УДК 517.977.56 DOI: 10.14529/cmse200205

КВАЗИОСОБЫЕ УПРАВЛЕНИЯ В ОДНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫМИ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

© 2020 К.Б. Мансимов[1,2], Т.Ф. Мамедова[2]

[1]*Бакинский государственный университет*
(Az1148 Баку, ул. ак. З. Халилова, д. 23),
[2]*Институт систем управления НАН Азербайджана*
(Az1141 Баку, ул. Б. Вахабзаде, д. 9)
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com, kmansimov@mail.ru
Поступила в редакцию: 11.07.2019

Изучается одна ступенчатая (т.е. многоэтапная) задача оптимального управления терминального типа функционалом качества, описываемая дискретными двухпараметрическими системами уравнений типа Форназини—Маркезини при предположении выпуклости областей управления. Дискретная двухпараметрическая система уравнений типа Форназини—Маркезини представляет собой разностный аналог системы гиперболических уравнений второго порядка (иногда такие системы уравнений в западной литературе называют также 2D системами). Применяя модифицированный аналог метода приращений, получено специальное разложение функционала качества второго порядка с помощью линеаризованных разностных систем уравнений.

Применяя один вариант метода приращений, установлено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме линеаризованного (дифференциального) условия максимума. Отдельно изучен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). Используя представления решений линеаризованных разностных систем уравнений с помощью специальных формул приращения функционала качества, выведены конструктивно проверяемые квадратичные необходимые условия оптимальности квазиособых управлений.

Ключевые слова: дискретная двухпараметрическая система уравнений типа Форназини—Маркезини, линеаризованное необходимое условие оптимальности, ступенчатая задача, оптимальное управление, квазиособое управление, выпуклая область управления.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Мансимов К.Б., Мамедова Т.Ф. Квазиособые управления в одной ступенчатой задаче управления дискретными двухпараметрическими системами // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2020. Т. 9, № 2. С. 68–83. DOI: 10.14529/cmse200205.

Введение

Различные аспекты задач оптимального управления, описываемые дискретными двухпараметрическими системами типа Форназини—Маркезини, изучены в работах [1–12] и др. Подобными системами описываются многие реальные процессы [1–4]. Заметим, что модели Форназини—Маркезини представляют собой разностный аналог системы Гурса—Дарбу, т.е. разностный аналог системы гиперболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Гурса. Для таких задач оптимального управления изучены вопросы, связанные управляемостью и наблюдаемостью, а также с выводом различных необходимых и достаточных условий оптимальности [3–12]. Многие управляемые процессы являются многоэтапными. Задачи оптимального управления такими процессами называют задачами оптимального управления с переменной структурой составными задачами оптимального управления, или же ступенчатыми задачами оптимального управления. (см., например, [13–18]). К настоящему времени изучены ряд ступенчатых (составных, многоэтапных) задач оптимального управления, а также задачи оптимального управления с переменной структурой, описываемые обыкновенными дифференциальными, а также разностными уравнениями (см., например, [13–18]). В этих работах, в основном, установлены различные необходимые условия оптимальности первого порядка. Исследованию особых управлений в ступенчатых задачах оптимального управления, описываемых обыкновенными дифференциальными или же разностными уравнениями посвящены, например, работы [16, 18].

В предлагаемой работе исследуется одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая дискретной двухпараметрической системой при выпуклости областей управления. Подобная ступенчатая задача оптимального управления рассматривается впервые. Целью настоящей работы является при помощи аналога метода приращений вывод необходимого условия оптимальности в форме линеаризованного (дифференциального) принципа максимума и исследование случая вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). Используя специальное разложение приращения функционала качества, удалось получить конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности. Установлен аналог линеаризованного условия максимума. Заметим, что в отличие от непрерывного случая в дискретных задачах оптимального управления, линеаризованный принцип максимума не является следствием дискретного принципа максимума. Далее изучен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай [11, 18, 19]). Доказано необходимое условие оптимальности квазиособых управлений.

Структура работы следующая. В разделе 1 приводится постановка задачи. Далее в разделе 2 вычисляется специальное приращение критерия качества и устанавляется необходимые условия оптимальности. В заключении подводятся итоги проведенного исследования и обсуждаются возможные направления продолжения работы.

1. Постановка задачи

Предположим, что управляемый процесс описывается системой нелинейных разностных уравнений

$$z(t+1,x+1)=f(t,x,z(t,x),u(t,x)),$$
$$(t,x)\in D_1=\{(t,x):\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1-1;\ x=x_0,x_0+1,\dots,X-1\}, \tag{1}$$
$$y(t+1,x+1)=g(t,x,y(t,x),v(t,x)),$$
$$(t,x)\in D_2=\{(t,x):\ t=t_1,t_1+1,\dots,t_2-1;\ x=x_0,x_0+1,\dots,X-1\}, \tag{2}$$

с краевыми условиями

$$\begin{gathered} z(t_0,x)=a(x),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,\\ z(t,x_0)=b_1(t),\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1,\\ a(x_0)=b_1(t_0), \end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered} y(t_1,x)=G(z(t_1,x)),\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,\\ y(t,x_0)=b_2(t),\ t=t_1,t_1+1,\dots,t_2,\\ G(z(t_1,x_0))=b_2(t_1). \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $f(t,x,z,u)$, $(g(t,x,y,v))$ — заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по (z,u) $((y,v))$

до второго порядка включительно, $a(x)$, $b_i(t)$, $i=1,2$ — заданные дискретные вектор-функции соответствующих размерностей, $G(z)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая m-мерная вектор-функция, t_0, t_1, t_2, x_0, X — заданные числа, причем разности t_2-t_0 и $X-x_0$ есть натуральные числа, $u(t,x)$ $(v(t,x))$ — r (q)-мерный дискретный вектор управляющих воздействий, со значениями из заданного непустого, выпуклого и ограниченного множества U (V), т.е.

$$\begin{aligned} &u(t,x)\in U\subset R^r,\ (t,x)\in D_1,\\ &v(t,x)\in V\subset R^q,\ (t,x)\in D_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Пару $(u(t,x),v(t,x))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением.

На решениях краевой задачи (1)–(4), порожденных всевозможными допустимыми управлениями определим функционал

$$S(u,v)=\phi_1(z(t_1,X))+\phi_2(y(t_2,X)). \tag{6}$$

Здесь $\phi_1(z)$, $\phi_2(y)$ — заданные дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции.

Допустимое управление $(u(t,x),v(t,x))$, доставляющий минимум функционалу (6), при ограничениях (1)–(5) назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $(u(t,x),v(t,x),z(t,x),y(t,x))$ — оптимальным процессом.

Заметим, что условия выпуклости областей управления позволят получить специальное приращение функционала качества.

2. Специальное разложение функционала качества и необходимые условия оптимальности

Пусть $(u^o(t,x),v^o(t,x),z^o(t,x),y^o(t,x))$ — фиксированный допустимый процесс. Обозначим $(\bar{u}(t,x)=u^o(t,x)+\Delta u(t,x),\ \bar{v}(t,x)=v^o(t,x)+\Delta v(t,x),\ \bar{z}(t,x)=z^o(t,x)+\Delta z(t,x),\ \bar{y}(t,x)=y^o(t,x)+$ $+\Delta y(t,x))$ произвольный допустимый процесс и введем функции Гамильтона—Понтрягина

$$H(t,x,z,u,\psi^o)=\psi^{o'}\cdot f(t,x,z,u),$$

$$M(t,x,y,v,p^o)=p^{o'}\cdot g(t,x,y,v),$$

где ψ^o, p^o — пока неизвестные вектор-функции соответствующих размерностей, штрих $(')$ — операция транспонирования.

Запишем приращение функционала качества

$$\Delta S(u^o,v^o)=S(\bar{u},\bar{v})-S(u^o,v^o)=\left[\phi_1(\bar{z}(t_1,X))-\phi_1(z^o(t_1,X))\right]+\left[\phi_2(\bar{y}(t_2,X))-\phi_2(y^o(t_2,X))\right]. \tag{7}$$

Ясно, что приращение $(\Delta z(t,x),\Delta y(t,x))$ является решением краевой задачи

$$\Delta z(t+1,x+1)=f(t,x,\bar{z}(t,x),\bar{u}(t,x))-f(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x)), \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\Delta z(t_0,x)=0,\quad x=x_0,x_0+1,\dots,X,\\ \Delta z(t,x_0)=0,\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1,\end{gathered}\tag{9}$$

$$\Delta y(t+1,x+1)=g(t,x,\bar y(t,x),\bar v(t,x))-g(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x)),\tag{10}$$

$$\begin{gathered}\Delta y(t_1,x)=G(x,\bar z(t_1,x))-G(x,z^o(t_1,x)),\\ \Delta y(t,x_0)=0,\ \ t=t_1,t_1+1,\dots,t_2.\end{gathered}\tag{11}$$

С учетом (7), (8) получаем, что

$$\begin{gathered}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o'}(t,x)\Delta z(t+1,x+1)=\\ =\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[H(t,x,\bar z(t,x),\bar u(t,x),\psi_1^o(t,x))-H(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x))\right],\end{gathered}\tag{12}$$

$$\begin{gathered}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t,x)\Delta y(t+1,x+1)=\\ =\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[M(t,x,\bar y(t,x),\bar v(t,x),\psi_2^o(t,x))-M(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x))\right].\end{gathered}\tag{13}$$

Сделая замену переменных $t+1=\tau$, $x+1=s$, получим

$$\begin{gathered}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o'}(t,x)\Delta z(t+1,x+1)=\sum_{t=t_0+1}^{t_1}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{o'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)=\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{o'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)-\\ -\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{o'}(t_0-1,x-1)\Delta z(t_0,x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_1^{o'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x)=\psi_1^{o'}(t_1-1,X-1)\Delta z(t_1,X)-\\ -\psi_1^{o'}(t_1-1,x_0-1)\Delta z(t_1,x_0)+\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o'}(t_1-1,x-1)\Delta z(t_1,x)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1^{o'}(t-1,X-1)\Delta z(t,X)-\\ -\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1^{o'}(t-1,x_0-1)\Delta z(t,x_0)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o'}(t-1,x-1)\Delta z(t,x),\end{gathered}\tag{14}$$

$$\begin{gathered}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t,x)\Delta y(t+1,x+1)=\sum_{t=t_1+1}^{t_2}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)=\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o'}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x)-\\ -\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o'}(t_1-1,x-1)\Delta y(t_1,x)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0+1}^{X}\psi_2^{o'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x)=\psi_2^{o'}(t_2-1,X-1)\Delta y(t_2,X)-\\ -\psi_2^{o'}(t_2-1,x_0-1)\Delta y(t_2,x_0)+\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t_2-1,x-1)\Delta y(t_2,x)-\psi_2^{o'}(t_1-1,X-1)\Delta y(t_1,X)+\\ +\psi_2^{o'}(t_1-1,x_0-1)\Delta y(t_1,x_0)-\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t_1-1,x-1)\Delta y(t_1,x)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2^{o'}(t-1,X-1)\Delta y(t,X)-\\ -\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2^{o'}(t-1,x_0-1)\Delta y(t,x_0)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}(t-1,x-1)\Delta y(t,x).\end{gathered}\tag{15}$$

Полагая

$$N(\psi_2^o,z,x)=\psi_2^{o'}(t_1-1,x-1)y(t_1,x)\equiv\psi_2^{o'}(t_1-1,x-1)G(x,z(t_1,x)),$$

учитывая тождества (14), (15) в (7) и используя формулу Тейлора, имеем

$$
\begin{aligned}
&\Delta S\left(u^o,v^o\right)=\frac{\partial\phi_1\left(z^o\left(t_1,X\right)\right)}{\partial z}\Delta z\left(t_1,X\right)+\frac{1}{2}\Delta z'\left(t_1,X\right)\frac{\partial^2\phi_1\left(z^o\left(t_1,X\right)\right)}{\partial z^2}\Delta z\left(t_1,X\right)+\\
&+\frac{\partial\phi_2\left(y^o\left(t_2,X\right)\right)}{\partial y}\Delta y\left(t_2,X\right)+\frac{1}{2}\Delta y'\left(t_2,X\right)\frac{\partial^2\phi_2\left(y^o\left(t_2,X\right)\right)}{\partial y^2}\Delta y\left(t_2,X\right)+\psi_1^{o'}\left(t_1-1,X-1\right)\Delta z\left(t_1,X\right)+\\
&+\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o'}\left(t_1-1,x-1\right)\Delta z\left(t_1,x\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\psi_1^{o'}\left(t-1,X-1\right)\Delta z\left(t,X\right)+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_1^{o'}\left(t-1,x-1\right)\Delta z\left(t,x\right)-\\
&-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}H_u\left(t,x,z^o\left(t,x\right),\bar{u}\left(t,x\right),\psi^o\left(t,x\right)\right)\Delta u\left(t,x\right)-\\
&-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}H'_z\left(t,x,z^o\left(t,x\right),u^o\left(t,x\right),\psi^o\left(t,x\right)\right)\Delta z\left(t,x\right)-\\
&-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta u'\left(t,x\right)H_{uz}\left(t,x,z^o\left(t,x\right),\bar{u}\left(t,x\right),\psi^o\left(t,x\right)\right)\Delta z\left(t,x\right)-\\
&-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'\left(t,x\right)H_{zz}\left(t,x,z^o\left(t,x\right),u^o\left(t,x\right),\psi_1^o\left(t,x\right)\right)\Delta z\left(t,x\right)-\\
&-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta u'\left(t,x\right)H_{uu}\left(t,x,z^o\left(t,x\right),\bar{u}\left(t,x\right),\psi_1^o\left(t,x\right)\right)\Delta u\left(t,x\right)+\\
&+o_1\left(\left\|\Delta z\left(t_1,X\right)\right\|^2\right)+o_2\left(\left\|\Delta y\left(t_2,X\right)\right\|^2\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}o_3\left(\left[\left\|\Delta z\left(t,x\right)\right\|+\left\|\Delta u\left(t,x\right)\right\|\right]^2\right)+\\
&+\psi_2^{o'}\left(t_2-1,X-1\right)\Delta y\left(t_2,X\right)-\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}\left(t_2-1,x-1\right)\Delta y\left(t_2,x\right)-N_z\left(\psi_2^o,z^o,X\right)\Delta z\left(t_1,X\right)+\\
&+\frac{1}{2}\Delta z'\left(t_1,X\right)N_{zz}\left(\psi_2^o,z^o\left(t_1,X\right)\right)\Delta z\left(t_1,X\right)-\sum_{x=x_0}^{X-1}N'_z\left(\psi_2^o,z^o\left(t_1,x\right),x\right)\Delta z\left(t_1,x\right)-\\
&-\frac{1}{2}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'\left(t_1,x\right)N_{zz}\left(\psi_2^o,z^o\left(t_1,x\right),x\right)\Delta z\left(t_1,x\right)-\sum_{x=x_0}^{X-1}o_4\left(\left\|\Delta z\left(t_1,x\right)\right\|^2\right)+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\psi_2^{o'}\left(t-1,X-1\right)\Delta y\left(t,X\right)+\\
&+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\psi_2^{o'}\left(t-1,x-1\right)\Delta y\left(t,x\right)--\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}M'_u\left(t,x,y^o\left(t,x\right),\bar{v}\left(t,x\right),\psi_2^o\left(t,x\right)\right)\Delta v\left(t,x\right)-\\
&-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta v'\left(t,x\right)M_y\left(t,x,y^o\left(t,x\right),\bar{v}\left(t,x\right),\psi_2^o\left(t,x\right)\right)\Delta y\left(t,x\right)-\\
&-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta z'\left(t,x\right)M_{yy}\left(t,x,y^o\left(t,x\right),v^o\left(t,x\right),\psi_2^o\left(t,x\right)\right)\Delta y\left(t,x\right)-\\
&-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta v'\left(t,x\right)M_{yy}\left(t,x,y^o\left(t,x\right),\bar{v}\left(t,x\right),\psi_2^o\left(t,x\right)\right)\Delta v\left(t,x\right)-\\
&-\sum_{t=t_0}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}o_5\left(\left[\left\|\Delta y\left(t,x\right)+\Delta v\left(t,x\right)\right\|\right]^2\right)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}M'_y\left(t,x,y^o\left(t,x\right),v^o\left(t,x\right),\psi_2^o\left(t,x\right)\right)\Delta y\left(t,x\right).
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Здесь и далее $o_i(\alpha),i=\overline{1,5}$ означает, что $o_i(\alpha)/\alpha^2\to 0$ при $\alpha\to 0.$

Если предполагать, что $\left(\psi_1^o\left(t,x\right),\psi_2^o\left(t,x\right)\right)$ является решением системы разностных уравнений

$$
\psi_1^o\left(t-1,x-1\right)=H_z\left(t,x\right), \tag{17}
$$

$$
\psi_1^o\left(t_1-1,x-1\right)=G'_z\left(x,z^o\left(t_1,x\right)\right)\psi_1^o\left(t_1-1,x\right),
$$

$$
\begin{gathered}
\psi_1^o(t-1,X-1)=0, \\
\psi_1^o(t_1-1,X-1)=-\frac{\partial\phi_1\left(z^o(t_1,X)\right)}{\partial z}+G_z'\left(x,z^o(t_1,x)\right)\psi_2^o(t_1-1,X-1), \\
\psi_2^o(t-1,x-1)=M_y(t,x), \\
\psi_2^o(t-1,X-1)=0, \\
\psi_2^o(t_2-1,x-1)=0, \\
\psi_2^o(t_2-1,X-1)=-\frac{\partial\phi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y},
\end{gathered}
\tag{18}
$$

то формула приращения (16) примет вид

$$
\begin{gathered}
\Delta S(u^o,v^o)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}H_u'\left(t,x,z^o(t,x),\bar u(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\Delta u(t,x)+ \\
+\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)\frac{\partial^2\phi_1\left(z^o(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\Delta z(t_1,X)-\frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\Delta z'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),\bar u(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\Delta z(t,x)\cdot \\
+2\Delta u'(t,x)H_{uz}\left(t,x,z^o(t,x),\bar u(t,x),\psi^o(t,x)\right)\Delta z(t,x)+ \\
+\Delta u'(t,x)H_{uu}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi^o(t,x)\right)\Delta u(t,x)\Big]+ \\
+\frac{1}{2}\Delta y'(t_2,X)\frac{\partial^2\phi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\Delta y(t_2,X)-\frac{1}{2}\Delta z'(t_1,X)N_{zz}\left(\psi_2^o,z^o(t_1,X),X\right)\Delta z(t_1,X)- \\
-\frac{1}{2}\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\Delta y'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\Delta y(t,x)+ \\
+2\Delta v'(t,x)M_{vy}\left(t,x,y^o(t,x),\bar v(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\Delta y(t,x)+ \\
+\Delta v'(t,x)M_{vv}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\Delta vv(t,x)\Big]+o_1\left(\left\|\Delta z(t_1,X)\right\|^2\right)- \\
-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}M_v'\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\Delta v(t,x)+ \\
+o_2\left(\left\|\Delta y(t_2,X)\right\|^2\right)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}o_3\left(\left[\left\|\Delta z(t,x)\right\|+\left\|\Delta u(t,x)\right\|\right]^2\right)-\sum_{x=x_0}^{X-1}o_4\left(\left\|\Delta z(t_1,x)\right\|^2\right)- \\
-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}o_5\left(\left[\left\|\Delta y(t,x)\right\|+\left\|\Delta v(t,x)\right\|\right]^2\right).
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Пусть $\varepsilon\in[0,1]$ — произвольное число, а $u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_1$, $v(t,x)\in V$, $(t,x)\in D_2$ — произвольные допустимые управляющие функции. Используя произвольность допустимых управляющих функций $\bar u(t,x)$, $\bar v(t,x)$, вместо них возьмем такие специальные допустимые дискретные управляющие функции $\bar u(t,x;\varepsilon)$, $\bar v(t,x;\varepsilon)$, чтобы выполнялись соотношения

$$
\bar z(t+1,x+1;\varepsilon)\equiv f\left(t,x,\bar z(t,x;\varepsilon),\bar u(t,x;\varepsilon)\right)\equiv f\left(t,x,\bar z(t,x;\varepsilon),u^o(t,x)\right)+\varepsilon\left[u(t,x)-u^o(t,x)\right],\tag{20}
$$

$$
\begin{gathered}
\bar z(t_0,x;\varepsilon)=\alpha(x),\ x=x_0,x_0+1,\dots,X, \\
\bar z(t,x_0;\varepsilon)=\beta_1(t),\ t=t_0,t_0+1,\dots,t_1,
\end{gathered}
\tag{21}
$$

$$
\bar y(t+1,x+1;\varepsilon)\equiv g\left(t,x,\bar y(t,x;\varepsilon),\bar v(t,x;\varepsilon)\right)\equiv g\left(t,x,\bar y(t,x;\varepsilon),v^o(t,x)\right)+\varepsilon\left[v(t,x)-v^o(t,x)\right],\tag{22}
$$

$$\bar{y}(t_1,x;\varepsilon)=G(x,\bar{z}(t_1,x;\varepsilon)),\ y(t,x_0;\varepsilon)=\beta_2(t). \tag{23}$$

Это возможно в силу выпуклости множеств U и V.

Положим по определению

$$\alpha(t,x)=\left.\frac{\partial\bar{z}(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0},$$

$$\beta(t,x)=\left.\frac{\partial\bar{y}(t,x;\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}.$$

Учитывая условия, наложенные на правые части уравнений (1), (2), при помощи (20)–(21) получаем, что

$$\Delta z(t,x;\varepsilon)=\bar{z}(t,x;\varepsilon)-z^o(t,x)=\varepsilon\alpha(t,x)+o(\varepsilon;t,x), \tag{24}$$

$$\Delta y(t,x;\varepsilon)=\bar{y}(t,x;\varepsilon)-y^o(t,x)=\varepsilon\beta(t,x)+o(\varepsilon;t,x), \tag{25}$$

где $\alpha(t,x)$ и $\beta(t,x)$ являются решениями краевых задач

$$\alpha(t+1,x+1)=\frac{\partial f(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x))}{\partial z}\alpha(t,x)+\frac{\partial f(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x))}{\partial u}(u(t,x)-u^o(t,x)), \tag{26}$$

$$\alpha(t_0,x)=0,\ \alpha(t,x_0)=0, \tag{27}$$

$$\beta(t+1,x+1)=\frac{\partial g(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x))}{\partial y}\beta(t,x)+\frac{\partial g(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x))}{\partial v}(v(t,x)-v^o(t,x)), \tag{28}$$

$$\beta(t_1,x)=G_z(x,z(t_1,x))\alpha(t_1,x),\ \beta(t,x_0)=0. \tag{29}$$

Учитывая разложения (24), (25), в формуле приращение (19) получим

$$\begin{aligned}
&\Delta S_\varepsilon(u^o(t,x),v^o(t,x))=S(\bar{u}(t,x;\varepsilon),v^o(t,x;\varepsilon))-S(u^o(t,x),v^o(t,x))=\\
&=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}H'_u(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x))(u(t,x)-u^o(t,x))-\\
&-\varepsilon\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}M'_v(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x))(v(t,x)-v^o(t,x))+\\
&+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg[\alpha'(t_1,X)\frac{\partial^2\phi_1(z^o(t_1,X))}{\partial z^2}\alpha(t_1,X)-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\alpha'(t,x)H_{zz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi^o(t,x))\alpha(t,x)+\\
&+2(u(t,x)-u^o(t,x))'H_{uz}(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi^o(t,x))\alpha(t,x)+\\
&+(u(t,x)-u^o(t,x))'H_{uu}(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi^o(t,x))\alpha(t,x)(u(t,x)-u^o(t,x))\Big]\Bigg]+\\
&+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg[\beta'(t_2,X)\frac{\partial^2\phi_2(y^o(t_2,X))}{\partial y^2}\beta(t_2,X)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta'(t,x)M_{yy}(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x))\times\\
&\times\beta(t,x)+2(v(t,x)-v^o(t,x))'M_{vy}(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x))\beta(t,x)+\\
&+(v(t,x)-v^o(t,x))'M_{vv}(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x))(v(t,x)-v^o(t,x))\Bigg]-\\
&-\frac{\varepsilon^2}{2}\alpha'(t_1,X)N_{zz}(\psi_2^o,z^o(t_1,X),X)\alpha(t_1,X)+o(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{30}$$

Из разложения (33) в силу независимости и произвольности допустимых управлений $u(t,x)$ и $v(t,x)$ получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. Если множества U и V выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $\left(u^o(t,x), v^o(t,x)\right)$ в задаче (1)–(6) необходимо, чтобы неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} H_u'\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\left(u(t,x)-u^o(t,x)\right)\le 0\,, \tag{31}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} M_v'\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\left(v(t,x)-v^o(t,x)\right)\le 0\,, \tag{32}$$

выполнялись для всех $u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_1$, $v(t,x)\in V$, $(t,x)\in D_2$ соответственно.

Пара соотношений (31), (36) есть аналог линеаризованного условия максимума Понтрягина для рассматриваемой задачи.

Теперь рассмотрим случай вырождения аналога линеаризованного условия максимума.

Определение. Допустимое управление $\left(u^o(t,x), v^o(t,x)\right)$ назовем квазиособым управлением в задаче (1)–(6), если для всех $u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_1$, $v(t,x)\in V$, $(t,x)\in D_2$ выполняются соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} H_u'\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\left(u(t,x)-u^o(t,x)\right)= 0\,, \tag{33}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} M_v'\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\left(v(t,x)-v^o(t,x)\right)= 0\,. \tag{34}$$

Случай выполнения тождеств (33), (34) назовем квазиособым случаем.

В квазиособом случае из разложения (33) вытекает справедливость утверждения.

Теорема 2. При сделанных предположениях для оптимальности квазиособого управления $\left(u^o(t,x), v^o(t,x)\right)$ необходимо, чтобы вдоль процесса $\left(u^o(t,x),v^o(t,x),z^o(t,x),y^o(t,x)\right)$ выполнялись неравенства

$$\begin{aligned}
&1)\quad \alpha'(t_1,X)\left[\frac{\partial^2\phi_1\left(z^o(t_1,X)\right)}{\partial z^2}-N_{zz}\left(\psi_2^o,z^o(t_1,X)\right)\right]\alpha(t_1,X)-\\
&-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\alpha'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi^o(t,x)\right)\alpha(t,x)+\\
&+2\left(u(t,x)-u^o(t,x)\right)' H_{uz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi^o(t,x)\right)\alpha(t,x)+\\
&+\left(u(t,x)-u^o(t,x)\right)' H_{uu}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi^o(t,x)\right)\left(u(t,x)-u^o(t,x)\right)\Big]-\\
&-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta_1'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\beta_1(t,x)+\beta_1'(t_2,X)\frac{\partial^2\phi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_1(t_2,X)\ge 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

где $\alpha(t,x)$ есть решение краевой задачи (26)–(27), а $\beta_1(t,x)$ есть решение задачи

$$\beta_1(t+1,x+1)=g_y\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x)\right)\beta_1(t,x), \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\beta_1(t_1,x)=G_z\left(x,z^o(t_1,x)\right)\alpha(t_1,x),\\ \beta_1(t,x_0)=0,\end{gathered} \tag{37}$$

$$\begin{gathered}\text{2) } \beta_2'(t_2,X)\frac{\partial^2\phi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_2(t_2,X)-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Big[\beta_2'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\times\\ \times\beta_2(t,x)+2\left(v(t,x)-v^o(t,x)\right)'M_{vy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\beta_2(t,x)+\\ +\left(v(t,x)-v^o(t,x)\right)'M_{vv}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\left(v(t,x)-v^o(t,x)\right)\Big]\geq 0,\end{gathered} \tag{38}$$

где $\beta_2(t,x)$ есть решение задачи

$$\beta_2(t+1,x+1)=g_z\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x)\right)\beta_2(t,x)+g_v\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x)\right)\left(v(t,x)-v^o(t,x)\right), \tag{39}$$

$$\begin{gathered}\beta_2(t_1,x)=0,\\ \beta_2(t,x_0)=0.\end{gathered} \tag{40}$$

Неравенства (35), (38) являются неявными необходимыми условиями оптимальности особых управлений.

Используя их, получим явное необходимое условие оптимальности.

Решение $\alpha(t,x)$ краевой задачи (26)–(27) допускает представление [8]

$$\alpha(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\tau,s)f_u\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s)\right)\left(u(\tau,s)-u^o(\tau,s)\right), \tag{41}$$

где $R_1(t,x;\tau,s)$ $(n\times n)$ матричная функция — решение задачи

$$\begin{gathered}R_1(t,x;\tau-1,s-1)=R(t,x;\tau,s)f_z\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s)\right),\\ R_1(t,x;\tau-1,x-1)=0\\ R_1(t,x;t-1,s-1)=0\\ R_1(t,x;t-1,x-1)=E,\end{gathered}$$

(E_1 — $(n\times n)$ единичная матрица).

Через $R_2(t,x;\tau,s)$ обозначим $(m\times m)$ матричную функцию, являющуюся решением задачи

$$\begin{gathered}R_2(t,x;\tau-1,s-1)=R_2(t,x;\tau,s)g_y\left(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s)\right),\\ R_2(t,x;\tau-1,x-1)=0\\ R_2(t,x;t-1,s-1)=0\\ R_2(t,x;t-1,x-1)=E_2,\end{gathered}$$

(E_2— $(m\times m)$ единичная матрица).

Тогда решения задач (36)–(37) и (39)–(40) допускают соответственно представления

$$\beta_1(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q(t,x;\tau,s)f_u\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s)\right)\left(u(\tau,s)-u^o(\tau,s)\right), \tag{42}$$

$$\beta_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)g_v\left(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s)\right)\left(v(\tau,s)-v^o(\tau,s)\right), \tag{43}$$

где $Q(t,x;\tau,s)$ определяется формулой

$$Q(t,x;\tau,s)=R_2(t,x;t_1-1,x-1)G_z\left(x,z^o(t_1,x)\right)R_1(t_1,x;\tau,s)+$$
$$+\sum_{\beta=s+1}^{x-1}R_2(t,x;t_1-1,\beta-1)G_z\left(x,z^o(t_1,x)\right)R_1(t_1,\beta;\tau,s).$$

Используя представления (41), (42), будем иметь

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\alpha'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\alpha(t,x)=$$
$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\tau,s)f_u\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s)\right)\left(u(\tau,s)-u^o(\tau,s)\right)\right)'\times$$
$$\times H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\left(\sum_{\ell=t_0}^{t-1}\sum_{m=x_0}^{x-1}R(t,x;\ell,m)f_u\left(\ell,m,z^o(\ell,m),u^o(\ell,m)\right)\left(u(m,\ell)-u^o(m,\ell)\right)\right)$$
$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{x-1}f_u'\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s)\right)\left(u(\tau,s)-u^o(\tau,s)\right)'\times$$
$$\times\left\{\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_1-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R'(t,x;\tau,s)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)R(t,x;\ell,m)\right\}\times \tag{44}$$
$$\times\Delta_{u(\ell,m)}f\left(\ell,m,z^o(\ell,m),u^o(\ell,m)\right)\left(u(m,\ell)-u^o(m,\ell)\right),$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v(t,x)}H_z'\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)\alpha(t,x)= \tag{45}$$
$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left(\sum_{\tau=t+1}^{t_1-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}\left(u(\tau,s)-u^o(\tau,s)\right)H_{uz}\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s),\psi_1^o(\tau,s)\right)R_1(\tau,s;t,x)\right)\times$$
$$\times f_u\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x)\right)\left(u(t,x)-u^o(t,x)\right),$$

$$\alpha'(t_1,X)\frac{\partial^2\phi_1\left(z^o(t_1,X)\right)}{\partial z^2}\alpha(t_1,X)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\left(u(\tau,s)-u^o(\tau,s)\right)'f_u'\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s)\right)\times$$
$$\times R_1(t,X;\tau,s)\frac{\partial^2\phi_1\left(z^o(t_1,X)\right)}{\partial z^2}R_1(t_1,X;\ell,m)f_u\left(\ell,m,z^o(\ell,m),u^o(\ell,m)\right)\left(u(m,\ell)-u^o(m,\ell)\right), \tag{46}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta_1'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\beta_1(t,x)=$$
$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left(\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}Q_1(t,x;\tau,s)f_u\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s)\right)\left(u(\tau,s)-u^o(\tau,s)\right)\right)'\times$$
$$\times M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\left(\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{x-1}Q(t,x;\ell,m)f\left(\ell,m,z^o(\ell,m),u^o(\ell,m)\right)\left(u(m,\ell)-u^o(m,\ell)\right)\right)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\left(u(\tau,s)-u^o(\tau,s)\right)f_u'\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s)\right)\times$$
$$\times\left\{\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}Q_1'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\right\}f_u\left(\ell,m,z^o(\ell,m),u^o(\ell,m)\right)\times \tag{47}$$
$$\times\left(u(m,\ell)-u^o(m,\ell)\right),$$

$$\beta_1'(t_2,X)\frac{\partial^2\phi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_1(t_2,X)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\left(u(\tau,s)-u^o(\tau,s)\right)'f\left(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s)\right)\times$$
$$\times Q'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\phi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\times \tag{48}$$
$$\times\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}Q(t_2,X;\ell,m)f\left(\ell,m,z^o(\ell,m),u^o(\ell,m)\right)\left(u(m,\ell)-u^o(m,\ell)\right).$$

Далее при помощи представления (46) получаем, что

$$\beta_2'(t_2,X)\frac{\partial^2\phi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}\beta_2(t_2,X)=\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_1}^{t_2-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\left(v(\tau,s)-v^o(\tau,s)\right)'g_v'\left(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s)\right)\times$$
$$\times R_2'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\phi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}R_2(t_2,X;\ell,m)g_v\left(\ell,m,y^o(\ell,m),v^o(\ell,m)\right)\left(v(m,\ell)-v^o(m,\ell)\right), \tag{49}$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left(v(t,x)-v^o(t,x)\right)'M_{vy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\beta_2(t,x)= \tag{50}$$
$$=\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{t_2-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}\left(v(\tau,s)-v^o(\tau,s)\right)'M_{vy}'\left(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s),\psi_2^o(\tau,s)\right)R_2(\tau,s;t,x)\right]\times$$
$$\times g_v\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x)\right)\left(v(t,x)-v^o(t,x)\right),$$

$$\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\beta_2'(t,x)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)\beta_2(t,x)=$$
$$=\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_1}^{t_2-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}\left(v(\tau,s)-v^o(\tau,s)\right)'g_v'\left(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s)\right)\times \tag{51}$$
$$\times\left\{\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R_2'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)R_2(t,x;\ell,m)\right\}\times$$
$$\times g_v\left(\ell,m,y^o(\ell,m),v^o(\ell,m)\right)\left(v(m,\ell)-v^o(m,\ell)\right).$$

Введем матричные функции $K(\tau,s,\ell,m)$, $L(\tau,s,\ell,m)$ посредством формул

$$K(\tau,s,\ell,m)=\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_1-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R_1'(t,x;\tau,s)H_{zz}\left(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x)\right)R(t,x;\ell,m)-$$
$$-R_1'(t_1,X;\tau,s)\frac{\partial^2\phi_1\left(z^o(t_1,X)\right)}{\partial z^2}R_1(t_1,X;\ell,m)+$$
$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}Q_1'(t,x;\tau,s)M_{yy}\left(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x)\right)-$$
$$-Q'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\phi_2\left(y^o(t_2,X)\right)}{\partial y^2}Q(t_2,X;\ell,m),$$

$$L(\tau,s,\ell,m)=-R_2'(t_2,X;\tau,s)\frac{\partial^2\phi_2(y^o(t_2,X))}{\partial y^2}R_2(t_2,X;\ell,m)+$$
$$+\sum_{t=\max(\tau,\ell)+1}^{t_2-1}\sum_{x=\max(s,m)+1}^{X-1}R_2'(t_2,X;\tau,s)M_{yy}(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x))R_2(t_2,X;\ell,m).$$

Учитывая тождества (47)–(48) и выражения для $K(\tau,s,\ell,m)$, $L(\tau,s,\ell,m)$, неравенства (38), (39) записываются в виде

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_0}^{t_1-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}(u(m,\ell)-u^o(m,\ell))'f_u'(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s))K(\tau,s,\ell,m)\times$$
$$\times f_u(\ell,m,z^o(\ell,m),u^o(\ell,m))(u(m,\ell)-u^o(m,\ell))+ \tag{52}$$
$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}(u(t,x)-u^o(t,x))'H_{uu}(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x),\psi_1^o(t,x))(u(t,x)-u^o(t,x))+$$
$$+2\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{t_1-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}(u(\tau,s)-u^o(\tau,s))H_{uz}'(\tau,s,z^o(\tau,s),u^o(\tau,s),\psi_1^o(\tau,s))R_1(\tau,s;t,x)\right]\times$$
$$\times f_u(t,x,z^o(t,x),u^o(t,x))(u(t,x)-u^o(t,x))\le 0,$$

$$\sum_{\tau=t_1}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}\sum_{\ell=t_1}^{t_2-1}\sum_{m=x_0}^{X-1}(v(\tau,s)-v^o(\tau,s))'g_v'(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s))L(\tau,s,\ell,m)g_v(\ell,m,y^o(\ell,m),v^o(\ell,m))+$$
$$+2\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[\sum_{\tau=t+1}^{t_2-1}\sum_{s=x+1}^{X-1}(v(\tau,s)-v^o(\tau,s))'M_{vy}'(\tau,s,y^o(\tau,s),v^o(\tau,s),\psi_2^o(\tau,s))R_2(\tau,s;t,x)\right]\times \tag{53}$$
$$\times g_v(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x))(v(t,x)-v^o(t,x))+$$
$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}(v(t,x)-v^o(t,x))'M_{vv}(t,x,y^o(t,x),v^o(t,x),\psi_2^o(t,x))(v(t,x)-v^o(t,x))\le 0.$$

Теорема 3. Пусть множества U и V выпуклы. Тогда для оптимальности квазиособого, управления $(u^o(t,x),v^o(t,x))$ необходимо, чтобы неравенства (52), (53) выполнялись для всех $u(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_1$, $v(t,x)\in V$, $(t,x)\in D_2$ соответственно.

Отметим, что неравенства (52) и (53) являются конструктивными, но довольно общими необходимыми условиями оптимальности квазиособых управлений. Тем не менее, из них, в частности, можно получить ряд более легко проверяемых, но менее информативных одноточечных необходимых условий оптимальности квазиособых управлений, используя произвольность допустимых управлений $u(t,x),v(t,x)$.

Приведем одно из них.

Следствие. При сделанных предположениях для оптимальности квазиособого управления $(u^o(t,x),v^o(t,x))$ в рассматриваемой задаче необходимо, чтобы соотношения

$$(u-u^o(\theta,\xi))\left[f_u'(\theta,\xi,z^0(\theta,\xi),u(\theta,\xi))K(\theta,\xi,\theta,\xi)f_u(\theta,\xi,z^0(\theta,\xi),u(\theta,\xi))+\right.$$
$$\left.+H_{uu}(\theta,\xi,z^o(\theta,\xi),u^o(\theta,\xi),\psi_1^o(\theta,\theta))\right](u-u^0(\theta,\xi))\le 0,$$
$$(v-v^o(\theta,\xi))\left[g_u'(\theta,\xi,y^0(\theta,\xi),v^0(\theta,\xi))L(\theta,\xi,\theta,\xi)g_u(\theta,\xi,y^0(\theta,\xi),v(\theta,\xi))+\right.$$
$$\left.+M_{vv}(\theta,\xi,y^o(\theta,\xi),v^o(\theta,\xi),\psi_2^o(\theta,\theta))\right](v-v^0(\theta,\xi))\le 0,$$

выполнялись для всех $u\in U$, $(\theta,\xi)\in D_1$, $v\in V$, $(\theta,\xi)\in D_2$, соответственно.

Заключение

В работе рассматривается одна ступенчатая задача оптимального управления, описываемая дискретным аналогом системы Гурса—Дарбу (модель Форназини—Маркезини). При предположении выпуклости области управления, применяя модифицированный вариант метода приращений, установлено необходимое условия оптимальности первого порядка в форме линеаризованного условие максимума, которое, в отличие от непрерывного случая, не является следствием дискретного принципа максимума.

Далее изучен случай вырождения линеаризованного условия максимума (квазиособый случай). При помощи новых специальных формул приращений критерия качества выведены необходимые условия оптимальности квазиособых управлений. Заметим, что условия оптимальности для таких задач оптимального управления очень мало установлены. В дальнейшем предполагается исследование поставленной задачи в предположении открытости областей управления, замкнутости областей управления, а также при наличии наложенных на состояния системы различных функциональных ограничений типа равенств и неравенств. Представляет интерес также исследование поставленной задачи с негладким критерием качества, а также изучение задачи на минимакс. Одной из актуальных задач является доказательство в рассматриваемой задаче достаточного условия оптимальности типа условий Кротова с помощью формализма Беллмана—Кротова.

Авторы выражают благодарность рецензентам за полезные замечания.

Литература

1. Fornazini E., Marchesini G. State-space realization theory of two-dimensional filters // IEEE Trans. Automat. Contr. 1976. Vol. 21, no. 4. P. 484–492. DOI: 10.1109/TAC.1976.1101305.
2. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Springer, 1985. 399 p. DOI: 10.1007/BFb0005617.
3. Гайшун И.В., Хоанг В. Условия полной управляемости дискретных двухпараметрических систем // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 2. С. 187–193.
4. Гайшун И.В. Многопараметрические системы управления. Минск: Изд-во ИМ НАН Белоруси, 1996. 200 с.
5. Васильев О.В., Кириллова Ф.М. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах // Докл. АН СССР. 1967. Т. 175, № 1. С. 17–19.
6. Васильев О.В. К оптимальным процессам в непрерывных и дискретных двухпараметрических системах // Информ. сб. трудов ВЦ Иркутского госуниверситета. 1968. № 2. С. 87–104.
7. Степанюк Н.Н. Некоторые задачи управляемости и наблюдаемости двухпараметрических дискретных систем // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14, № 12. С. 2190–2195.
8. Мансимов К.Б. Дискретные системы. Баку: Изд–во БГУ, 2013. 151 с.
9. Мансимов К.Б., Насияти М.М. Необходимые условия оптимальности в одной многоэтапной дискретной задаче управления // Матем. и компьютерное моделирование. 2011. № 5. С. 162–179.
10. Насияти М.М. Условия оптимальности в ступенчатых дискретных двухпараметрических задачах управления // Автореф. дисс. на соиск. уч. степени доктора философии по математике. Баку. 2015. 22 с.
11. Мансимов К.Б., Марданов М.Дж. Качественная теория оптимального управления системами Гурса—Дарбу. Баку: Изд-во ЭЛМ, 2010. 362 с.

12. Мансимов К.Б. Достаточные условия оптимальности типа условий Кротова в дискретных двухпараметрических системах // Автоматика и телемеханика. 1985. № 8. С. 15–20.
13. Величенко В.В. Оптимальное управление составными системами // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176. № 4. С. 754–756.
14. Захаров Г.К. Оптимизация ступенчатых систем с управляемыми условиями перехода // Автоматика и телемеханика. 1993. № 1. С. 32–36.
15. Никольский М.С. Об одной вариационной задаче с переменной структурой // Вестник МГУ. Серия: Вычислительная математика и кибернетика. 1987. № 4. С. 31–34.
16. Мансимов К.Б., Исмайлов Р.Р. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1758–1770.
17. Розова В.Н. Оптимальное управление ступенчатыми системами // Вестник Российского университета дружбы народов. 2006. № 1. С. 27–32.
18. Марданов М.Дж., Мансимов К.Б., Меликов Т.К. Исследование особых управлений и необходимые условия оптимальности второго порядка в системах с запаздыванием. Баку: Изд-во ЭЛМ, 2013. 363 с.
19. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. М.: Либроком, 2013. 256 с.

Мансимов Камиль Байрамали оглы, д.ф.-м.н., профессор, кафедра математической кибернетики, Бакинский государственный университет (Баку, Азербайджан)

Мамедова Туркан Фикрет кызы, диссертант, Институт систем управления НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан)

DOI: 10.14529/cmse200205

QUASISINGULAR CONTROL IN A ONE STEP CONTROL PROBLEM OF DISCRETE TWO-PARAMETRIC SYSTEMS

© 2020 K.B. Mansimov[1,2], T.F. Mamedova[2]
[1]*Baku State University (Z. Khalilov 23, Baku, Az1148 Azerbaijan),*
[2]*Institute of Control Systems of NAS of Azerbaijan (B. Wahabzadeh 9, Baku, Az1141 Azerbaijan)*
E-mail: kamilbmansimov@gmail.com, kmansimov@mail.ru
Received: 11.07.2019

We study one stepwise (i.e., multi-stage) optimal control problem of a terminal type by a quality functional, described by discrete two-parameter systems of equations of the Fornasini–Marchezini type under the assumption of convexity of the control domains. A discrete two-parameter system of equations of the Fornasini–Marchezine type is a difference analogue of the system second-order hyperbolic equations (sometimes such systems of equations in the Western literature are also called 2D systems). Using a modified analogue of the increment method, a special decomposition of the second-order quality functional, using linearized difference systems of equations is obtained.

Using one version of the increment method, the first-order necessary optimality condition is established in the form of a linearized (differential) maximum condition. The case of degeneration of the linearized maximum condition (a quasi-singular case) separately is studied. Using constructive verifiable quadratic necessary optimality conditions for quasi-singular controls, using representations of solutions of linearized difference systems of equations using special formulas for incrementing the quality functional.

Keywords: Fornazini–Marchesini type discrete two-parameter system , linearized necessary optimality condition, step problem, optimal control, quasi-singular control, convex control domain.

FOR CITATION

Mansimov K.B., Mamedova T.F. Quasisingular Control in a One Step Control Problem of Discrete Two-Parametric Systems. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering.* 2020. Vol. 9, no. 2. P. 68–83. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse200205.

References

1. Fornazini E., Marchesini G. State-space realization theory of two-dimensional filters. IEEE Trans. Automat. Contr. 1976. Vol. 21, no. 4. P. 484–492. DOI: 10.1109/TAC.1976.1101305.
2. Kaczorek T. Two-dimensional linear systems. Springer, 1985. 399 p. DOI: 10.1007/BFb0005617.
3. Gayshun I.V., Khoang V. Conditions for complete controllability of discrete two-parameter systems. Differential Equations. 1991. Vol. 27, no. 2. P. 187–193. (in Russian)
4. Gayshun I.V. Multiparameter control systems. Minsk, Publishing of the National Academy of Sciences of Belarus, 1996. 200 p. (in Russian)
5. Vasil'yev O.V., Kirillova F.M. On Optimal Processes in Two-Parameter Discrete Systems. Dokl. AN SSSR. 1967. Vol. 175, no. 1. P. 17–19. (in Russian)
6. Vasil'yev O.V. To optimal processes in continuous and discrete two-parameter systems. Inform. sb. trudov vts. Irkutskogo Gosuniversiteta. 1968. no. 2. P. 87–104. (in Russian)

7. Stepanyuk N.N. Some problems of controllability and observability of two-parameter discrete systems. Differents. uravneniya. 1978. Vol. 14, no. 12. P. 2190–2195. (in Russian)
8. Mansimov K.B. Discrete systems. Baku, Publishing of the Baku State University, 2013. 151 p. (in Russian)
9. Mansimov K.B., Nasiyati M.M. Necessary Optimality Conditions in a Multi-Stage Discrete Control Problem. Mathematical and computer modelling. 2011. no. 5. P. 162–179. (in Russian)
10. Nasiyati M.M. Optimality conditions in stepwise discrete two-parameter control problems. Avtoref. diss. na soisk. uch. stepeni doktora filosofii po matematike. Baku. 2015. 22 p. (in Russian)
11. Mansimov K.B., Mardanov M.J. Qualitative theory of optimal control of Goursat-Darboux systems. Baku, ELM, 2010. 362 p. (in Russian)
12. Mansimov K.B. Sufficient conditions for optimality of the type of Krotov conditions in discrete two-parameter systems. Autom. Remote Control. 1985. no. 8. P. 15–20. (in Russian)
13. Velichenko V.V. Optimal control of composite systems. Dokl. AN SSSR. 1967. Vol. 176, no. 4. P. 754–756. (in Russian)
14. Zakharov G.K. Optimization of step systems with controllable transition conditions. Autom. Remote Control. 1993. no. 1. P. 32–36. (in Russian)
15. Nikol'skiy M.S. On a variational problem with a variable structure. Moscow University Computational Mathematics and Cybernetics. 1987. no. 4. P. 31–34. (in Russian)
16. Mansimov K.B., Ismaylov R.R. Conditions of Optimality in a Single Step Control Problem. Comput. Math. Math. Phys. 2006. Vol. 46, no. 10. P. 1758–1770.
17. Rozova V.N. Optimal control of incremental systems. Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. 2006. no. 1. P. 27–32. (in Russian)
18. Mardanov M.J., Mansimov K.B., Melikov T.K. Investigation of special controls and necessary conditions for second-order optimality in systems with delay. Baku, ELM, 2013. 363 p. (in Russian).
19. Gabasov R., Kirillova F.M. Special optimal controls. Moscow, Librocom, 2013. 256 p. (in Russian)