УДК 519.632 DOI: 10.14529/cmse190301

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВЫРОЖДЕНИЕМ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ ОБЛАСТИ

© 2019 Е.И. Рукавишникова

Вычислительный центр ДВО РАН

(680000 Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, д. 65)

E-mail: rukavishnikova-55@mail.ru

Поступила в редакцию: 04.09.2018

В статье рассматривается задача Дирихле с однородным граничным условием для эллиптического уравнения второго порядка с вырождением на всей дважды непрерывно дифференцируемой границе двумерной области Ω. Определяется обобщенное решение этой задачи, которое существует и единственно в весовом пространстве $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$. Для решения сформулированной задачи разработан метод конечных элементов, схема которого построена на основе определения обобщенного решения исходной дифференциальной задачи в пространстве $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$. С этой целью двумерная выпуклая область разбивается на треугольники со специальным сгущением к границе. Далее, введено пространство конечных элементов $V^h \subset \mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$, которое содержит непрерывные функции, линейные на каждом треугольном элементе сеточной области Ω^h и равные нулю на множестве $\bar{\Omega} \setminus \Omega^h$, показана однозначная разрешимость схемы метода конечных элементов. Для обобщенного решения u из подпространства $\mathring{W}^2_{2,\alpha-1}(\Omega)$ пространства $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$, используя значения в узлах триангулированной области Ω^h, строится интерполянт $u_I \in V^h$, устанавливается факт его сходимости по норме $W^1_{2,\alpha}(\Omega)$. Главным результатом работы является доказательство сходимости приближенного решения предложенного метода к точному решению в весовом пространстве Соболева.

Ключевые слова: краевая задача с вырождением, весовое пространство Соболева, обобщенное решение, метод конечных элементов.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Рукавишникова Е.И. Сходимость метода конечных элементов для краевой задачи с вырождением на всей границе области // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2019. Т. 8, № 3. С. 5–26. DOI: 10.14529/cmse190301.

Введение

Сингулярность решения краевых задач может быть вызвана особенностью исходных данных (коэффициентов, правых частей уравнения и граничных условий), геометрией границы области, внутренними свойствами решения. Краевая задача называется задачей с сильной сингулярностью, если ее решение $u \notin H^1$ (W^1_2) или интеграл Дирихле от функции u расходится. Для таких задач, когда решение имеет сингулярность на конечном множестве точек на границе области, были разработаны различные методы конечных элементов, позволяющие находить приближенное решение (см. [1–10]). В том случае, когда $u \in H^1$ и $u \notin H^2$ краевую задачу называют задачей со слабой сингулярностью решения. В работе [11] была сформулирована краевая задача с вырождением решения на всей границе области, исследовано его существование и единственность в весовом пространстве С.Л. Соболева. В [12–14] изучены коэрцитивные и дифференциальные свойства решения.

Целью данной работы является построение метода конечных элементов (МКЭ) для первой краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка с вырождением на всей дважды непрерывно дифференцируемой границе двумерной области Ω и исследование сходимости приближенного решения МКЭ к точному решению в норме весового пространства $W^1_{2,\alpha}(\Omega)$.

В разделе 1 приведена постановка исходной дифференциальной задачи, сформулированы вспомогательные сведения и результаты, из которых следует существование и единственность ее обобщенного решения. В разделе 2 описано построение схемы МКЭ, первым шагом в осуществлении которого является триангуляция двумерной выпуклой области со специальным сгущением треугольных элементов к границе. Далее, введено пространство конечных элементов и показана единственность приближенного решения МКЭ в нем. В разделе 3 устанавливается сходимость приближенного решения построенного метода к точному обобщенному решению задачи по норме весового пространства $W^1_{2,\alpha}$. В заключении сформулированы основные результаты исследования аппроксимации решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с вырождением на границе, указаны области их применения и определено направление дальнейшей работы.

1. Постановка задачи

Пусть R^2 — двумерное евклидово пространство с произвольной точкой $x = (x_1, x_2)$ в нем и $dx = dx_1 dx_2$; $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $\bar{\Omega}$ — замыкание области, т.е. $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Определим весовую функцию $\rho(x)$ как расстояние любой точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$.

Далее положим, что $s \in \{1; 2\}$, γ — действительное число, удовлетворяющее условию $1/2 - s < \gamma < 1/2$. Через $W^s_{2,\gamma}(\Omega)$ обозначим весовое пространство Соболева функций f, заданных на Ω, с конечной нормой

$$\|f\|_{W^s_{2,\gamma}(\Omega)} = \|f\|_{L_2(\Omega)} + |f|_{W^s_{2,\gamma}(\Omega)}, \tag{1}$$

эквивалентной [15] норме

$$\|f\|_{\overset{*}{W}{}^s_{2,\gamma}(\Omega)} = \|f\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)} + |f|_{W^s_{2,\gamma}(\Omega)}, \tag{2}$$

где

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |f|^2 \, dx \right)^{1/2}, \quad \|f\|_{L_{2,\gamma}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \rho^{-2\gamma} |f|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

$|f|_{W^s_{2,\gamma}(\Omega)} = \sum\limits_{\substack{k_1,k_2=0\\|k|=s}}^{s} \left\| \rho^{-\gamma} \dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2}} \right\|_{L_2(\Omega)}$, $k = (k_1, k_2)$, $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ — целые числа, $|k| = k_1 + k_2$. При $\gamma = 0$ пространства $W^s_{2,0}(\Omega)$ и $W^s_2(\Omega)$ совпадают.

Введем пространство функций f

$$\overset{\circ}{W}{}^s_{2,\gamma}(\Omega) = \{f \colon f \in W^s_{2,\gamma}(\Omega), \quad f|_{\partial\Omega} = 0\}$$

и пространство $L_{2,-1-\gamma}$ функций $F(x)$, $x \in \Omega$, с конечной нормой

$$\|F\|_{L_{2,-1-\gamma}(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |\rho^{1+\gamma} F|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Отметим [15], что верно вложение пространств

$$W^s_{2,\gamma}(\Omega) \subset W^{s-l}_{2,\gamma_l}(\Omega) \tag{3}$$

при $\gamma_l < 1/2$, $\gamma_l \le \gamma + l$, $0 \le l \le s$, $\partial\Omega \in C^{(1)}$, в частности, $W^0_{2,\gamma_0}(\Omega) = L_{2,\gamma_0}(\Omega)$, если $s = l$. Также имеют место неравенства [11]

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \le C_1 |f|_{W^s_{2,\gamma}(\Omega)}, \qquad \|\rho^{-s-\gamma} f\|_{L_2(\Omega)} \le C_2 |f|_{W^s_{2,\gamma}(\Omega)}, \tag{4}$$

справедливые для функций f из $\mathring{W}^s_{2,\gamma}(\Omega)$, если $\partial\Omega \in C^{(s_0+1)}$, s_0 — наименьшее натуральное число такое, что $s+\gamma-1/2 \le s_0 < s+\gamma+1/2$, $s \le 2s_0$, с константами C_1, C_2, не зависящими от f.

В области Ω рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\sum_{k,l=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{kl}(x)\frac{\partial u}{\partial x_l}\right) + a(x)u = F(x),\ x \in \Omega, \tag{5}$$

с краевым условием

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial\Omega \in C^{(2)}. \tag{6}$$

Правая часть уравнения (5) удовлетворяет включению

$$F \in L_{2,-1-\alpha}(\Omega), \tag{7}$$

т.е. $\rho^{1+\alpha} F \in L_2(\Omega)$, $-1/2 < \alpha < 1/2$.

Коэффициенты уравнения $a_{kl}(x) = a_{lk}(x)$ $(k, l = 1, 2)$ — дифференцируемые на Ω функции, удовлетворяют неравенствам

$$|a_{kl}(x)| \le C_3 \rho^{-2\alpha}(x), \tag{8}$$

$$\left|\frac{\partial a_{kl}(x)}{\partial x_1}\right|, \left|\frac{\partial a_{kl}(x)}{\partial x_2}\right| \le C_4 \rho^{-2\alpha-1}(x), \tag{9}$$

функция $a(x)$ — положительная и подчинена неравенству

$$a(x) \le C_5 \rho^{-2\alpha-2}(x). \tag{10}$$

Предполагается выполненным условие ультраэллиптичности

$$\sum_{k,l=1}^{2} a_{kl}(x)\zeta_k\zeta_l \ge C_6 \rho^{-2\alpha}(x) \sum_{k=1}^{2} \zeta_k^2, \quad x \in \Omega, \quad C_6 > 0, \tag{11}$$

где ζ_1, ζ_2 — любые действительные параметры, C_3–C_6 — константы, не зависящие от x.

Введем соответственно билинейную и линейную формы

$$E(u,v) = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{k,l=1}^{2} a_{kl} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_l} + auv\right] dx, \qquad (F, v) = \int\limits_{\Omega} Fv\, dx.$$

Наряду с задачей (5), (6) сформулируем следующую вариационную задачу: найти функцию $u \in \mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$, для которой равенство

$$E(u,v) = (F,v) \tag{12}$$

справедливо для всех $v \in \mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$.

Функцию $u \in \mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$, обладающую свойством (12), назовем обобщенным решением уравнения (5) в пространстве $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$.

Заметим, что в силу соотношений (4), (7), (8), (10), (11) при $s = 1$, $\gamma = \alpha$ (см. [11]) билинейная форма $E(u, v)$ является непрерывной на пространстве $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ и $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$-эллиптичной, а линейная форма (F, v) непрерывна на этом же пространстве. На основании теоремы Лакса—Мильграма [16], существует единственное решение вариационной задачи (12).

Кроме этого, из работы [13] следует, что если выполнено условие (7), то обобщенное решение $u \in \mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ задачи (5), (6) принадлежит пространству $\mathring{W}^2_{2,\alpha-1}(\Omega)$. Ввиду соотношения (3) при $s = 2$, $\gamma = \alpha - 1$, $l = 1$, $\gamma_l = \alpha$, имеет место вложение пространств $\mathring{W}^2_{2,\alpha-1}(\Omega) \subset \mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$.

Для решения вариационной задачи (12) применим метод конечных элементов.

2. Построение схемы метода конечных элементов

Полагая, что область определения решения Ω выпуклая, произведем ее триангуляцию T_h (рис. 1). Для этого через точки, находящиеся от границы $\partial\Omega$ на расстояниях, равных $b\left(\frac{j}{n}\right)^r$, $j = 0, \dots, n$, $r > 1$ ($b < \delta_\Omega/2$, δ_Ω — диаметр вписанной в Ω окружности, r — параметр сжатия, характеризующий степень сгущения точек), проводятся кривые Γ_j, $j = 0, \dots, n$, разделяющие область Ω на слои Q_j, $j = 1, \dots, n$. Линия Γ_n при этом делит Ω на две подобласти: внешнюю Ω_1 (приграничную полосу) и внутреннюю Ω_2. На каждой кривой Γ_j, $j = 0, \dots, n$ ($\Gamma_0 = \partial\Omega$, $\Gamma_n = \partial\Omega_1$) фиксируются M_j равноотстоящих узлов. Число M_j, $j = 1, \dots, n$, определяется функцией $\psi(j) = \left[l_j / \left(b\left(\left(\frac{j}{n}\right)^r - \left(\frac{j-1}{n}\right)^r\right)\right)\right] + 1$, где l_j — длина кривой Γ_j, $M_0 = 2M_1$. Соединением сначала последовательно всех точек на кривых Γ_j ломаными линиями, а затем каждого из узлов на Γ_{j-1} с ближайшей из узловых точек, принадлежащих кривой Γ_j, $j = 1, \dots, n$, подобласть Ω_1 разбивается на элементы треугольного типа со сгущением к границе $\partial\Omega$. Объединение всех треугольников, вершины которых являются узловыми точками только кривых Γ_{j-1} и Γ_j, $j = 1, \dots, n$, обозначим через Q^h_j.

Во внутренней подобласти Ω_2 проводится квазиравномерная триангуляция, в результате которой имеем конечное число регулярных треугольников с наибольшей стороной порядка $1/n$. При этом точки разбиения (вершины треугольников) на границе $\partial\Omega_1$ должны входить в число вершин треугольников на Ω_2. (На рис. 1 подобласть Ω_1 разделена на слои $Q_1, \dots, Q_4$ и $\Gamma_4 = \partial\Omega_1$).

Проведенная триангуляция T_h области Ω удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\bar{\Omega} = \Omega^h \cup \Omega'$, где $\Omega^h = \bigcup\limits_{m=1}^{N} K_m$, $\{K\} = \{K_1, \dots, K_N\}$ — множество замкнутых треугольников, называемых конечными элементами, Ω' — объединение сегментов, отсекаемых треугольниками K_m, хотя бы одна вершина которых принадлежит границе $\partial\Omega$.
2. Общими для треугольников K могут быть только стороны или вершины.
3. Наибольшая сторона h в треугольниках K_m имеет порядок $1/n$, где n — число слоев в приграничной полосе Ω_1.
4. $\sup\limits_{K \in T_h} \frac{h_{max}(K)}{h_{min}(K)} \le C_7$, где постоянная C_7 не зависит от h.

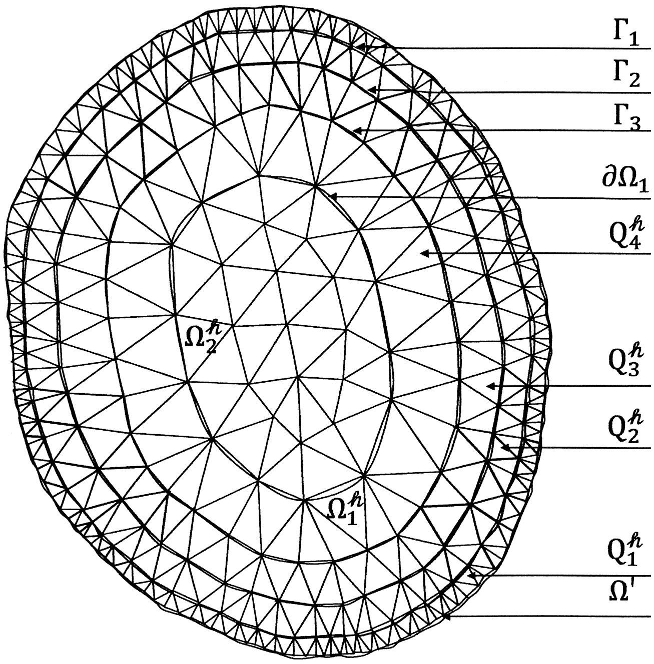

Рис. 1. Построение сеточной области Ω^h

Отметим также, что вершины $P_1, \ldots, P_{N_h}$ треугольников K являются узлами триангуляции.

Обозначим через $V^h \subset \mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ пространство непрерывных функций, линейных на каждом K_m из триангуляции T_h и равных нулю на $\bar{\Omega} \setminus \Omega^h$. Для функции u из пространства $\mathring{W}^2_{2,\alpha-1}(\Omega)$ определим интерполянт $u_I(x) = \sum\limits_{i=1}^{N_h} u(P_i)\varphi_i(x)$, где $\varphi_i(x)$ — базисная функция, которая в точке P_i равна единице, в остальных узлах — нулю и линейна на каждом треугольнике из множества $\{K\}$.

Построенному конечномерному пространству $V^h \subset \mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ сопоставим следующую дискретную задачу: найти функцию $u_h \in V^h$, удовлетворяющую равенству

$$E(u_h, v_h) = (F, v_h) \tag{13}$$

для любой функции v_h из V^h.

Здесь $E(u_h, v_h)$ и (F, v_h) — билинейная и линейная формы из задачи (12). Согласно теореме Лакса—Мильграма [16], задача (13) имеет единственное решение u_h, которое будем называть приближенным решением по методу конечных элементов.

3. Сходимость метода конечных элементов в весовом пространстве

Рассмотрим семейство (V^h) подпространств пространства $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$, где параметр h (h — наибольшая из длин сторон треугольников K в триангуляциях T_h) в пределе равен нулю. Каждому пространству конечных элементов V^h поставим в соответствие приближенное решение u_h, удовлетворяющее условию (13).

Установим сходимость метода по норме $W^1_{2,\alpha}(\Omega)$:

$$\lim_{h\to 0} \|u - u_h\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)} = 0, \tag{14}$$

где u — решение задачи (12), u_h — решение задачи (13).

Лемма 1. Пусть u — решение задачи (12), u_h — решение задачи (13). Тогда существует такая положительная постоянная C_8, не зависящая от подпространства V^h, что

$$\|u-u_h\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)} \le C_8 \inf_{v_h\in V^h} \|u-v_h\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)}.$$

В силу непрерывности на пространстве $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ и $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$-эллиптичности билинейной формы $E(u,v)$ последнее неравенство доказывается по аналогии с [17].

Так как $\inf\limits_{v_h\in V^h} \|u-v_h\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)} \le \|u-u_I\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)}$, то для того, чтобы установить соотношение (14), покажем, что интерполянт u_I сходится к точному решению u задачи (12).

Введем следующие обозначения:

$Q_1^h = \bigcup\limits_{m=1}^{N_1} K_m$, где K_m — треугольники, вершины которых принадлежат слою Q_1 из Ω_1 (Q_1 — первый слой деления подобласти Ω_1 , $\Omega_1 = \bigcup\limits_{j=1}^{n} Q_j$, n — число слоев), а N_1 — число этих треугольников;

$\Omega' = \bigcup\limits_{m=1}^{N_2} D_m$, где N_2 — число сегментов D_m, ограниченных хордами, соединяющими рядом лежащие узлы кривой Γ_0, и дугами, которыми эти хорды стягиваются;

$\Omega_1^{1,h} = \bigcup\limits_{m=N_1+1}^{N_3} K_m$, где K_m — треугольники из $\Omega_1^h \setminus Q_1^h$, $\Omega_1^h = (\Omega\setminus\Omega')\setminus\Omega_2^h$, N_3 — число треугольников во всей подобласти Ω_1^h, а $\Omega_2^h = \bigcup\limits_{m=N_3+1}^{N} K_m$, где $K_m \in T_h\cap\Omega_2$, N — общее число треугольников в сеточной области Ω^h.

Ввиду того, что $u_I|_{\Omega'} = 0$, имеем

$$\|u-u_I\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)} = \big(\|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}(\Omega_2^h)} + \|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}(\Omega_1^{1,h})} + \\ + \|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)} + \|u\|^2_{W^1_{2,\alpha}(\Omega')}\big)^{1/2}. \quad (15)$$

Теорема 1. Пусть $u \in \mathring{W}^2_{2,\alpha-1}(\Omega)$, $u_I \in V^h$ — ее интерполянт, построенный по проведенной триангуляции T_h области Ω. Тогда

$$\lim_{h\to 0} \|u-u_I\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)} = 0. \quad (16)$$

Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2. Если выполняются условия теоремы 1, то

$$\lim_{h\to 0} \|u-u_I\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega_2^h)} = 0. \quad (17)$$

Доказательство. Используя неравенства

$$|u-u_I|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega_2^h)} \le \left(\sup_{x\in\Omega_2^h} \rho^{-\alpha}(x)\right)|u-u_I|_{W^1_2(\Omega_2^h)},$$

$$|u|_{W^2_2(\Omega_2^h)} \le \frac{|u|_{W^2_{2,\alpha-1}(\Omega_2^h)}}{\inf\limits_{x\in\Omega_2^h} \rho^{1-\alpha}(x)},$$

оценки [17]

$$|u-u_I|_{W_2^1(\Omega_2^h)} \leq C_9 h |u|_{W_2^2(\Omega_2^h)}, \quad |u-u_I|_{L_2(\Omega_2^h)} \leq C_{10} h^2 |u|_{W_2^2(\Omega_2^h)}$$

и полагая, что $\sup\limits_{x\in\Omega_2^h} \rho^{-\alpha}(x) \leq C_{11}$, $\inf\limits_{x\in\Omega_2^h} \rho^{1-\alpha}(x) \leq C_{12}$, где C_{11}, C_{12} — постоянные величины, получаем

$$|u-u_I|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega_2^h)} \leq C_{13} h |u|_{W_{2,\alpha-1}^2(\Omega_2^h)}, \tag{18}$$

$$\|u-u_I\|_{L_2(\Omega_2^h)} \leq C_{14} h^2 |u|_{W_{2,\alpha-1}^2(\Omega_2^h)}. \tag{19}$$

(Здесь и далее постоянные множители, стоящие перед нормами и полунормами функции u в пространствах Соболева, не зависят от нее и h — наибольшей из длин сторон треугольников в сеточной области).

Из неравенств (18), (19) следует оценка

$$\|u-u_I\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega_2^h)} \leq C_{15} h |u|_{W_{2,\alpha-1}^2(\Omega_2^h)}.$$

Перейдя к пределу при $h \to 0$, в результате будем иметь равенство (17). Лемма доказана. □

Лемма 3. Если выполняются условия теоремы 1, то

$$\lim_{h\to 0} \|u-u_I\|_{W_{2,\alpha}^1(\Omega_1^{1,h})} = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Так как для всех треугольников K из $\Omega_1^{1,h}$ верны неравенства

$$|u-u_I|_{W_{2,\alpha}^1(K)} \leq \left(\sup_{x\in K} \rho^{-\alpha}(x)\right) |u-u_I|_{W_2^1(K)}, \tag{21}$$

$$|u|_{W_2^2(K)} \leq \frac{|u|_{W_{2,\alpha-1}^2(K)}}{\inf\limits_{x\in K} \rho^{1-\alpha}(x)} \tag{22}$$

и справедливы оценки [17] при $p=q=2$, $m=0,1$ для невесовых норм пространств Соболева и Лебега

$$|u-u_I|_{W_2^1(K)} \leq C_{16} h_K |u|_{W_2^2(K)}, \tag{23}$$

$$\|u-u_I\|_{L_2(K)} \leq C_{17} h_K^2 |u|_{W_2^2(K)} \tag{24}$$

(h_K — наибольшая длина стороны треугольника K), то из соотношений (21)–(24) следует

$$|u-u_I|_{W_{2,\alpha}^1(K)} \leq C_{16} h_K \frac{\sup\limits_{x\in K} \rho^{-\alpha}(x)}{\inf\limits_{x\in K} \rho^{1-\alpha}(x)} |u|_{W_{2,\alpha-1}^2(K)},$$

$$\|u-u_I\|_{L_2(K)} \leq C_{17} h_K^2 \frac{|u|_{W_{2,\alpha-1}^2(K)}}{\inf\limits_{x\in K} \rho^{1-\alpha}(x)}.$$

Учитывая, что для предложенной триангуляции области $\Omega_1^{1,h}$

$$\inf_{x\in K} \rho^{1-\alpha}(x) \geq C_{18} \Big(\frac{j-1}{n}\Big)^{r(1-\alpha)}, \quad h_k \leq C_{19} \Big(\frac{j}{n}\Big)^{r-1} \frac{1}{n}, \quad r>1,$$

$$\sup_{x\in K}\rho^{-\alpha}(x)\le C_{20}\Big(\frac{j}{n}\Big)^{-r\alpha},\quad -\frac{1}{2}<\alpha<0,$$

$$\sup_{x\in K}\rho^{-\alpha}(x)\le C_{21}\Big(\frac{j-1}{n}\Big)^{-r\alpha},\quad 0\le\alpha<\frac{1}{2},$$

где $j=2,\ldots,n$ (n — число слоев разбиения подобласти Ω_1), получаем оценки

$$|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(K)}\le C_{22}\Big(\frac{j}{j-1}\Big)^{2r(1-\alpha)}\frac{1}{j^2}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(K)},\quad \alpha\in\Big(-\frac{1}{2};0\Big),$$

$$|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(K)}\le C_{23}\Big(\frac{j}{j-1}\Big)^{2r}\frac{1}{j^2}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(K)},\quad \alpha\in\Big[0;\frac{1}{2}\Big),$$

$$\|u-u_I\|^2_{L_2(K)}\le C_{24}\Big(\frac{j}{j-1}\Big)^{2r(1-\alpha)}\Big(\frac{j}{n}\Big)^{2r(1+\alpha)}\frac{1}{j^4}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(K)},\quad \alpha\in\Big(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\Big).\qquad(25)$$

В силу того, что $\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(\Omega)}\le C_{25}$, для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что $\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(\Gamma_0^\delta)}<\dfrac{\varepsilon^2}{4C_{26}}$, где $\Gamma_0^\delta=\{x\in\bar\Omega\colon \rho(x)\le\delta\}$ есть δ-окрестность границы Γ_0 в области $\bar\Omega$ (полоса ширины δ).

Обозначим через n_ε число слоев Q_j, $j=1,\ldots,n_\varepsilon$, содержащихся в Γ_0^δ. (Ясно, что $n_\varepsilon\to\infty$ при $\varepsilon\to0$). Таким образом,

$$\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{n_\varepsilon}Q_j\Big)}<\frac{\varepsilon^2}{4C_{26}}.\qquad(26)$$

Задав ε, определим δ, а следовательно, и n_ε так, чтобы выполнялось неравенство (26). Покажем, что в этом случае имеет место оценка

$$\|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}\Big(\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}<\frac{\varepsilon^2}{2},\qquad(27)$$

где $\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\subset\bigcup\limits_{j=1}^{n_\varepsilon}Q_j$.

Просуммировав неравенства (25) по всем треугольникам K из $\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h$ по слоям Q_j^h, будем иметь

$$\sum_{K\in\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h}|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(K)}\le C_{22}\sum_{j=2}^{n_\varepsilon-1}\Big(\frac{j}{j-1}\Big)^{2r(1-\alpha)}\frac{1}{j^2}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_j^h)}\le$$

$$\le C_{22}\bigg(2^{2r(1-\alpha)}\frac{1}{4}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_2^h)}+\ldots+\Big(1+\frac{1}{n_\varepsilon-2}\Big)^{2r(1-\alpha)}\frac{1}{(n_\varepsilon-1)^2}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q^h_{n_\varepsilon-1})}\bigg)\le$$

$$\le C_{22}2^{2r(1-\alpha)-2}\big(\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_2^h)}+\ldots+\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q^h_{n_\varepsilon-1})}\big)\le$$

$$\le C_{27}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}\Big(\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}\ \text{при}\ -\frac{1}{2}<\alpha<0,\qquad(28)$$

$$\sum_{K\in\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h}|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(K)}\le C_{23}\sum_{j=2}^{n_\varepsilon-1}\Big(\frac{j}{j-1}\Big)^{2r}\frac{1}{j^2}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_j^h)}\le$$

$$\le C_{23}2^{2r-2}\big(\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_2^h)}+\ldots+\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q^h_{n_\varepsilon-1})}\big)\le$$

$$\le C_{28}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}\Big(\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}\ \text{при } 0\le\alpha<\frac12,\qquad(29)$$

$$\sum_{K\in\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h}\|u-u_I\|^2_{L_2(K)}\le C_{24}\sum_{j=2}^{n_\varepsilon-1}\Big(\frac{j}{j-1}\Big)^{2r(1-\alpha)}\Big(\frac{j}{n}\Big)^{2r(1+\alpha)}\frac{1}{j^4}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_j^h)}\le$$

$$\le C_{24}2^{2r(1-\alpha)-4}\Big(\frac{n_\varepsilon-1}{n}\Big)^{2r(1+\alpha)}\big(\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_2^h)}+\ldots+\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q^h_{n_\varepsilon-1})}\big)\le$$

$$\le C_{29}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}\Big(\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}\ \text{при } -\frac12<\alpha<\frac12.\qquad(30)$$

Принимая во внимание, что

$$\|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}\Big(\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}\le 2\left(\|u-u_I\|^2_{L_2\Big(\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}+|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}\Big(\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}\right),$$

и используя неравенства (26), (28)–(30), устанавливаем оценку (27)

$$\|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}\Big(\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}<\frac{C_{26}\varepsilon^2}{2C_{26}}=\frac{\varepsilon^2}{2},\quad \alpha\in\Big(-\frac12;\frac12\Big).$$

Аналогично просуммируем неравенства (25) по треугольникам K из $\Omega_1^{1,h}\setminus\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h$ по слоям Q_j^h, $j=n_\varepsilon,\ldots,n$, в результате будем иметь

$$\sum_{K\in\Omega_1^{1,h}\setminus\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h}|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(K)}\le C_{22}\sum_{j=n_\varepsilon}^{n}\Big(\frac{j}{j-1}\Big)^{2r(1-\alpha)}\frac{1}{j^2}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_j^h)}\le$$

$$\le C_{30}\Big(1+\frac{1}{n_\varepsilon-1}\Big)^{2r(1-\alpha)}\frac{1}{n_\varepsilon^2}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}\Big(\Omega_1^{1,h}\setminus\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)},\ \text{если } -\frac12<\alpha<0,\qquad(31)$$

$$\sum_{K\in\Omega_1^{1,h}\setminus\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h}|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(K)}\le C_{23}\sum_{j=n_\varepsilon}^{n}\Big(\frac{j}{j-1}\Big)^{2r}\frac{1}{j^2}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_j^h)}\le$$

$$\le C_{31}\Big(1+\frac{1}{n_\varepsilon-1}\Big)^{2r}\frac{1}{n_\varepsilon^2}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}\Big(\Omega_1^{1,h}\setminus\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)},\ \text{если } 0\le\alpha<\frac12,\qquad(32)$$

$$\sum_{K\in\Omega_1^{1,h}\setminus\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h}\|u-u_I\|^2_{L_2(K)}\le C_{24}\sum_{j=n_\varepsilon}^{n}\left(\frac{j}{j-1}\right)^{2r(1-\alpha)}\left(\frac{j}{n}\right)^{2r(1+\alpha)}\frac{1}{j^4}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_j^h)}\le$$

$$\le C_{32}\Big(1+\frac{1}{n_\varepsilon-1}\Big)^{2r(1-\alpha)}\Big(\frac{n_\varepsilon}{n}\Big)^{2r(1+\alpha)}\frac{1}{n_\varepsilon^4}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}\Big(\Omega_1^{1,h}\setminus\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)},\ \text{если}\ -\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}. \quad (33)$$

Так как при $n\to\infty$ и $n_\varepsilon\to\infty$, а $h\to0$, то из оценок (31)–(33) получаем

$$\lim_{h\to0}\|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}\Big(\Omega_1^{1,h}\setminus\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}=0.$$

Значит, для любого $\varepsilon>0$ существует такое $h_0(\varepsilon)$, что неравенство

$$\|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}\Big(\Omega_1^{1,h}\setminus\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}<\frac{\varepsilon^2}{2} \quad (34)$$

справедливо для всех $h\le h_0(\varepsilon)$, $-1/2<\alpha<1/2$. Ввиду того, что

$$\|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}(\Omega_1^{1,h})}=\|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}\Big(\Omega_1^{1,h}\setminus\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)}+\|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}\Big(\bigcup\limits_{j=2}^{n_\varepsilon-1}Q_j^h\Big)},$$

из (27), (34) следует предельное равенство (20). Лемма доказана. □

Лемма 4. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда

$$\lim_{h\to0}\|u-u_I\|_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)}=0. \quad (35)$$

Доказательство. Чтобы установить справедливость равенства (35), воспользуемся неравенством

$$\|u-u_I\|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)}\le C_{33}\|u-u_I\|^2_{\overset{*}{W}{}^1_{2,\alpha}(Q_1^h)}\le 2C_{33}\big(\|u-u_I\|^2_{L_{2,\alpha}(Q_1^h)}+|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)}\big). \quad (36)$$

Сначала оценим второе слагаемое, стоящее в правой части (36). Имеем

$$|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)}\le 2\big(|u|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)}+|u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)}\big). \quad (37)$$

Умножим полунорму $|u|_{W^1_{2,\alpha}(K)}$, где K — произвольный треугольник из Q_1^h, на $h^{(1)}=\max\limits_{x\in K\subset Q_1^h}\rho(x)$. Выполнив преобразование переноса начала координат O и поворота осей OX_1 и OX_2 исходной системы координат таким образом, чтобы ось $O'X_1'$ прошла через два узла треугольника K, принадлежащие кривой Γ_0, а ось $O'X_2'$ — через тот узел K на Γ_0, который лежит левее (в том случае, когда основанием треугольника K является звено ломаной Γ_0), или так, чтобы начало координат O' совпало с единственным узлом треугольника K на кривой Γ_0, а ось $O'X_1'$ прошла через то звено ломаной Γ_0, левой узловой точкой которого этот узел является (в том случае, когда основанием K является одно из звеньев ломаной Γ_1), получим новую, локальную систему координат $O'X_1'X_2'$ (рис. 2). (Заметим, что в результате проведенных преобразований координат рассматриваемые нами полунормы и нормы остаются неизменными).

Оценим $h^{(1)}|u_I|_{W^1_{2,\alpha}(K)}$ в системе координат $O'X'_1X'_2$

$$h^{(1)}|u_I|_{W^1_{2,\alpha}(K)} = h^{(1)}\left|\sum_{i=1}^{3} u(P_i)\varphi_i\right|_{W^1_{2,\alpha}(K)} \le$$

$$\le C_{34}|u(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)|\left(\int\limits_K \rho^{-2\alpha}(x')dx'_1dx'_2\right)^{1/2} \le C_{35}|u(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)|\rho^{1-\alpha}(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2), \quad (38)$$

где $(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)$ — координаты узла в K, в котором функции $u(x')$ и $\rho(x')$ принимают наибольшие значения среди узлов треугольника K. В точке $\bar{x}'=(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)\in K$ из Q^h_1 имеем

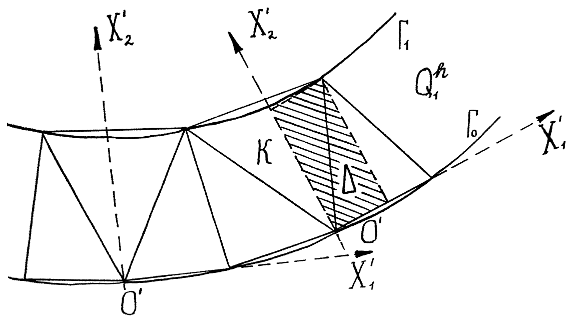

Рис. 2. Локальная система координат для треугольника K

$$\left|u(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)\rho^{1-\alpha}(\bar{x}'_1,\bar{x}'_2)\right| = \left|u(\bar{x}'_1,0)\rho^{1-\alpha}(\bar{x}'_1,0) + \int\limits_0^{\bar{x}'_2}\frac{\partial(u(\bar{x}'_1,x'_2)\rho^{1-\alpha}(\bar{x}'_1,x'_2))}{\partial x'_2}dx'_2\right|. \quad (39)$$

Получим оценки для слагаемых, стоящих в правой части равенства (39):

$$\left|\int\limits_0^{\bar{x}'_2}\frac{\partial(u(\bar{x}'_1,x'_2)\rho^{1-\alpha}(\bar{x}'_1,x'_2))}{\partial x'_2}dx'_2\right| = \left|\int\limits_0^{\bar{x}'_2}\frac{\partial u(\bar{x}'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\rho^{1-\alpha}(\bar{x}'_1,x'_2)dx'_2+\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^{\bar{x}'_2}(1-\alpha)u(\bar{x}'_1,x'_2)\rho^{-\alpha}(\bar{x}'_1,x'_2)\frac{\partial\rho(\bar{x}'_1,x'_2)}{\partial x'_2}dx'_2\right| \le$$

$$\le \int\limits_0^{\bar{x}'_2}\left|\frac{\partial u(\bar{x}'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\rho^{1-\alpha}(\bar{x}'_1,x'_2)\right|dx'_2 + C_{36}\int\limits_0^{\bar{x}'_2}\left|u(\bar{x}'_1,x'_2)\rho^{-\alpha}(\bar{x}'_1,x'_2)\right|dx'_2, \quad (40)$$

$$\left|u(\bar{x}'_1,0)\rho^{1-\alpha}(\bar{x}'_1,0)\right| = \left|u(0,0)\rho^{1-\alpha}(0,0) + \int\limits_0^{\bar{x}'_1}\frac{\partial(u(x'_1,0)\rho^{1-\alpha}(x'_1,0))}{\partial x'_1}dx'_1\right| \le$$

$$\le \int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left|\frac{\partial u(x'_1,0)}{\partial x'_1}\rho^{1-\alpha}(x'_1,0)\right|dx'_1 + \int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left|(1-\alpha)u(x'_1,0)\rho^{-\alpha}(x'_1,0)\frac{\partial\rho(x'_1,0)}{\partial x'_1}\right|dx'_1 \le$$

$$\le \int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left|\frac{\partial u(x'_1,0)}{\partial x'_1}\rho^{1-\alpha}(x'_1,0)\right|dx'_1 + C_{37}\int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left|u(x'_1,0)\rho^{-\alpha}(x'_1,0)\right|dx'_1. \quad (41)$$

Оценим модули подынтегральных функций интегралов (40), (41), получим

$$\left|\frac{\partial u(\bar{x}_1', x_2')}{\partial x_2'}\rho^{1-\alpha}(\bar{x}_1', x_2')\right| \le \left|\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_2'}\rho^{1-\alpha}(x_1', x_2')\right| + \int\limits_{x_1'}^{\bar{x}_2'} \left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u(t, x_2')}{\partial x_2'}\rho^{1-\alpha}(t, x_2')\right)\right| dt, \quad (42)$$

$$\left|u(\bar{x}_1', x_2')\rho^{-\alpha}(\bar{x}_1', x_2')\right| \le \left|u(x_1', x_2')\rho^{-\alpha}(x_1', x_2')\right| + \int\limits_{x_1'}^{\bar{x}_1'} \left|\frac{\partial}{\partial t}\big(u(t, x_2')\rho^{-\alpha}(t, x_2')\big)\right| dt, \quad (43)$$

если $0 \le x_1' \le \bar{x}_1'$,

$$\left|\frac{\partial u(x_1', 0)}{\partial x_1'}\rho^{1-\alpha}(x_1', 0)\right| \le \left|\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_1'}\rho^{1-\alpha}(x_1', x_2')\right| + \int\limits_{x_2'}^{\bar{x}_2'} \left|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u(x_1', t)}{\partial x_1'}\rho^{1-\alpha}(x_1', t)\right)\right| dt, \quad (44)$$

$$\left|u(x_1', 0)\rho^{-\alpha}(x_1', 0)\right| \le \left|u(x_1', x_2')\rho^{-\alpha}(x_1', x_2')\right| + \int\limits_{x_2'}^{\bar{x}_2'} \left|\frac{\partial}{\partial t}\big(u(x_1', t)\rho^{-\alpha}(x_1', t)\big)\right| dt, \quad (45)$$

если $0 \le x_2' \le \bar{x}_2'$.

Проинтегрируем неравенства (42), (43) по $x_1' \in (0, \bar{x}_1')$, а неравенства (44), (45) по $x_2' \in (0, \bar{x}_2')$, будем иметь

$$\int\limits_0^{\bar{x}_1'} \left|\frac{\partial u(\bar{x}_1', x_2')}{\partial x_2'}\rho^{1-\alpha}(\bar{x}_1', x_2')\right| dx_1' \le \int\limits_0^{\bar{x}_1'} \left|\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_2'}\rho^{1-\alpha}(x_1', x_2')\right| dx_1' +$$
$$+ \bar{x}_1' \int\limits_0^{\bar{x}_1'} \left|\frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_2'}\rho^{1-\alpha}(x_1', x_2')\right)\right| dx_1', \quad (46)$$

$$\int\limits_0^{\bar{x}_1'} \left|u(\bar{x}_1', x_2')\rho^{-\alpha}(\bar{x}_1', x_2')\right| dx_1' \le$$
$$\le \int\limits_0^{\bar{x}_1'} \left|u(x_1', x_2')\rho^{-\alpha}(x_1', x_2')\right| dx_1' + \bar{x}_1' \int\limits_0^{\bar{x}_1'} \left|\frac{\partial}{\partial x_1'}\big(u(x_1', x_2')\rho^{-\alpha}(x_1', x_2')\big)\right| dx_1', \quad (47)$$

$$\int\limits_0^{\bar{x}_2'} \left|\frac{\partial u(x_1', 0)}{\partial x_1'}\rho^{1-\alpha}(x_1', 0)\right| dx_2' \le$$
$$\le \int\limits_0^{\bar{x}_2'} \left|\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_1'}\rho^{1-\alpha}(x_1', x_2')\right| dx_2' + \bar{x}_2' \int\limits_0^{\bar{x}_2'} \left|\frac{\partial}{\partial x_2'}\left(\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_1'}\rho^{1-\alpha}(x_1', x_2')\right)\right| dx_2', \quad (48)$$

$$\int\limits_0^{\bar{x}_2'} \left|u(x_1', 0)\rho^{-\alpha}(x_1', 0)\right| dx_2' \le$$
$$\le \int\limits_0^{\bar{x}_2'} \left|u(x_1', x_2')\rho^{-\alpha}(x_1', x_2')\right| dx_2' + \bar{x}_2' \int\limits_0^{\bar{x}_2'} \left|\frac{\partial}{\partial x_2'}\big(u(x_1', x_2')\rho^{-\alpha}(x_1', x_2')\big)\right| dx_2'. \quad (49)$$

Вычислив интегралы в левых частях неравенств (46)–(49) и разделив обе части неравенств (46), (47) на $\bar{x}'_1$, а неравенств (48), (49) на $\bar{x}'_2$, используем неравенство Коши—Буняковского для интегралов, стоящих в правых частях полученных неравенств, и в результате имеем

$$\left|\frac{\partial u(\bar{x}'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\rho^{1-\alpha}(\bar{x}'_1,x'_2)\right| \leq \frac{1}{\bar{x}'_1}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\right)^2\rho^{2(1-\alpha)}(x'_1,x'_2)dx'_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}dx'_1\right)^{1/2}+$$
$$+\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left(\frac{\partial^2 u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2\partial x'_1}\right)^2\rho^{2(1-\alpha)}(x'_1,x'_2)dx'_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}dx'_1\right)^{1/2}+$$
$$+\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\right)^2(1-\alpha)^2\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)\left(\frac{\partial\rho(x'_1,x'_2)}{\partial x'_1}\right)^2dx'_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}dx'_1\right)^{1/2}, \quad (50)$$

$$\left|u(\bar{x}'_1,x'_2)\rho^{-\alpha}(\bar{x}'_1,x'_2)\right| \leq \frac{1}{\bar{x}'_1}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}u^2(x'_1,x'_2)\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)dx'_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}dx'_1\right)^{1/2}+$$
$$+\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_1}\right)^2\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)dx'_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}dx'_1\right)^{1/2}+$$
$$+\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}(-\alpha)^2u^2(x'_1,x'_2)\rho^{-2(\alpha+1)}(x'_1,x'_2)\left(\frac{\partial\rho(x'_1,x'_2)}{\partial x'_1}\right)^2dx'_1\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}dx'_1\right)^{1/2}, \quad (51)$$

$$\left|\frac{\partial u(x'_1,0)}{\partial x'_1}\rho^{1-\alpha}(x'_1,0)\right| \leq \frac{1}{\bar{x}'_2}\int\limits_0^{\bar{x}'_2}\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_1}\right)^2\rho^{2(1-\alpha)}(x'_1,x'_2)dx'_2\Bigg)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}dx'_2\right)^{1/2}+$$
$$+\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}\left(\frac{\partial^2 u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_1\partial x'_2}\right)^2\rho^{2(1-\alpha)}(x'_1,x'_2)dx'_2\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}dx'_2\right)^{1/2}+$$
$$+\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}(1-\alpha)^2\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_1}\right)^2\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)\left(\frac{\partial\rho(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\right)^2dx'_2\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}dx'_2\right)^{1/2}, \quad (52)$$

$$\left|u(x'_1,0)\rho^{-\alpha}(x'_1,0)\right| \leq \frac{1}{\bar{x}'_2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}u^2(x'_1,x'_2)\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)dx'_2\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}dx'_2\right)^{1/2}+$$
$$+\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}(-\alpha)^2u^2(x'_1,x'_2)\rho^{-2(\alpha+1)}(x'_1,x'_2)\left(\frac{\partial\rho(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\right)^2dx'_2\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}dx'_2\right)^{1/2}. \quad (53)$$

Учитывая ограниченность частных производных функции $\rho(x')$, запишем оценки (50)–(53) в следующем виде:

$$\left|\frac{\partial u(\bar{x}'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\rho^{1-\alpha}(\bar{x}'_1,x'_2)\right| \le \left(\frac{1}{\bar{x}'_1}\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\right)^2\rho^{2(1-\alpha)}(x'_1,x'_2)dx'_1\right)^{1/2} +$$

$$+(\bar{x}'_1)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left(\frac{\partial^2 u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2\partial x'_1}\right)^2\rho^{2(1-\alpha)}(x'_1,x'_2)dx'_1\right)^{1/2} +$$

$$+C_{38}(\bar{x}'_1)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\right)^2\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)dx'_1\right)^{1/2}, \quad (54)$$

$$\left|u(\bar{x}'_1,x'_2)\rho^{-\alpha}(\bar{x}'_1,x'_2)\right| \le \left(\frac{1}{\bar{x}'_1}\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}u^2(x'_1,x'_2)\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)dx'_1\right)^{1/2} +$$

$$+(\bar{x}'_1)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_1}\right)^2\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)dx'_1\right)^{1/2} +$$

$$+C_{39}(\bar{x}'_1)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_1}u^2(x'_1,x'_2)\rho^{-2(\alpha+1)}(x'_1,x'_2)dx'_1\right)^{1/2}, \quad (55)$$

$$\left|\frac{\partial u(x'_1,0)}{\partial x'_1}\rho^{1-\alpha}(x'_1,0)\right| \le \left(\frac{1}{\bar{x}'_2}\right)^{1/2}\int\limits_0^{\bar{x}'_2}\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_1}\right)^2\rho^{2(1-\alpha)}(x'_1,x'_2)dx'_2\Bigg)^{1/2} +$$

$$+(\bar{x}'_2)^{1/2}\int\limits_0^{\bar{x}'_2}\left(\frac{\partial^2 u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2\partial x'_1}\right)^2\rho^{2(1-\alpha)}(x'_1,x'_2)dx'_2\Bigg)^{1/2} +$$

$$+C_{40}(\bar{x}'_2)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\right)^2\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)dx'_2\right)^{1/2}, \quad (56)$$

$$\left|u(x'_1,0)\rho^{-\alpha}(x'_1,0)\right| \le \left(\frac{1}{\bar{x}'_2}\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}u^2(x'_1,x'_2)\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)dx'_2\right)^{1/2} +$$

$$+(\bar{x}'_2)^{1/2}\int\limits_0^{\bar{x}'_2}\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\right)^2\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)dx'_2\Bigg)^{1/2} +$$

$$+C_{41}(\bar{x}'_2)^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}'_2}u^2(x'_1,x'_2)\rho^{-2(\alpha+1)}(x'_1,x'_2)dx'_2\right)^{1/2}. \quad (57)$$

Проинтегрируем неравенства (54), (55) по $x'_2 \in (0,\bar{x}'_2)$, а неравенства (56), (57) по $x'_1 \in (0,\bar{x}'_1)$ и, применив неравенство Коши—Буняковского для интегралов в правых частях полученных неравенств, с учетом того, что $C_{42}\bar{x}'_2 < \bar{x}'_1 \le \bar{x}'_2 \le h^{(1)}$, будем иметь следующие оценки:

$$\int\limits_0^{\bar{x}_2'} \left|\frac{\partial u(\bar{x}_1', x_2')}{\partial x_2'}\rho^{1-\alpha}(\bar{x}_1', x_2')\right| dx_2' \leq \left(\frac{\bar{x}_2'}{\bar{x}_1'}\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{\bar{x}_2'}\int\limits_0^{\bar{x}_1'} \rho^{2(1-\alpha)}(x_1', x_2')\left(\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_2'}\right)^2 dx_1' dx_2'\right)^{1/2} +$$

$$+ (\bar{x}_1'\bar{x}_2')^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}_2'}\int\limits_0^{\bar{x}_1'} \rho^{2(1-\alpha)}(x_1', x_2')\left(\frac{\partial^2 u(x_1', x_2')}{\partial x_2' \partial x_1'}\right)^2 dx_1' dx_2'\right)^{1/2} +$$

$$+ C_{38}(\bar{x}_1'\bar{x}_2')^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}_2'}\int\limits_0^{\bar{x}_1'} \rho^{-2\alpha}(x_1', x_2')\left(\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_2'}\right)^2 dx_1' dx_2'\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_{43}\left(\max_{x' \in \Delta}\rho^2(x')\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Delta \rho^{-2\alpha}(x')\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial u(x')}{\partial x_s'}\right)^2 dx'\right)^{1/2} +$$

$$+ h^{(1)}\left(\int\limits_\Delta \rho^{2(1-\alpha)}(x')\sum_{s_1+s_2=2}\left(\frac{\partial^2 u(x')}{\partial {x_1'}^{s_1} \partial {x_2'}^{s_2}}\right)^2 dx'\right)^{1/2} +$$

$$+ C_{38}h^{(1)}\left(\int\limits_\Delta \rho^{-2\alpha}(x')\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial u(x')}{\partial x_s'}\right)^2 dx'\right)^{1/2}, \quad (58)$$

$$\int\limits_0^{\bar{x}_2'} \left|u(\bar{x}_1', x_2')\rho^{-\alpha}(\bar{x}_1', x_2')\right| dx_2' \leq \left(\frac{\bar{x}_2'}{\bar{x}_1'}\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{\bar{x}_2'}\int\limits_0^{\bar{x}_1'} \rho^{-2\alpha}(x_1', x_2')u^2(x_1', x_2') dx_1' dx_2'\right)^{1/2} +$$

$$+ (\bar{x}_1'\bar{x}_2')^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}_2'}\int\limits_0^{\bar{x}_1'} \rho^{-2\alpha}(x_1', x_2')\left(\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_1'}\right)^2 dx_1' dx_2'\right)^{1/2} +$$

$$+ C_{39}(\bar{x}_1'\bar{x}_2')^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}_2'}\int\limits_0^{\bar{x}_1'} \rho^{-2(\alpha+1)}(x_1', x_2')u^2(x_1', x_2') dx_1' dx_2'\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq C_{44}\left(\max_{x' \in \Delta}\rho^2(x')\right)^{1/2}\left(\int\limits_\Delta \rho^{-2(1+\alpha)}(x')u^2(x') dx'\right)^{1/2} +$$

$$+ h^{(1)}\left(\int\limits_\Delta \rho^{-2\alpha}(x')\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial u(x')}{\partial x_s'}\right)^2 dx'\right)^{1/2} + C_{39}h^{(1)}\left(\int\limits_\Delta \rho^{-2(1+\alpha)}(x')u^2(x') dx'\right)^{1/2}, \quad (59)$$

$$\int\limits_0^{\bar{x}_1'} \left|\frac{\partial u(x_1', 0)}{\partial x_1'}\rho^{1-\alpha}(x_1', 0)\right| dx_1' \leq \left(\frac{\bar{x}_1'}{\bar{x}_2'}\right)^{1/2} \left(\int\limits_0^{\bar{x}_1'}\int\limits_0^{\bar{x}_2'} \rho^{2(1-\alpha)}(x_1', x_2')\left(\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_1'}\right)^2 dx_1' dx_2'\right)^{1/2} +$$

$$+ (\bar{x}_1'\bar{x}_2')^{1/2}\int\limits_0^{\bar{x}_1'}\int\limits_0^{\bar{x}_2'} \rho^{2(1-\alpha)}(x_1', x_2')\left(\frac{\partial^2 u(x_1', x_2')}{\partial x_1' \partial x_2'}\right)^2 dx_1' dx_2'\Bigg)^{1/2} +$$

$$+ C_{40}(\bar{x}_1'\bar{x}_2')^{1/2}\left(\int\limits_0^{\bar{x}_1'}\int\limits_0^{\bar{x}_2'} \rho^{-2\alpha}(x_1', x_2')\frac{\partial u(x_1', x_2')}{\partial x_1'}\right)^2 dx_1' dx_2'\Bigg)^{1/2} \leq$$

$$\leq \Big(\max_{x'\in\Delta}\rho^2(x')\Big)^{1/2}\left(\int\limits_{\Delta}\rho^{-2\alpha}(x')\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial u(x')}{\partial x'_s}\right)^2 dx'\right)^{1/2}+$$

$$+\,h^{(1)}\left(\int\limits_{\Delta}\rho^{2(1-\alpha)}(x')\sum_{s_1+s_2=2}\left(\frac{\partial^2 u(x')}{\partial {x'_1}^{s_1}\partial {x'_2}^{s_2}}\right)^2 dx'\right)^{1/2}+$$

$$+\,C_{40}h^{(1)}\left(\int\limits_{\Delta}\rho^{-2\alpha}(x')\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial u(x')}{\partial x'_s}\right)^2 dx'\right)^{1/2}, \quad (60)$$

$$\int\limits_{0}^{\bar{x}'_1}\big|u(x'_1,0)\rho^{-\alpha}(x'_1,0)\big|dx'_1 \leq \left(\frac{\bar{x}'_1}{\bar{x}'_2}\right)^{1/2}\left(\int\limits_{0}^{\bar{x}'_1}\int\limits_{0}^{\bar{x}'_2}\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)u^2(x'_1,x'_2)dx'_1dx'_2\right)^{1/2}+$$

$$+\,(\bar{x}'_1\bar{x}'_2)^{1/2}\left(\int\limits_{0}^{\bar{x}'_1}\int\limits_{0}^{\bar{x}'_2}\rho^{-2\alpha}(x'_1,x'_2)\left(\frac{\partial u(x'_1,x'_2)}{\partial x'_2}\right)^2 dx'_1dx'_2\right)^{1/2}+$$

$$+\,C_{41}(\bar{x}'_1\bar{x}'_2)^{1/2}\left(\int\limits_{0}^{\bar{x}'_1}\int\limits_{0}^{\bar{x}'_2}\rho^{-2(1+\alpha)}(x'_1,x'_2)u^2(x'_1,x'_2)dx'_1dx'_2\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq \Big(\max_{x'\in\Delta}\rho^2(x')\Big)^{1/2}\left(\int\limits_{\Delta}\rho^{-2(1+\alpha)}(x')u^2(x')dx'\right)^{1/2}+$$

$$+\,h^{(1)}\left(\int\limits_{\Delta}\rho^{-2\alpha}(x')\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial u(x')}{\partial x'_s}\right)^2 dx'\right)^{1/2}+C_{41}h^{(1)}\left(\int\limits_{\Delta}\rho^{-2(1+\alpha)}(x')u^2(x')dx'\right)^{1/2}, \quad (61)$$

где Δ — прямоугольник из Q_1^h (рис. 2).

Принимая во внимание, что $\Big(\max\limits_{x'\in\Delta}\rho^2(x')\Big)^{1/2} = h^{(1)}$, из оценок (38)–(41) и (58)–(61) устанавливаем

$$h^{(1)}|u_I|_{W^1_{2,\alpha}(K)} \leq h^{(1)}\left(C_{45}\left(\int\limits_{\Delta}\rho^{-2\alpha}(x')\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial u(x')}{\partial x'_s}\right)^2 dx'\right)^{1/2}+\right.$$

$$\left.+C_{46}\left(\int\limits_{\Delta}\rho^{-2(1+\alpha)}(x')u^2(x')dx'\right)^{1/2}+C_{47}\left(\int\limits_{\Delta}\rho^{-2(\alpha-1)}(x')\sum_{s_1+s_2=2}\left(\frac{\partial^2 u(x')}{\partial {x'_1}^{s_1}\partial {x'_2}^{s_2}}\right)^2 dx'\right)^{1/2}\right).$$

Перейдя к системе координат OX_1X_2, возведем обе части полученного неравенства в квадрат, будем иметь

$$|u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(K)} \leq 3\int\limits_{\Delta}\left(C_{45}^2\rho^{-2\alpha}(x)\sum_{s=1}^{2}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_s}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\,C_{46}^2\rho^{-2(1+\alpha)}(x)u^2(x)+C_{47}^2\rho^{-2(\alpha-1)}(x)\sum_{s_1+s_2=2}\left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^{s_1}\partial x_2^{s_2}}\right)^2\right)dx.$$

Просуммировав неравенства по всем K и Δ из Q_1^h, запишем

$$|u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)} \leq C_{48}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_1^h)}+C_{49}\|u\|^2_{L_{2,1+\alpha}(Q_1^h)}+C_{50}\|u\|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)}. \quad (62)$$

Тогда из неравенств (37), (62) следует оценка

$$|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)} \le 2\big(C_{48}\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_1^h)} + C_{49}\|u\|^2_{L_{2,1+\alpha}(Q_1^h)} + C_{51}\|u\|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)}\big). \tag{63}$$

Так как $\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(\Omega)} \le C_{25}$, $\|u\|^2_{L_{2,\alpha}(\Omega)} \le C_{52}$, $\|u\|^2_{L_{2,1+\alpha}(\Omega)} \le C_{53}$, $\|u\|^2_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)} \le C_{54}$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся такие положительные числа $\delta_1,\dots,\delta_4$, что $\|u\|^2_{L_{2,\alpha}(\Gamma_0^{\delta_1})} < \dfrac{\varepsilon^2}{16C_{33}}$, $\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(\Gamma_0^{\delta_2})} < \dfrac{\varepsilon^2}{24C_{48}}$, $\|u\|^2_{L_{2,1+\alpha}(\Gamma_0^{\delta_3})} < \dfrac{\varepsilon^2}{24C_{49}}$, $\|u\|^2_{W^1_{2,\alpha}(\Gamma_0^{\delta_4})} < \dfrac{\varepsilon^2}{24C_{51}}$, где $\Gamma_0^{\delta_i} = \{x\in\bar\Omega\colon \rho(x)\le\delta_i, i=1,\dots,4\}$ есть δ_i-окрестность границы Γ_0 в области $\bar\Omega$. Задав ε, определим $\delta = \min\limits_i \delta_i$ и n_ε — число слоев Q_j, $j=1,\dots,n_\varepsilon$, содержащихся в Γ_0^δ ($\Gamma_0^\delta = \bigcup\limits_{j=1}^{n_\varepsilon} Q_j$) так, чтобы выполнились неравенства

$$\|u\|^2_{L_{2,\alpha}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n_\varepsilon} Q_j\right)} < \frac{\varepsilon^2}{16C_{33}},\ \|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n_\varepsilon} Q_j\right)} < \frac{\varepsilon^2}{24C_{48}},\ \|u\|^2_{L_{2,1+\alpha}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n_\varepsilon} Q_j\right)} < \frac{\varepsilon^2}{24C_{49}},$$

$$\|u\|^2_{W^1_{2,\alpha}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n_\varepsilon} Q_j\right)} < \frac{\varepsilon^2}{24C_{51}}. \tag{64}$$

Вследствие того, что $Q_1^h \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n_\varepsilon} Q_j$, имеем

$$\|u\|^2_{L_{2,\alpha}(Q_1^h)} < \frac{\varepsilon^2}{16C_{33}}, \tag{65}$$

$$\|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_1^h)} < \frac{\varepsilon^2}{24C_{48}},\ \|u\|^2_{L_{2,1+\alpha}(Q_1^h)} < \frac{\varepsilon^2}{24C_{49}}, \|u\|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)} < \frac{\varepsilon^2}{24C_{51}}. \tag{66}$$

Тогда из неравенств (63), (66) следует

$$|u-u_I|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)} < \frac{\varepsilon^2}{4C_{33}}. \tag{67}$$

Теперь перейдем к оценке первого слагаемого правой части неравенства (36). Воспользуемся тем, что

$$\|u-u_I\|^2_{L_{2,\alpha}(Q_1^h)} \le 2\big(\|u\|^2_{L_{2,\alpha}(Q_1^h)} + \|u_I\|^2_{L_{2,\alpha}(Q_1^h)}\big). \tag{68}$$

Оценим $\|u_I\|^2_{L_{2,\alpha}(Q_1^h)}$. Для любого K из Q_1^h в локальной системе координат $O'X_1'X_2'$ (рис. 2) имеем

$$\|u_I\|_{L_{2,\alpha}(K)} = \Big\|\sum_{i=1}^3 u(P_i)\varphi_i\Big\|_{L_{2,\alpha}(K)} \le C_{55}|u(\bar x')|\left(\int\limits_K \rho^{-2\alpha}(x')dx'\right)^{1/2} \le C_{56}|u(\bar x')|\rho^{1-\alpha}(\bar x').$$

(Здесь $u(\bar x') = \max\limits_i u(P_i)$, $\rho(\bar x') = \max\limits_i \rho(P_i)$, P_i — узлы треугольника K, $i=1,2,3$). Используя неравенства (39)–(41) и (58)–(61), получаем

$$\|u_I\|_{L_{2,\alpha}(K)} \le h^{(1)} \left(C_{57} \left(\int\limits_{\Delta} \rho^{-2\alpha}(x') \sum_{s=1}^{2} \left(\frac{\partial u(x')}{\partial x'_s} \right)^2 dx' \right)^{1/2} + \right.$$

$$\left. + C_{58} \left(\int\limits_{\Delta} \rho^{-2(1+\alpha)}(x') u^2(x') dx' \right)^{1/2} + C_{59} \left(\int\limits_{\Delta} \rho^{-2(\alpha-1)}(x') \sum_{s_1+s_2=2} \left(\frac{\partial^2 u(x')}{\partial {x'_1}^{s_1} \partial {x'_2}^{s_2}} \right)^2 dx' \right)^{1/2} \right).$$

Перейдем к системе координат OX_1X_2 и, возведя обе части неравенства в квадрат, запишем оценку

$$\|u_I\|^2_{L_{2,\alpha}(K)} \le 3\big(h^{(1)}\big)^2 \int\limits_{\Delta} \left(C_{57}^2 \rho^{-2\alpha}(x) \sum_{s=1}^{2} \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_s} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + C_{58}^2 \rho^{-2(1+\alpha)}(x) u^2(x) + C_{59}^2 \rho^{-2(\alpha-1)}(x) \sum_{s_1+s_2=2} \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2}} \right)^2 \right) dx.$$

Просуммировав неравенства по всем K и Δ из Q_1^h, с учетом того, что $h^{(1)} \le h$, будем иметь

$$\|u_I\|^2_{L_{2,\alpha}(Q_1^h)} \le h^2 \big(C_{60} \|u\|^2_{W^1_{2,\alpha}(Q_1^h)} + C_{61} \|u\|^2_{W^2_{2,\alpha-1}(Q_1^h)} + C_{62} \|u\|^2_{L_{2,1+\alpha}(Q_1^h)} \big).$$

Отсюда

$$\lim_{h\to 0} \|u_I\|^2_{L_{2,\alpha}(Q_1^h)} = 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $h_0(\varepsilon)$, что неравенство

$$\|u_I\|^2_{L_{2,\alpha}(Q_1^h)} \le \frac{\varepsilon^2}{16C_{33}} \tag{69}$$

верно для всех $h \le h_0(\varepsilon)$. Из неравенств (65), (68), (69) получим

$$\|u - u_I\|^2_{L_{2,\alpha}(Q_1^h)} < \frac{\varepsilon^2}{4C_{33}}. \tag{70}$$

Теперь, используя неравенство (36) и оценки (67), (70), установим предельное равенство (35). Лемма доказана. □

Замечание 1. Так как справедливо неравенство (64), то приняв во внимание, что $\Omega' \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n_\varepsilon} Q_j$, будем иметь

$$\|u\|^2_{W^1_{2,\alpha}(\Omega')} < \varepsilon^2.$$

Доказательство теоремы 1. Перейдем к пределу при $h \to 0$ в равенстве (15). Учитывая соотношения (17), (20), (35) и последнюю оценку, получаем требуемое утверждение (16). Теорема 1 доказана. □

Теперь установим основной результат работы.

Теорема 2. Пусть коэффициенты $a_{kl}(x) = a_{lk}(x)$, $(k,l = 1,2)$ и $a(x) > 0$ удовлетворяют неравенствам (8)–(11), выполнено условие (7). Тогда приближенное решение u_h задачи (13) сходится при $h \to 0$ в пространстве $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ к решению u задачи (12).

Доказательство. Чтобы установить справедливость соотношения (14), совершим предельный переход при $h \to 0$ в неравенствах

$$\|u - u_h\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)} \le C_8 \inf_{v_h \in V^h} \|u - v_h\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)} \le C_8 \|u - u_I\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)}$$

и применим к ним (16). Теорема 2 доказана. □

Заключение

В настоящей работе построен метод конечных элементов для решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с вырождением на всей дважды непрерывно дифференцируемой границе двумерной области Ω. Доказано, что решение МКЭ сходится в весовом пространстве $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ к обобщенному решению из пространства $\mathring{W}^2_{2,\alpha-1}(\Omega) \subset \mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$. Разработанные и исследованные схемы метода конечных элементов с сетками, сгущающимися к границе области, могут быть использованы для решения задач гидродинамики, электромагнетизма, диффузии, теории пластичности и др., приводящих к краевым задачам для эллиптических уравнений с вырождением на границе. В дальнейшем, благодаря сужению пространства $\mathring{W}^2_{2,\alpha-1}(\Omega)$, которому принадлежит обобщенное решение поставленной задачи (см. [14]), планируется установить скорость сходимости приближенного решения к точному по норме весового пространства Соболева.

Литература

1. Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И. Метод конечных элементов для первой краевой задачи с согласованным вырождением исходных данных // Доклады Академии Наук. 1994. Т. 338, № 6. С. 731–733.

2. Assous F., Ciarlet P. Jr., Segré J. Numerical Solution of the Time-Dependent Maxwell Equations in Two-Dimensional Singular Domain: The Singular Complement Method // Journal of Computational Physics. 2000. Vol. 161. P. 218–249. DOI: 10.1006/jcph.2000.6499.

3. Costabel M., Dauge M., Schwab C. Exponential Convergence of hp-FEM for Maxwell's Equations with Weighted Regularization in Polygonal Domains // Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2005. Vol. 15, No. 4. P. 575–622. DOI: 10.1142/S0218202505000480.

4. Arroyo D., Bespalov A., Heuer N. On the Finite Element Method for Elliptic Problems with Degenerate and Singular Coefficients // Mathematics of Computation. 2007. Vol. 76, No. 258. P. 509–537. DOI: 10.1090/S0025-5718-06-01910-7.

5. Li H., Nistor V. Analysis of a Modified Schrödinger Operator in 2D: Regularity, Index, and FEM // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 224, No. 1. P. 320–338. DOI: 10.1016/j.cam.2008.05.009.

6. Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В. Схема метода конечных элементов для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Сибирский журнал вычислительной математики. 2009. Т. 12, № 3. С. 313–324.

7. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. The Finite Element Method for a Boundary Value Problem with Strong Singularity // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2010. Vol. 234, No. 9. P. 2870–2882. DOI: 10.1016/j.cam.2010.01.020.

8. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O. New Numerical Method for Solving Time-Harmonic Maxwell Equations with Strong Singularity // Journal of Computational Physics. 2012. Vol. 231, No. 6. P. 2438–2448. DOI: 10.1016/j.jcp.2011.11.031.
9. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. On the Error Estimation of the Finite Element Method for the Boundary Value Problems with Singularity in the Lebesgue Weighted Space // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2013. Vol. 34, No. 12. P. 1328–1347. DOI: 10.1080/01630563.2013.809582.
10. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. The Finite Element Method for Boundary Value Problems with Strong Singularity and Double Singularity // Lecture Notes in Computer Science. 2013. Vol. 8236. P. 110–121. DOI: 10.1007/978-3-642-41515-9_10.
11. Никольский С.М. Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождением на границе // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 1979. Т. 150. С. 212–238.
12. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Эллиптическое уравнение с вырождением. Вариационный метод // Доклады Академии Наук СССР. 1981. Т. 257, № 1. С. 42–45.
13. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства решений // Доклады Академии Наук СССР. 1981. Т. 257, № 2. С. 278–282.
14. Рукавишников В.А., Рукавишникова Е.И. Об изоморфном отображении весовых пространств эллиптическим оператором с вырождением на границе области // Дифференциальные уравнения. 2014. Т. 50, № 3. С. 349–355. DOI: 10.1134/S037406411403008X.
15. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977. 456 с.
16. Обэн Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач, пер. с англ. М.: Мир, 1977. 383 с.
17. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач, пер. с англ. М.: Мир, 1980. 512 с.

Рукавишникова Елена Ивановна, к.ф.-м.н., доцент, с.н.с., лаборатория математического моделирования в физике и технике, Вычислительный центр ДВО РАН (Хабаровск, Российская Федерация)

DOI: 10.14529/cmse190301

CONVERGENCE OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DEGENERATION ON THE WHOLE BOUNDARY OF DOMAIN

© 2019 E.I. Rukavishnikova

Computing center FEB RAS

(str. Kim Yu Chena 65, Khabarovsk, 680000 Russia)

E-mail: rukavishnikova-55@mail.ru

Received: 04.09.2018

In this paper we consider the Dirichlet problem with homogeneous boundary condition for a second-order elliptic equation with degeneration on the entire twice continuously differentiable boundary of two-dimensional domain Ω. We define a generalized solution of this problem, which exists and is unique in the weighted Sobolev space $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$. To solve the formulated problem a finite element method is developed, the scheme of which is constructed on the basis of the definition of a generalized solution of the original differential problem in the space $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$. For this purpose a two-dimensional convex domain is divided into triangles with special condensation to the boundary. Next we introduce a finite element space $V^h \subset \mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ that contains continuous functions liner on each triangular element of grid region Ω^h and equal to zero on the set $\bar{\Omega} \setminus \Omega^h$, and show unique solvability of the scheme of the finite element method. For the generalized solution u from the subspace $\mathring{W}^2_{2,\alpha-1}(\Omega)$ of the space $\mathring{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$, using its values in the nodes of the triangulated domain, an interpolant $u_I \in V^h$ is constructed, and the fact of its convergence with respect to the norm $W^1_{2,\alpha}(\Omega)$ is established. The main result of the work for the proposed method for solving the first boundary value problem with degeneration is the proof of the convergence of the approximate solution to the exact solution in the weighted Sobolev space.

Keywords: boundary value problem with degeneration, Sobolev weighted space, generalized solution, finite element method.

FOR CITATION

Rukavishnikova E.I. Convergence of the Finite Element Method for Boundary Value Problem with Degeneration on Whole Boundary of the Domain. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering.* 2019. vol. 8, no. 3. pp. 5–26. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse190301.

References

1. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. The Finite Element Method for the First Boundary Value Problem with Coordinated Degeneration of the Initial Data. *Russian Academy of Sciences. Doklady. Mathematics.* 1995. vol. 50, no. 2. pp. 335–339.

2. Assous F., Ciarlet P. Jr., Segré J. Numerical Solution of the Time-Dependent Maxwell Equations in Two-Dimensional Singular Domain: The Singular Complement Method. *Journal of Computational Physics.* 2000. vol. 161. pp. 218–249. DOI: 10.1006/jcph.2000.6499.

3. Costabel M., Dauge M., Schwab C. Exponential Convergence of hp-FEM for Maxwell's Equations with Weighted Regularization in Polygonal Domains. *Mathematical*

Models and Methods in Applied Sciences. 2005. vol. 15, no. 4. pp. 575–622. DOI: 10.1142/S0218202505000480.

4. Arroyo D., Bespalov A., Heuer N. On the Finite Element Method for Elliptic Problems with Degenerate and Singular Coefficients. *Mathematics of Computation.* 2007. vol. 76, no. 258. pp. 509–537. DOI: 10.1090/S0025-5718-06-01910-7.

5. Li H., Nistor V. Analysis of a Modified Schrödinger Operator in 2D: Regularity, Index, and FEM. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2009. vol. 224, no. 1. pp. 320–338. DOI: 10.1016/j.cam.2008.05.009.

6. Rukavishnikov V.A., Kuznetsova E.V. A Scheme of a Finite Element Method for Boundary Value Problems with Non-Coordinated Degeneration of Input Data. *Numerical Analysis and Applications.* 2009. vol. 2, no. 3. pp. 250–259. DOI: 10.1134/S1995423909030069

7. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. The Finite Element Method for a Boundary Value Problem with Strong Singularity. *Journal of Computational and Applied Mathematics.* 2010. vol. 234, no. 9. pp. 2870–2882. DOI: 10.1016/j.cam.2010.01.020.

8. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O. New Numerical Method for Solving Time-Harmonic Maxwell Equations with Strong Singularity. *Journal of Computational Physics.* 2012. vol. 231, no. 6. pp. 2438–2448. DOI: 10.1016/j.jcp.2011.11.031.

9. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. On the Error Estimation of the Finite Element Method for the Boundary Value Problems with Singularity in the Lebesgue Weighted Space. *Numerical Functional Analysis and Optimization.* 2013. vol. 34, no. 12. pp. 1328–1347. DOI: 10.1080/01630563.2013.809582.

10. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. The Finite Element Method for Boundary Value Problems with Strong Singularity and Double Singularity. *Lecture Notes in Computer Science.* 2013. vol. 8236. pp. 110–121. DOI: 10.1007/978-3-642-41515-9_10.

11. Nikol'skij S.M. A Variational Problem for an Equation of Elliptic Type with Degeneration on the Boundary. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.* 1981. vol. 150. pp. 227–254.

12. Lizorkin P.I., Nikol'skij S.M. An Elliptic Equation with Degeneracy. A Variational Method. *Soviet Mathematics. Doklady.* 1981. vol. 23. pp. 237–240.

13. Lizorkin P.I., Nikol'skij S.M. Elliptic Equations with Degeneracy. Differential Properties of Solutions. *Soviet Mathematics. Doklady.* 1981. vol. 23. pp. 268–271.

14. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova E.I. On the Isomorphic Mapping of Weighted Spaces by an Elliptic Operator with Degeneration on the Domain Boundary. *Differential Equations.* 2014. vol. 50, no. 3. pp. 345–351. DOI: 10.1134/S0012266114030082

15. Nikol'skii S.M. Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems. Springer-Verlag, New York. 1975. 420 p.

16. Aubin J.P. Approximation of Elliptic Boundary-Value Problems. Wiley-Interscience Inc., New York, London, Sydney, Toronto. 1972. 360 p.

17. Ciarlet P.G. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North Holland Publishing Company, Amsterdam, New York, Oxford, 1978. 529 p.