

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДА ПИКАРА ПРИ РЕШЕНИИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

© 2019 Х.К. Аль-Махдави

Южно-Уральский государственный университет

(454080 Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, д. 76)

E-mail: hssnkd@gmail.com

Поступила в редакцию: 08.01.2019

В данной работе поставлена и решена обратная задача Коши для уравнения теплопроводности. В этой задаче начальное распределение температуры неизвестно, а вместо него дано распределение температуры в момент времени $t = T > 0$. Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к большим изменениям решений. Хорошо известно, что данная задача некорректно поставлена. Для решения прямой задачи используется метод разделения переменных. Заметим, что метод разделения переменных совершенно неприменим для решения обратной задачи Коши, так как приводит к достаточно большим погрешностям, а также к расходящимся рядам. В.К. Иванов заметил, что если обратную задачу решать методом разделения переменных, а затем полученный ряд заменять частичной суммой ряда, у которой число слагаемых зависит от δ , $N = N(\delta)$, то в результате получим устойчивое приближенное решение. Метод Пикара использует регуляризующее семейство операторов $\{R_N\}$, отображающих пространство $L_2[0,1]$ в себя. Приведены результаты вычислительных экспериментов и произведена оценка эффективности данного метода.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, метод Пикара, некорректная задача, проблема Коши.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Аль-Махдави Х.К. Исследование метода Пикара при решении обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2019. Т. 8, № 4. С. 5–14. DOI: 10.14529/cmse190401.

Введение

Многие прикладные задачи, сформулированные как обратные задачи математической физики, относятся к классу некорректно поставленных задач. Обратная задача Коши для уравнения теплопроводности определяется как некорректная задача [3] в том смысле, что «небольшое» произвольное изменение данных может привести к «большим» ошибкам в решении.

Заметим, что исследуемая нами обратная задача для уравнения теплопроводности может быть решена и многими другими методами. Например, методом регуляризации А.Н. Тихонова [5], методом М.М. Лаврентьева [6], методом квазирешений В.К. Иванова [1, 2] и многими другими. Так, многие из методов, описанных для решения обратных задач математической физики, также описывали решение классической задачи прямой теплопроводности. Основы оптимальных методов были получены для решения некорректных задач, а также способов оценки точного решения и точности оценок ошибок порядка для этих методов [4].

Теоретические концепции и вычислительная реализация, связанные с обратной задачей Коши уравнения теплопроводности, обсуждались многими авторами, и было описано

много методов. В [7] используется метод регуляризации Тихонова для построения функции стоимости для исходной задачи обратной теплопроводности и преобразования ее в задачу оптимизации. Метод регуляризации Тихонова, используемый для решения теплового потока на передней поверхности толстой пластины, основан на измеренной истории температуры на задней поверхности пластины, которая изолирована. Метод полудискретного регулирования используется для определения распределения температуры в пластине [8]. Итеративная схема разбивает сложную задачу оптимизации на несколько более простых подзадачи и объединяет преимущества альтернативной методики оптимизации. Обратные задачи теплопроводности треугольной стенки, решаемые методом сопряженного градиента, были связаны с методом конечных элементов для определения двумерных изменений температур и тепловых потоков на поверхности стенки со временем [9]. Обратная пространственно-зависимая задача об источнике была исследована для уравнения теплопроводности. Метод регуляризации Тихонова использовался для решения задачи [10].

Основная идея этой работы состоит в том, чтобы восстановить функцию источника уравнения диффузии, используя метод Пикара, предложенный в [1, 2]. Метод разделения переменных использовался для решения прямой задачи для уравнения с частными производными для уравнения теплопроводности. Все эти шаги будут реализованы через разделы этой статьи. В разделе 1 была рассмотрена математическая формулировка этой проблемы, и метод разделения переменных использовался для ее решения в качестве прямой задачи. Раздел 2 посвящен обратной задаче Коши для уравнений теплопроводности и дает описание известных данных и оператора. Раздел 3 демонстрирует использование метода Пикара при помощи регуляризующего семейства операторов $\{R_N\}$, отображающих пространство $L_2[0, 1]$ в себя. Пример для проверки точности нашего оценочного решения представлен в разделе 4. Наконец, объяснение предложенного метода было обобщено в заключительном разделе с предлагаемой будущей работой.

1. Постановка прямой задачи Коши для уравнения теплопроводности

Прямая задача состоит в теплопроводности, проходящей через бар с определенным граничным условием и начальным температурным условием. Математическая формулировка этой проблемы была описана следующим парциальным дифференциальным уравнением

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}; \quad 0 < x < 1, t \in (0, T], \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x); \quad x \in [0, 1], \quad (2)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0; \quad t \in [0, T]. \quad (3)$$

Предположим, что $u_0(x) \in H_0^2[0, 1]$.

Требуется определить функцию $u(x, t) \in C([0, 1] \times [0, T]) \cap C^{2,1}(0, 1) \times (0, T]$, удовлетворяющую уравнению (1) на $x \in [0, 1]$ и $t \in (0, T]$, а также начальному условию (2) и граничным условиям (3).

Решая задачу (1–3) методом разделения переменных, получим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x), \quad (4)$$

где $x \in [0, 1]$, $t \in [0, T]$, а

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x), \quad (5)$$

где

$$a_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(n\pi x) dx. \quad (6)$$

2. Постановка обратной задачи Коши для уравнения теплопроводности

В (1–3) можно рассмотреть обратную задачу Коши для уравнения теплопроводности, т.е. известно распределение температуры в момент времени $t = T > 0$, $u(x, T)$, и требуется найти начальное распределение $u_0(x)$, считая, что $u_0(x) \in H_0^2[0, 1]$.

Предположим, что нам известна функция $g_0(x) \in C[0, 1]$, являющаяся решением прямой задачи при $t = T$,

$$u(x, T) = g_0(x). \quad (7)$$

Точное значение функции $g_0(x)$ неизвестно, а вместо него дано пара $(g_\delta(x) \text{ и } \delta)$, где $g_\delta(x) \in C[0, 1]$, $\delta > 0$, требуется определить функцию $u_0(x) \in M_r$,

$$M_r = \{u(x): u(x) \in H_0^2[0, 1], \|u(x)\|_{H_0^2}^2 \leq r^2, u'_0(0) = u'_0(1) = 0\}, \quad (8)$$

такую что при подстановке ее в условие (2), получим решение $u(x, t)$ задачи. (1–3), удовлетворяющее условию.

Дополнительно предположим, что точное значения функции $g_0(x)$ нам не известно, а вместо того дано $g_\delta(x) \in C[0, 1]$ и $\delta > 0$ так, что

$$\|g_\delta(x) - g_0(x)\|^2 \leq \delta^2. \quad (9)$$

Используя исходные данные задачи $g_\delta(x)$ и δ требуется определить приближенное значение $u_\delta(x)$, а также получить оценку погрешности $\|u_\delta(x) - u_0(x)\|_{L_2}$.

3. Решение обратной задачи Коши методом Пикара

Метод Пикара [1, 2] использует регуляризующее семейство операторов $\{R_N\}$, отображающих пространство $L_2[0, 1]$ в себя и определяемых формулой. При равномерной регуляризации $\forall N \Rightarrow \|R_N\| \leq 1$ и $\forall u \Rightarrow R_N Au \rightarrow u$ при $N \rightarrow \infty$, это семейство операторов называется регуляризующими

$$R_N g(x) = \sum_{n=1}^N g_n e^{(n\pi)^2 T} \sin(n\pi x), \quad (10)$$

где

$$g_n = 2 \int_0^1 g(x) \sin n\pi x dx. \quad (11)$$

Приведем ряд свойств семейства $\{R_N\}$, сформулированных в виде лемм.

Лемма 1. Для любого N оператор R_N , определенный формулой (10), является линейным ограниченным с нормой $\|R_N\| = e^{(\pi N)^2 T}$.

Доказательство. Линейность оператора R_N следует из формулы (10).

Теперь докажем, что

$$\|R_N\| = e^{(\pi N)^2 T}, \quad (12)$$

ограниченность оператора R_N будет следовать из формулы (12).

Так как

$$\|R_N\|^2 = \sup \{ \|R_N g\|^2 : g \in L_2[0,1], \|g\|^2 \leq 1 \}, \quad (13)$$

а

$$\|g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} g_n^2, \quad (14)$$

то из (13) и (14) будет следовать, что при $g(x) \in L_2[0,1]$ и $\|g\| \leq 1$

$$\|R_N\| \leq e^{2(\pi N)^2 T}. \quad (15)$$

Рассмотрим элемент $g_N(x) = 2 \sin \pi N x$.

Так как $g_N \in L_2[0,1]$ и $\|g_N\| = 1$, то подействуем на него оператор R_N .

Тогда

$$\|R_N g\|^2 = e^{2(\pi N)^2 T} \sin \pi N x, \quad (16)$$

из (16) следует, что

$$\|R_N g\|^2 = e^{2(\pi N)^2 T}, \quad (17)$$

а из (17), что

$$\|R_N g\|^2 \geq e^{2(\pi N)^2 T}, \quad (18)$$

из (15) и (18) следует, что $\|R_N\|^2 = e^{2(\pi N)^2 T}$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 2. Семейство операторов $\{R_N\}$ регуляризует обратную задачу (1), (3) и (7) на M_r .

Доказательство. Из определения регуляризующего семейства операторов [1, 2] следует, что для любого элемента $u(x) \in M_r$ справедливо соотношение, $R_N = \sum_{n=1}^N \rightarrow u(x)$ при $N \rightarrow \infty$ в метрике $L_2[0,1]$,

$$R_N \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{(n\pi)^2 T} \sin(n\pi x) \right] \rightarrow u(x), \quad (19)$$

при $N \rightarrow \infty$ в метрике $L_2[0,1]$, где

$$u_n = 2 \int_0^1 u(x) \sin(n\pi x) dx. \quad (20)$$

Так как

$$R_N \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{(n\pi)^2 T} \sin(n\pi x) \right] - u(x) = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n \sin(n\pi x), \quad (21)$$

то

$$\left\| R_N \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{(n\pi)^2 T} \sin(n\pi x) \right] - u(x) \right\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n^2, \quad (22)$$

виду того, что $u(x) \in L_2[0,1]$ следует сходимость ряда

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n^2. \quad (23)$$

Таким образом,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n^2 \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (24)$$

Тем самым лемма доказана.

Приближенное решение $u_{\delta}^N(x)$ обратной задачи определим формулой

$$u_{\delta}^N(x) = R_N g_{\delta}(x). \quad (25)$$

Теперь перейдем к определению зависимости $N(\delta)$. Для этого сделаем оценку

$$\|u_0(x) - u_{\delta}^N(x)\| \leq \|u_0(x) - u_0^N(x)\| + \|u_0^N(x) - u_{\delta}^N(x)\|, \quad (26)$$

где

$$u_0^N(x) = R_N g_0(x). \quad (27)$$

Сначала оценим второе слагаемое в формуле (26)

$$\|u_0^N(x) - u_{\delta}^N(x)\| = \|R_N g_0(x) - g_{\delta}(x)\| \leq \|R_N\| \cdot \delta. \quad (28)$$

Из (28) и леммы 1 следует, что

$$\|u_0^N(x) - u_{\delta}^N(x)\| = e^{(\pi N)^2 T} \cdot \delta, \quad (29)$$

перейдем к оценке первого слагаемого в формуле (26)

$$\|u_0^N(x) - u_{\delta}^N(x)\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} u_n^2, \quad (30)$$

где

$$u_n = 2 \int_0^1 u_0(x) \sin(\pi n x) dx. \quad (31)$$

Так как $u_0 \in M_r$, что $u_0''(x) \in L_2[0,1]$ и $\|u_0''(x)\|_{L_2}^2 \leq r^2$.

Таким образом,

$$u_0''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \pi n x, \quad (32)$$

где

$$v_n = 2 \int_0^1 u_0''(x) \sin \pi n x dx. \quad (33)$$

Проинтегрировав формулу (32), получим, что

$$v_n = -(\pi n)^2 u_n, \quad (34)$$

Из (33) следует, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} u_n^2 \leq \frac{r^2}{(\pi N)^4}, \quad (35)$$

а из (30) и (33), что

$$\|u_0(x) - u_0^N(x)\| \leq \frac{r}{(\pi N)^2} \quad (36)$$

окончательно

$$\|u_0(x) - u_{\delta}^N(x)\| \leq \frac{r}{(\pi N)^2} + e^{(\pi N)^2 T} \cdot \delta. \quad (37)$$

Таким образом, из (35) и (37) определим параметр регуляризации $N(\delta)$ из условия

$$\min_N \left(\frac{r}{(\pi N)^2} + e^{(\pi N)^2 T} \cdot \delta \right). \quad (38)$$

4. Численный пример

Учитывая задачу из (1–4), нам нужно определить неизвестную функцию для начальной температуры $u(x)$ по известной функции $u(x, T) = g(x)$.

Пример 1. Прямое решение для температуры, где время ($T = 0,001$ и $T = 0,005$) для проверки приближения мы имеем точную начальную температуру $u_0(x) = 4\sin(3\pi x) + 7\sin(8\pi x)$, как показано на рис. 1. Мы можем найти функцию $g(x)$, используя (4).

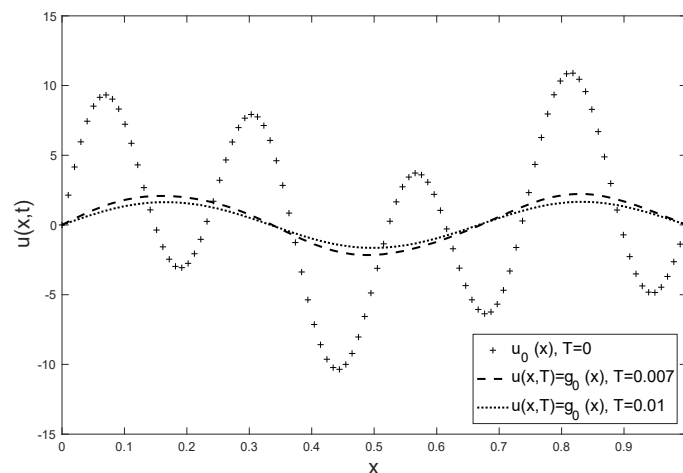
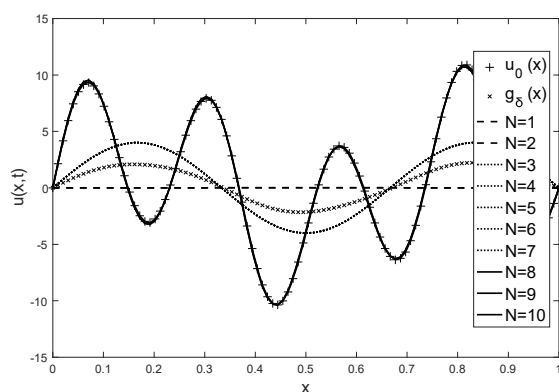
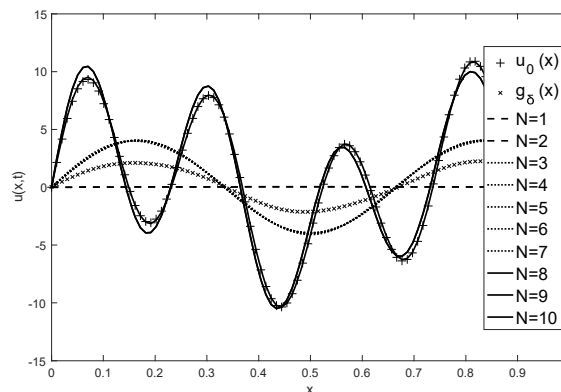


Рис. 1. Прямое решение для температуры измерения
 $u(x,T) = g_0(x)$ и $u_0(x) = 4\sin(3\pi x) + 7\sin(8\pi x)$

Мы можем добавить шумовой сигнал к заданным данным $g_0(x)$ для его использования в анализе проблем. Используя алгоритм обратной задачи, который определен в (10) и (11), мы получим решения (см. рис. 2 и рис. 3).

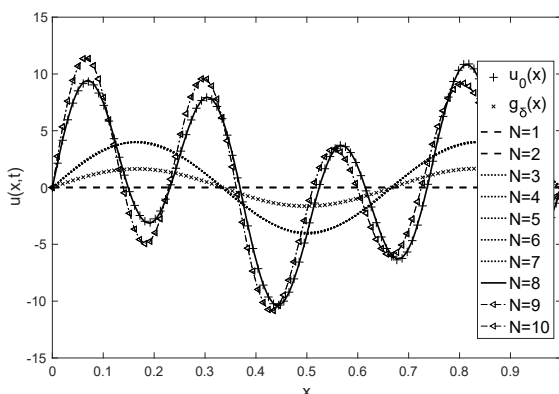


а) $\delta = 0,05$

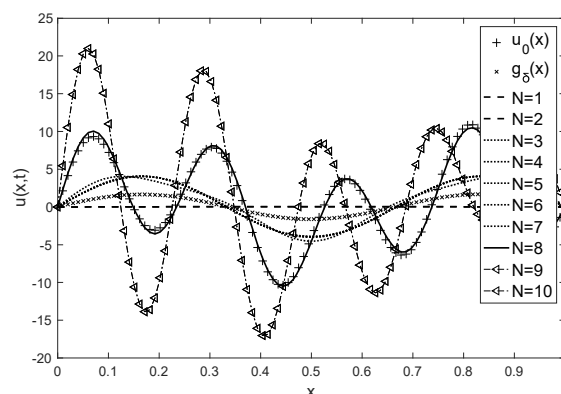


б) $\delta = 0,27$

Рис. 2. Обратное решение $u_0(x)$, $u_\delta^N(x)$, где $T = 0,007$



а) $\delta = 0,05$



б) $\delta = 0,27$

Рис. 3. Обратное решение $u_0(x)$, $u_\delta^N(x)$, где $T = 0,01$

Пример 2. Прямое решение для температуры, где время ($T = 0,05$ и $T = 0,01$) для проверки приближения мы имеем точную начальную температуру $u_0(x) = \sin(\pi x)$, как показано на рис. 4. Мы можем найти функцию $g(x)$, используя (4).

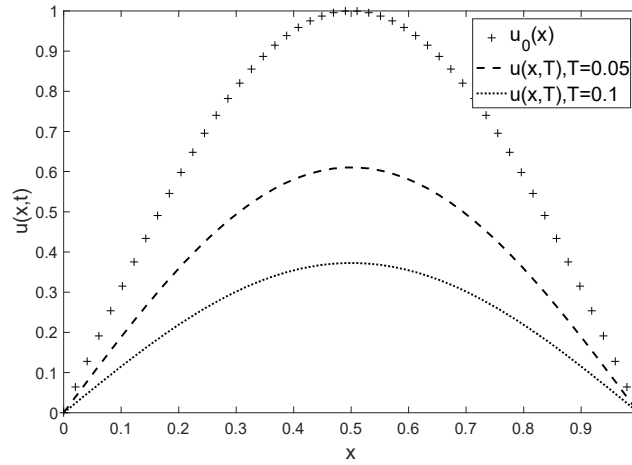


Рис. 4. Прямое решение для температуры измерения $u(x,T) = g_0(x)$ и $u_0(x) = \sin(\pi x)$

Мы можем добавить шумовой сигнал к заданным данным $g_0(x)$ для его использования в анализе проблем. Используя алгоритм обратной задачи, который определен в (10) и (11), мы получим решения (см. рис. 5 и рис. 6).

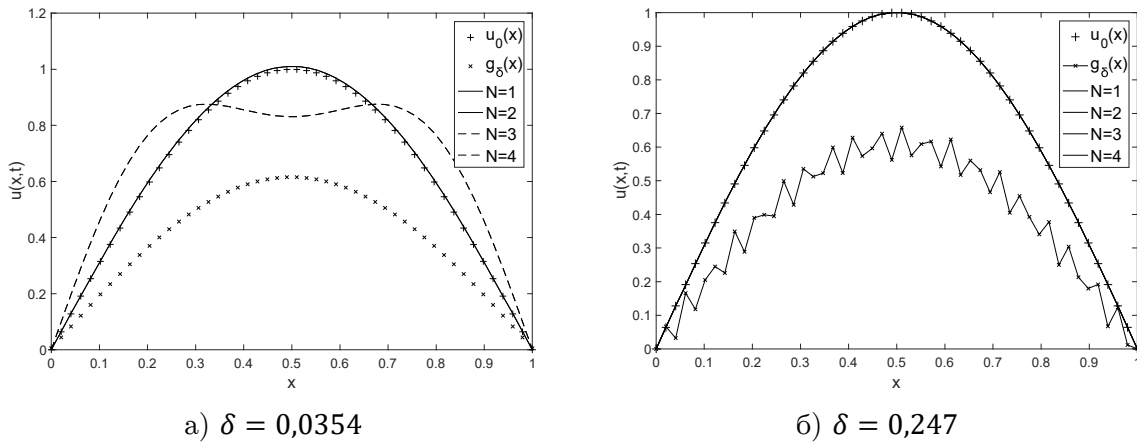


Рис. 5. Обратное решение $u_0(x)$, $u_\delta^N(x)$, где $T = 0,05$

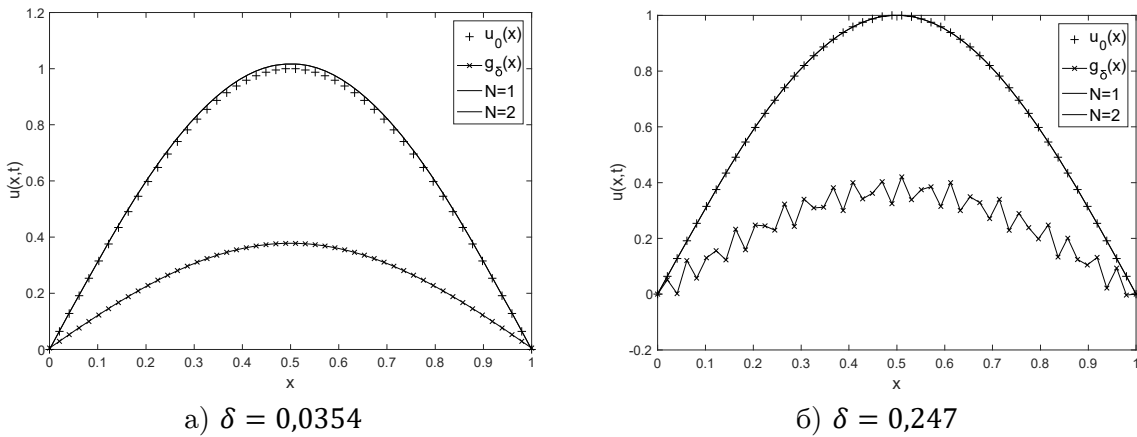


Рис. 6. Обратное решение $u_0(x)$, $u_\delta^N(x)$, где $T = 0,1$

Заключение

Эта работа посвящена алгоритму решения проблемы обратной теплопроводности. Данная задача должна решаться некорректной задачей Коши и специальным методом. Используется метод разделения переменных для решения уравнения обратной теплопроводности. Численные анализы успешно применяются для решения обратной задачи теплопроводности с использованием теоремы Пикара. Алгоритм выбирает соответствующий параметр для регуляризации оцененного решения. Можно отметить, что алгоритм был эффективен для оценки начальной температуры в зависимости от заданной температуры измерения с известным уровнем шума δ . Предложенная будущая работа решит обратную задачу Коши для уравнения теплопроводности для композиционных материалов.

Литература

1. Иванов В.К. О применении метода Пикара к решению интегральных уравнений первого рода // *Bui. Inst. Politehn. Iasi*. 1968. Т. 4, № 34. С. 71–78.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва: Наука, 1978. 206 с.
3. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Inverse and Ill-Posed Problems, Ser. 55. De Gruyter, 2012. 458 p.
4. Tanana V.P., Sidikova A.I. *Optimal Methods for Solving Ill-Posed Heat Conduction Problems*. Inverse and ill-posed problems, Ser. 62. De Gruyter, 2018. 138 p.
5. Тихонов А.Н. О Регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР, 1963. Т. 153, № 1. С. 49–52.
6. Лаврентьев М.М. Некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962. 92 с.
7. Mu H., Li J., Wang X. Optimization Based Inversion Method for the Inverse Heat Conduction Problems // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2017. Vol. 64, no. 1. P. 1–9. DOI: 10.1088/1755-1315/64/1/012094.
8. Duda P. Solution of Inverse Heat Conduction Problem Using the Tikhonov Regularization Method // *Journal of Thermal Science*. 2017. Vol. 26, no. 1. P. 60–65. DOI: 10.1007/s11630-017-0910-2.
9. Frąckowiak A., Botkin N.D., Ciałkowski M. Iterative Algorithm for Solving the Inverse Heat Conduction Problems with the Unknown Source Function // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2015. Vol. 23, no. 6. P. 1056–1071. DOI: 10.1080/17415977.2014.986723.
10. Yang S., Xiong X. A. Tikhonov Regularization Method for Solving an Inverse Heat Source Problem // *Bull. Malays. Math. Sci. Soc*. 2018. Vol. 5, no. 19. P. 1–12. DOI: 10.1007/s40840-018-0693-y.

Аль-Махдави Хассан К. Ибрахим, аспирант, кафедра системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет) (Челябинск, Российская Федерация)

STUDYING THE PICARD'S METHOD FOR SOLVING THE INVERSE CAUCHY PROBLEM FOR HEAT CONDUCTIVITY EQUATIONS

© 2019 H.K. Al-Mahdawi

*South Ural State University (pr. Lenina 76, Chelyabinsk, 454080 Russia)**E-mail: hssnkd@gmail.com*

Received: 08.01.2019

In this paper, the inverse Cauchy problem for the heat equation is posed and solved. In this problem, the initial temperature is unknown, and instead of it, the temperature at a specific time is given, $t = T > 0$. They are characterized by the fact that arbitrarily small changes in the source data can lead to large changes in the solution. It is well known that this problem is an ill-posed problem. In order to solve the direct problem, the method of separation of variables is used. We noticed that the method of separating variables is not applicable to solving the inverse Cauchy problem since it leads to large errors, as well as to divergent rows. V.K. Ivanov noted that if the inverse problem is solved by the method of separation of variables, the resulting series is replaced with a partial sum of a series, where the number of terms depends on δ , $N = N(\delta)$. The Picard's method uses the regularizing family of $\{R_N\}$, operators mapping the $L_2[0, 1]$ space into itself. The results of computational experiments are presented and the effectiveness of this method is estimated.

Keywords: inverse heat conduction problem, Picart's method, ill-posed problem, Cauchy problem.

FOR CITATION

Al-Mahdawi H.K. Studying the Picard's Method for Solving the Inverse Cauchy Problem for Heat Conductivity Equations. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2019. vol. 8, no. 4. pp. 5–14. DOI: 10.14529/cmse190401.

This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Non Commercial 3.0 License which permits non-commercial use, reproduction and distribution of the work without further permission provided the original work is properly cites.

References

1. Ivanov V.K. About Application of Picard Method to the Solution of Integral Equations for the First Kind. *Bui. Inst. Politehn. Iasi*. 1968. vol. 4, no. 34. pp. 71–78. (in Russian)
2. Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P. Theory of Linear Ill-Posed Problem and Application. Moscow, Nauok, 1978. 206 p. (in Russian)
3. Kabanikhin S.I. Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications. Inverse and Ill-Posed Problems, Ser. 55. De Gruyter, 2012. 458 p.
4. Tanana V.P., Sidikova A.I. Optimal Methods for Solving Ill-Posed Heat Conduction Problems. Inverse and ill-posed problems, Ser. 62. De Gruyter, 2018. 138 p.
5. Tikhonov A.N. On the Regularization of Ill-Posed Problems. *Proceedings of the USSR Academy of Sciences*, 1963. vol. 153, no. 1. pp. 49–52. (in Russian)
6. Lavrent'ev M.M. On Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics. *Novosibirsk, Siberian Branch of the Academy of Sciences of the USSR*, 1962. 92 p. (in Russian)
7. Mu H., Li J., Wang X. Optimization Based Inversion Method for the Inverse Heat Conduction Problems. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. 2017. vol. 64, no. 1. pp. 1–9. DOI: 10.1088/1755-1315/64/1/012094.

8. Duda P. Solution of Inverse Heat Conduction Problem Using the Tikhonov Regularization Method. Journal of Thermal Science. 2017. vol. 26, no. 1. pp. 60–65. DOI: 10.1007/s11630-017-0910-2.
9. Frąckowiak A., Botkin N.D., Ciałkowski M. Iterative Algorithm for Solving the Inverse Heat Conduction Problems with the Unknown Source Function. Inverse Problems in Science and Engineering. 2015. vol. 23, no. 6. pp. 1056–1071. DOI: 10.1080/17415977.2014.986723.
10. Yang S., Xiong X. A. Tikhonov Regularization Method for Solving an Inverse Heat Source Problem. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2018. vol. 5, no. 19. pp. 1–12. DOI: 10.1007/s40840-018-0693-y.