol. 14, no. 6. pp. 1905–1933. DOI: 10.1142/S0218127404010345.
9. Gotmare A., Bhattacharjee S.S., Patidar R., George N.V. Swarm and Evolutionary Computing Algorithms for System Identification and Filter Design: A Comprehensive Review. *Swarm and Evolutionary Computation*. 2017. vol. 32. pp. 68–84. DOI: 10.1016/j.swevo.2016.06.007.
10. Smirnov D.A., Vlaskin V.S., Ponomarenko V.I. Estimation of Parameters in One-Dimensional Maps from Noisy Chaotic Time Series. *Physics Letters A*. 2005. vol. 336. pp. 448–458. DOI: 10.1016/j.physleta.2004.12.092.
11. Jafari S., Sprott J.C., Pham V.-T. et al. A New Cost Function for Parameter Estimation of Chaotic Systems Using Return Maps as Fingerprints. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2014. vol. 24, no. 10. DOI: 10.1142/S021812741450134X.
12. Liu L., Hu J., Li H. et al. Parameter Estimation of a Class One-Dimensional Discrete Chaotic System. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2011. Article ID 696017. DOI: 10.1155/2011/696017.
13. Nakamura T., Hirata Y., Judd K. et al. Improved Parameter Estimation from Noisy Time Series for Nonlinear Dynamical Systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2007. vol. 17, no. 5. pp. 1741–1752. DOI: 10.1142/S021812740701804X.
14. Walker D.M. Parameter Estimation Using Kalman Filters with Constraints. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2006. vol. 16, no. 4. pp. 1067–1078. DOI: 10.1142/S0218127406015325.
15. Judd K. Fifty Years of Forecasting Chaos and the Shadow of Imperfect Models. *Nonlinear Theory and Its Applications*. 2016. vol. 7, no. 2. pp. 234–249. DOI: 10.1587/nolta.7.234.
16. Leung H., Zhu Z., Ding Z. An Aperiodic Phenomenon of the Extended Kalman Filter in Filtering Noisy Chaotic Signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2000. vol. 48, no. 6. pp. 1807–1810. DOI: 10.1109/78.845941.
17. Feng J., Fan H., Tse C.K. Convergence Analysis of the Unscented Kalman Filter for Filtering Noisy Chaotic Signals. *Proceedings of the 2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS) (New Orleans, USA, May 27–30, 2007)*, 2007. pp. 1681–1684. DOI: 10.1109/ISCAS.2007.377916.
18. Kurzhanski A.B., Furasov V.D. Identification of Nonlinear Processes: Guaranteed Estimates. *Automation and Remote Control*. 1999. vol. 60, no. 6. pp. 814–828.
19. Jaulin L., Kieffer M., Didrit O., Walter E. *Applied Interval Analysis*. Springer, 2001. 379 p. DOI: 10.1007/978-1-4471-0249-6.
20. Raissi T., Ramdani N., Candau Y. Set Membership State and Parameter Estimation for Systems Described by Nonlinear Differential Equations. *Automatica*. 2004. vol. 40, no. 10. pp. 1771–1777. DOI: 10.1016/j.automatica.2004.05.006.

21. Abdallah F., Gning A., Bonnifait P. Box Particle Filtering for Nonlinear State Estimation Using Interval Analysis. *Automatica*. 2008. vol. 44, no. 3. pp. 807–815. DOI: 10.1016/j.automatica.2007.07.024.
22. Kumkov S.I., Mikushina Y.V. Interval Approach to Identification of Catalytic Process Parameters. *Reliable Computing*. 2013. vol. 19, no. 2. pp. 197–214.
23. Paulen R., Villanueva M., Fikar M., Chachuat B. Guaranteed Parameter Estimation in Nonlinear Dynamic Systems Using Improved Bounding Techniques. *Proceedings of the 2013 European Control Conference (ECC) (Zurich, Switzerland, July 17–19, 2013)*, 2013. pp. 4514–4519.
24. Blanchini F., Miani S. *Set-Theoretic Methods in Control*. Birkhauser, 2015. 630 p. DOI: 10.1007/978-3-319-17933-9.
25. Prostiakov P.V. Fractal Structure for the Guaranteed Observation Problem. An Example. *Applied Mathematics Letters*. 2001. vol. 14, no. 4. pp. 507–511. DOI: 10.1016/S0893-9659(00)00185-3.
26. Shary S.P. A New Technique in Systems Analysis under Interval Uncertainty and Ambiguity. *Reliable Computing*. 2002. vol. 8, no. 5. pp. 321–418. DOI: 10.1023/A:1020505620702.
27. Sheludko A.S., Shiryayev V.I. The Algorithm of Guaranteed Parameter Estimation for One-Dimensional Chaotic Map. (in Russian) *Informatsionnye tekhnologii* [Information Technologies]. 2015. vol. 21, no. 1. pp. 30–34.
28. Sheludko A.S., Shiryayev V.I. Guaranteed State and Parameter Estimation for One-Dimensional Chaotic System. *Proceedings of the 2nd International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM) (Chelyabinsk, Russia, May 19–20, 2016)*, 2016. DOI: 10.1109/ICIEAM.2016.7911580.