

## УСЛОВНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ СЛАБОУНИМОДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ БИНАРНОГО СКАНИРОВАНИЯ (БИСКАНА)

© 2018 В.А. Коднянко

*Сибирский федеральный университет*

*(660074 Красноярск, ул. Академика Куренского, д. 26А)*

*E-mail: kowlad@rambler.ru*

Поступила в редакцию: 03.05.2018

Предложен метод бинарного сканирования (бискана) для условной минимизации слабоуниmodalных функций. Областью приложения данного метода является оптимизация кусочных, ступенчатых, релейных и иных слабоуниmodalных функций, экстремум которых может быть локализован, как в узких, так и протяженных областях, включая области постоянства минимизируемой функции. Алгоритм, реализующий метод, представлен двумя процедурами, блок-схемы которых приведены в статье. Для оценки работоспособности бискана был проведен сравнительный вычислительный эксперимент на примерах минимизации ряда слабоуниmodalных функций. Установлено, что в сравнении с конкурирующими методами, в частности с методом золотого сечения и методом последовательного перебора, бискан дает лучшие показатели быстродействия. Наибольшее быстродействие метод обеспечивает при минимизации непостоянных монотонных функций. Для определения экстремума требуется лишь пять вычислений такой функции. В сравнении с методом золотого сечения бискан имеет в 1,5 раза большее быстродействие при решении задач данного типа. При минимизации строго слабоуниmodalных функций, к которым не применимы известные методы минимизации униmodalных функций, в частности, метод золотого сечения, бискан работает на порядок быстрее конкурирующего метода последовательного перебора.

*Ключевые слова: бинарное сканирование, бискан, метод золотого сечения, метод прямого поиска, униmodalная функция, слабоуниmodalная функция, минимизация функции, быстродействие метода.*

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Коднянко В.Б. Условная минимизация слабоуниmodalных функций методом бинарного сканирования (бискана) // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2018. Т. 7, № 4. С. 59–66. DOI: 10.14529/cmse180404.

### Введение

В практике одномерной оптимизации процедурам условной минимизации обычно подвергаются униmodalные функции. Существуют различные определения функций данного типа, поэтому следует уточнить, что в данной работе использовано определение [1, 2], согласно которому униmodalной называется функция  $f(x)$ , определенная на отрезке  $[a, b]$ , если существуют числа  $\alpha$  и  $\beta$ ,  $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$ , такие, что:

- 1) если  $a < \alpha$ , то на отрезке  $[a, \alpha]$  функция  $f(x)$  монотонно убывает;
- 2) если  $\beta < b$ , то на отрезке  $[\beta, b]$  функция  $f(x)$  монотонно возрастает;
- 3) на отрезке  $[a, \beta]$  функция  $f(x)$  постоянна и достигает своего минимума.

Широко известны применяемые на практике численные методы условной минимизации униmodalных функций. Наибольшей известностью среди них пользуется *метод золотого сечения* (МЗС) [1–4].

Вместе с тем представляют практический интерес методы оптимизации обширного типа функций, называемых *слабоуниmodalными функциями* (СУФ) [5, 6], для которых

условия униmodalности ослаблены: для крайних интервалов необходимо лишь выполнение требований невозрастания и неубывания функции  $f(x)$ , соответственно. Другими словами функция  $f(x)$  является слабоуниmodalной, если на отрезке  $[a, b]$  существуют число  $x^*$  такое, что при  $a \leq x \leq x^*$ , она не возрастает, а при  $x^* \leq x \leq b$  не убывает.

К числу СУФ относятся как униmodalные функции, так и строго слабоуниmodalные функции, например, щелевые (функции, минимум которых локализован на узком интервале), кусочно-плоские, а также ряд других функций данного типа.

Ослабление условий униmodalности минимизируемой функции (МФ) влечет ограничение области применения упомянутых методов. Очевидно, для СУФ они могут быть применимы лишь к униmodalным функциям. Сложность заключается в том, что не существует критерия, по которому можно было бы наперед установить, применимы ли данные методы к решению конкретной задачи для СУФ. Следовательно, для оптимизации слабоуниmodalных функций упомянутые методы непригодны.

В работе предложен и исследован метод бинарного сканирования (бискан) СУФ, который в сравнении с МПП имеет существенно большее быстродействие. Областью приложения данного метода является оптимизация кусочных, ступенчатых, релейных и слабоуниmodalных функций иного характера, экстремум которых может быть локализован, как в узких, так и на протяженных областях, включая области постоянства МФ.

В разделе 1 приведено описание метода. В разделе 2 описан вычислительный эксперимент и дано обсуждение его результатов. В заключении описаны достоинства предложенного метода.

## 1. Описание метода

Бискан предназначен для нахождения абсциссы  $xMin$  минимума СУФ  $f(x)$  на отрезке  $G = [a, b]$  с точностью до  $\epsilon$ .

Процедура, реализующая метод, представлена алгоритмом *BiScan* и внутренним вспомогательным алгоритмом *Half*, блок-схемы которых показаны на рис. 1 и 2.

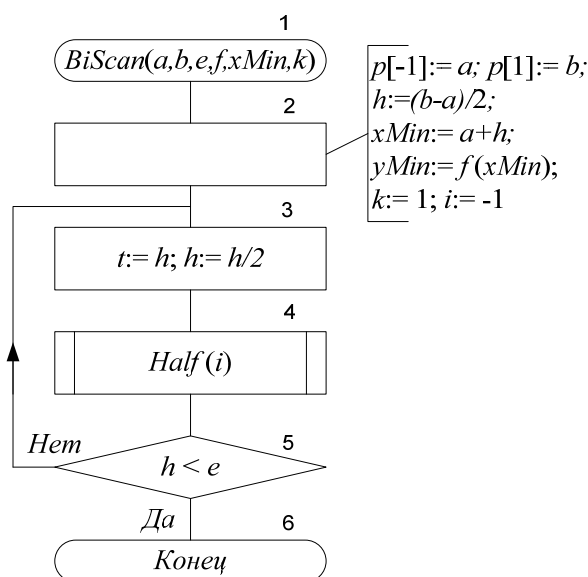


Рис. 1. Блок-схема алгоритма *BiScan*

Входными параметрами алгоритма *BiScan* являются:  $a$  — левая граница отрезка  $G$ ,  $b$  — его правая граница,  $e$  — точность расчетов,  $f$  — имя МФ. Выходные величины алгоритма:  $xMin$  — решение задачи,  $k$  — количество вычислений МФ.

Также использована индексированная переменная  $p$  длины 2, с индексами  $i = -1, 1$ . В блоке 2 алгоритма *BiScan* первому элементу  $p$  присваивается значение левой границы  $a$  отрезка  $G$ , второму — правой границы  $b$ . Отрезок  $G$  делится пополам и вычисляется первое приближения для минимума СУФ  $y_{min} = f(x_{min})$  в середине отрезка  $x_{min} = a+h$ , где  $h = (b-a)/2$  — начальный шаг процесса.

Блоки 3–5 алгоритма *BiScan* образуют цикл, который совершается до тех пор, пока не выполнится условие  $h < e$ . На каждом проходе по циклу в переменную  $t$  заносится значение шага  $h$ , затем  $h$  уменьшается вдвое и в блоке 4 производится обращение к вспомогательному алгоритму *Half*. Данный алгоритм выполняет при  $i = -1$  сканирование отрезка  $G$  от узла  $x = x_{min}$  влево к границе  $x = a$ , при  $i = 1$  вправо к границе  $x = b$ . Первое обращение к алгоритму *Half* происходит при  $i = -1$ .

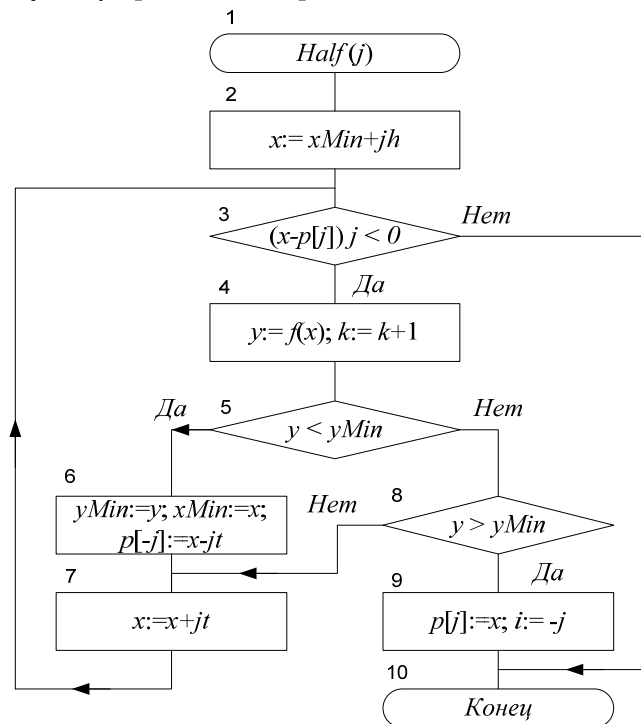


Рис. 2. Блок-схема вспомогательного алгоритма *Half*

В блоке 2 алгоритма *Half* сканирование начинается с узла  $x = xMin + jh$ , где  $j$  — индекс текущей половины отрезка  $G$  ( $j = -1$  для его левой половины,  $j = 1$  — для правой). Последующие узлы определяются оператором  $x = x + it$ , с тем, чтобы исключить дублирование вычислений в ранее сканированных узлах на предыдущих проходах по циклу алгоритма *BiScan*.

Блоки 3–9 алгоритма *Half* образуют цикл, обеспечивающий перемещение бискана к наружной границе исследуемой области отрезка  $G$ .

Если при проверке условия блока 5 выясняется, что найден новый оптимальный узел, то в блоке 6 производится его фиксация. При этом граница поиска сканируемой области смещается на величину шага  $h$ .

Если же при проверке условия блока 8 алгоритма *Half* найдено значение МФ, которое превышает  $y_{min}$ , то в блоке 9 в соответствующей точке фиксируется изменение другой

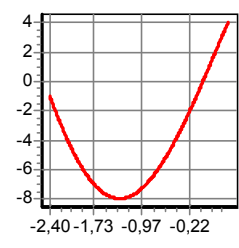
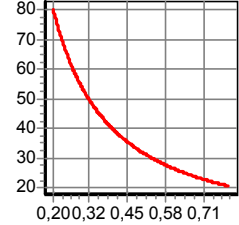
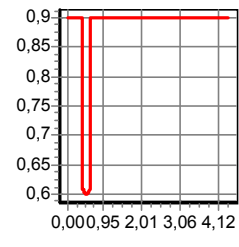
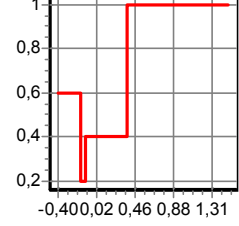
границы области поиска и при помощи оператора  $i := -j$  задается противоположное по отношению к текущему направлению сканирования на следующем шаге цикла алгоритма *BiScan*. После этого происходит выход из алгоритма *Half* и вход в тело цикла алгоритма *BiScan*, где  $h$  вновь уменьшается вдвое, затем выполняется новый шаг бискана до выполнения условия останова процесса.

## 2. Вычислительный эксперимент и обсуждение его результатов

Для оценки работоспособности бискана был проведен сравнительный вычислительный эксперимент на примерах минимизации слабоуниmodalных функций четырех типов: 1) униmodalной гладкой функции; 2) униmodalной монотонной функции; 3) слабоуниmodalной кусочной функции целевого типа, минимум которой локализован на узком участке с параболическим фрагментом МФ; 4) кусочно-плоской функции. Примеры задач для типичных функций таких типов приведены в табл. 1.

Таблица 1

Примеры задач

№	$f(x)$	$G$	График МФ
1	$10\sin x + x^2$	$[-2,4; 0,4]$	
2	$x^2 + \frac{16}{x}$	$[0,2; 0,8]$	
3	$\begin{cases} 0,9, & x < 0,4; \\ 0,6 + (x - 0,51)^2, & 0,4 \leq x \leq 0,6; \\ 0,9, & x > 0,6 \end{cases}$	$[0,0; 4,4]$	
4	$\begin{cases} 0,6, & x < -0,15; \\ 0,2, & -0,15 \leq x \leq -0,1; \\ 0,4, & -0,1 < x \leq 0,37; \\ 1, & x > 0,37 \end{cases}$	$[-0,4; 1,5]$	

В качестве контрольных методов использовались МЗС и МПП.

Для приведенных в табл. 1 задач вычисления проводились для  $\epsilon = 10^{-5}$  при помощи величин арифметического типа, поддерживающего мантиссы на 19–20 значащих цифр.

За критерий оценки быстродействия методов принято количество вычислений МФ, необходимых для достижения результата.

Экспериментальные данные для задач табл. 1 приведены в табл. 2. В колонке «МЗС» знак «+» означает, что метод дал правильное решение соответствующей задачи, а знак «-» — ошибочное. Бискан и МПП давали правильное решение задач.

Таблица 2

Экспериментальные данные

№	Бискан	МЗС	МПП
1	24	29(+)	109358
2	17	25(+)	60000
3	26	30(-)	51002
4	934	28(-)	30002

Эксперимент над несколькими десятками задач, подобных задаче 1, показал, что в сравнении с МЗС бискан требовал для их решения сопоставимое либо существенно меньшее количество вычислений МФ. Это видно из табл. 2, где при решении данной задачи бискан достиг результата за 24 вычисления МФ, в то время как МЗС для этого потребовалось 29 вычислений.

Наибольшее быстродействие достигалось бисканом при минимизации монотонных функций. Как следует из табл. 2, при решении задачи 2 метод нашел решение за 17 вычислений МФ, в то время как МЗС потребовал для этого 25 ее вычислений.

В данном случае повышенное быстродействие бискана объясняется тем, что для монотонных МФ метод достоверно прогнозирует направление, в котором следует сканировать отрезок  $G$ . Так, если на первом проходе по циклу алгоритма *BiScan* определено, что направление  $i$  является лучшим, то для монотонных функций это направление, очевидно, будет лучшим и на следующей итерации. Для экстремальных функций это не всегда так, вследствие чего происходит некоторое замедление процедуры поиска, как это следует из анализа показателей для задачи 1 табл. 2.

Полученный результат может иметь самостоятельное практическое значение, ибо, как установлено, при минимизации унимодальных функций бискан не уступает, а зачастую даже превосходит по быстродействию МЗС.

Наибольший интерес, однако, представляют результаты исследования способности бискана обнаруживать минимум строго слабоунимодальных функций. В табл. 2 приведены примеры задач 3 и 4 для функций данного типа.

Сразу отметим, что МЗС при решении этих задач дал неверные результаты. Причина состоит в следующем.

В соответствии с методами отсечения, в частности, МЗС, на текущей итерации вычисляются промежуточные точки  $p$  и  $q$ . При этом отрезок  $G$  делится абсциссами  $p_x$  и  $q_x$  на три части. Считается, что, если их ординаты отвечают условию  $p_y < q_y$ , то можно

уменьшить отрезок  $G$ , исключив его правую часть  $[q_x, b]$ , иначе следует исключить левую часть  $[a, p_x]$ . Однако если первое утверждение справедливо, то второе, строго говоря, ошибочно. Действительно, из того, что  $p_y < q_y$  ложно, совсем не следует, что  $p_y > q_y$  истинно, когда из поиска, действительно, можно исключить соответствующую часть отрезка  $G$ . Для СУФ это обстоятельство существенно. В данном случае следует проверять выполнение третьего условия  $p_y = q_y$ , которое данными методами не предусмотрено, и это может стать источником ошибок.

Бискан нашел решение задачи 3 за 26 вычислений МФ на узком участке ширины 0,2 при общей длине 4,4 отрезка  $G$ . Метод показал даже большее быстроедействие, нежели МЗС, давший, как отмечено, ошибочный результат.

Довольно высокое быстроедействие бискана в данном случае объясняется тем, что метод сравнительно быстро (за 4 вычисления МФ) определил участок, на котором локализован экстремум, и также быстро нашел его с учетом того, что минимизации на данном участке подвергалась парабола.

Быстроедействие метода снижается, если на участке локализации экстремума функция постоянна, что имело место при решении задачи 4 табл. 1. Бискан также довольно быстро (за 7 вычислений МФ) определил упомянутый участок, однако, поиск экстремума постоянной на нем функции потребовал эквивалентного МПП глубокого сканирования данного участка, что повлекло существенное снижение быстроедействия метода. Однако даже в этих условиях бискан отыскивал решение задачи за 934 вычисления МФ, тогда как МПП на это потребовалось 30002 ее вычисления.

В целом, эксперименты по минимизации слабоуниmodalных функций показали достаточно большой разброс значений показателя быстроедействия бискана. Наихудший результат был получен для постоянной функции, которая не имеет участка локализации экстремума, поэтому глубокому сканированию подвергается весь отрезок  $G$ . Это единственный случай, когда среди десятков решенных задач для функций кусочно-плоского типа были получены сопоставимые показатели бискана и МПП. Обычно для функций данного типа бискан в сравнении с ним показывал на порядки более высокое быстроедействие.

## Заключение

В работе рассмотрена проблема ускорения условной минимизации слабоуниmodalных функций и предложен метод бинарного сканирования (бискана) для ее решения. Областью приложения данного метода является оптимизация кусочных, ступенчатых, релейных и иных слабоуниmodalных функций, экстремум которых может быть локализован, как в узких, так и протяженных областях, включая области постоянства минимизируемой функции. Представлены алгоритмы, реализующий метод. Для оценки работоспособности бискана проведен сравнительный вычислительный эксперимент на примерах минимизации ряда слабоуниmodalных функций.

В целом, можно сделать заключение о том, что предложенный метод бискана условной минимизации слабоуниmodalных функций в сравнении с конкурирующими методами МЗС и МПП всегда дает лучшие показатели быстроедействия. Наибольшее быстроедействие бискан обеспечивает при минимизации монотонных функций. В сравнении с МЗС бискан имеет в 1,5 раза большее быстроедействие при решении задач данного типа.

При минимизации строго слабоуниmodalных функций, к которым не применимы известные методы минимизации униmodalных функций, бискан работает на порядки быстрее конкурентного метода прямого поиска.

## Литература

1. Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 272 с.
2. Уайлд Д.Дж., Методы поиска экстремума, пер. с англ. М.: Наука, 1967. 268 с.
3. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988. 128 с.
4. Kiefer J.K. Sequential Minimax Search for a Maximum // Proceedings of the American Mathematical Society 4. 1953. P. 502–506.
5. Ирбенек В.С., Келенин К.В. Алгоритмы решения задачи о назначениях и их применение // Программные продукты и системы. 1999. № 1. С. 20–24.
6. Ирбенек В.С. Метод локального полного перебора и его применение для оптимизации размещения конструктивных модулей в САПР электронной аппаратуры // Информационные технологии и вычислительные системы. 1999. № 1. С. 3–17.

Коднянко Владимир Александрович, д.т.н, профессор, кафедра стандартизации, метрологии и управления качеством, Сибирский федеральный университет, (Красноярск, Российская Федерация)

---

DOI: 10.14529/cmse180404

## BINARY SCAN SEARCH (BISCAN) FOR CONDITIONAL MINIMIZATION OF WEAKLY UNIMODAL FUNCTIONS

© 2018 V.A. Kodnyanko

*Siberian Federal University*

*(Kirensky str., 26A, Krasnoyarsk 660074, Russia)*

*E-mail: kowlad@rambler.ru*

Received: 03.05.2018

A method of binary scan search (biscan) is proposed for conditional minimization of weakly unimodal functions. The application area of this method is the optimization of piecewise, stepwise, relay and other weakly unimodal functions, the extremum of which can be localized, both in narrow and extended regions, including the regions of constancy of the minimized function. The algorithm implementing the method is represented by two procedures, the block diagrams of which are given in the article. To evaluate the performance of the biscan, a comparative computational experiment was carried out using examples of minimizing a number of weakly unimodal functions. It is established that, in comparison with competing methods, the biscan gives better performance. The fastest method is provided by minimizing non-constant monotonic functions. To determine the extremum, only five calculations of such a function are required. In comparison with the golden section search, the biscain has a 1.5 times greater speed in solving problems of this type. In minimizing strictly weakly unimodal functions, to which the known methods of minimizing unimodal functions are not applicable, in particular, the golden section search, the biscan operates orders of magnitude faster than the competing sequential search method.

*Keywords: binary scanning, biscan, golden section search, direct search method, unimodal function, weakly unimodal function, minimization of function, method speed.*

## FOR CITATION

Kodnyanko V.A. Binary Scanning Search (Biscan) for Conditional Minimization of Weakly Unimodal Functions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2018. vol. 7, no. 4. p. 59–66. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse180404.

*This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Non Commercial 3.0 License which permits non-commercial use, reproduction and distribution of the work without further permission provided the original work is properly cited.*

## References

1. Fedorov V.V. *Chislennyye metody maksimina* [Numerical Methods of Maximin]. Moscow, Nauka, 1979. 272 p.
2. Wilde D.J. *Optimum Seeking Methods*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1964. 202 p.
3. Bunday D.B. *Basic Optimization Methods*. Hodder Arnold, 1984. 128 p.
4. Kiefer J.K. Sequential Minimax Search for a Maximum. *Proceedings of the American Mathematical Society* 4. 1953. pp. 502–506.
5. Irbenek V.S., Kelenin K.V. Algorithms for Solving the Assignment Problem and Their Application. *Programmnyye produkty i sistemy* [Software Products and Systems]. 1999. no. 1. pp. 20–24.
6. Irbenek V.S. The Method of Local Full Busting and Its Application for Optimizing the Placement of Constructive Modules in the CAD of Electronic Equipment. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nyye sistemy* [Information Technologies and Computer Systems]. 1999. no. 1. pp. 3–17.