

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАННОГО ДВИЖЕНИЯ ПЯТИЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА

*В.И. Ухоботов, В.С. Величко*

Рассматривается задача о моделировании совместного со связями заданного пятизвенового механизма, у которого точки опоры шарнирно связаны с плоскостью. Управлениями являются моменты сил в шарнирных соединениях механизма. Для упрощенной модели на основе анализа уравнений движения излагается схема построения требуемых уравнений.

*Ключевые слова:* пятизвеновый механизм, движение, нечеткая логика, управление.

## Введение

Исследованию движения многозвенных механизмов посвящено большое количество литературы [1, 2, 3]. Актуальной является задача моделирования заданного движения механизма.

В данной работе излагается подход моделирования заданного движения пятизвенового механизма с привлечением нечетких алгоритмов. Рассматривается задача о компьютерном моделировании пятизвенового механизма с помощью пакета программ моделирования физических законов и задача управления моделью с помощью системы нечетких правил [4, 5].

## 1. Уравнения движения

Рассмотрим пятизвеновый механизм, изображенный на рис. 1.

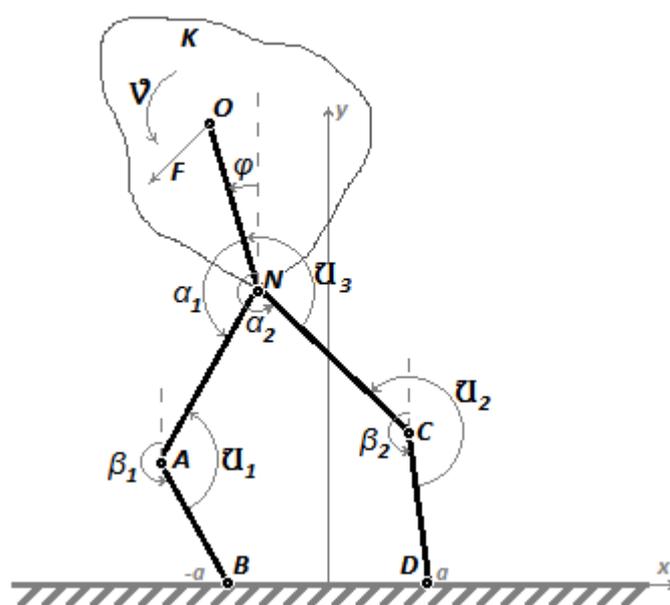


Рис. 1. Пятизвеновый механизм

На этом рисунке точки А, N, С – точки шарнирного соединения невесомых стержней ВА, АN, DC и CN. Центром масс тела К является точка О.

Внешние силы, приложенные к телу К, приведены к одной силе  $F = (X, Y)$ , приложенной в центре масс, и к паре сил с моментом  $V$ . Посредством  $U_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) обозначены управляющие моменты в шарнирах. Посредством  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  обозначены углы, которые образуют стержни с вертикальной осью. Длины этих стержней обозначим  $AN=CN=l, BA=DC=L$ . Угол, который образует отрезок  $ON$  с вертикальной осью, обозначим буквой  $\varphi$ . Точки  $B$  и  $D$  неподвижны и их координаты равны соответственно  $(-a, 0), (a, 0)$ . Здесь число  $a>0$ .

В качестве обобщенных координат возьмем координаты точки  $N$ . Тогда из условия неподвижности точек  $B$  и  $D$  получим уравнения связей

$$\begin{aligned} x - l \sin \alpha_1 - L \sin \beta_1 &= -a, & y + l \cos \alpha_1 + L \cos \beta_1 &= 0, \\ x - l \sin \alpha_2 - L \sin \beta_2 &= a, & y + l \cos \alpha_2 + L \cos \beta_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Кинетическая энергия тела  $K$  равна

$$T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - m\rho\dot{\varphi}(\dot{x} \cos \varphi + \dot{y} \sin \varphi) + \frac{J}{2} \dot{\varphi}^2. \quad (2)$$

Здесь обозначено  $m$  – масса тела  $K$ ,  $J=J_0+m\rho^2$ ,  $\rho$  – длина отрезка  $NO$ ,  $J_0$  – момент инерции тела  $K$  относительно центра масс.

Используя равенства

$$x_0 = x - \rho \sin \varphi, \quad y_0 = y + \rho \cos \varphi,$$

запишем элементарную работу сил на возможных перемещениях

$$\begin{aligned} \delta A &= X\delta x + Y\delta y + (V + U_3 - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi)\delta\varphi + \\ &+ (U_1 - U_3)\delta\alpha_1 + (U_2 - U_3)\delta\alpha_2 - U_1\delta\beta_1 - U_2\delta\beta_2. \end{aligned}$$

Выразим возможные изменения  $\delta\alpha_i$  и  $\delta\beta_i$  через  $\delta x$  и  $\delta y$  с помощью формул (1). Получим

$$\delta A = Q_x\delta x + Q_y\delta y + Q_\varphi\delta\varphi,$$

где обобщенные силы равны

$$\begin{aligned} Q_x &= X - U_1 \frac{x+a}{lL \sin(\alpha_1 - \beta_1)} - U_2 \frac{x-a}{lL \sin(\alpha_2 - \beta_2)} + U_3 \frac{\sin \beta_2}{l \sin(\alpha_2 - \beta_2)}, \\ Q_y &= Y - U_1 \frac{y}{lL \sin(\alpha_1 - \beta_1)} - U_2 \frac{y}{lL \sin(\alpha_2 - \beta_2)} - U_3 \frac{\cos \beta_2}{l \sin(\alpha_2 - \beta_2)}, \\ Q_\varphi &= V + U_3 - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя формулы (2) и (3), запишем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q_q, \quad q = x, y, \varphi.$$

Они принимают вид

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \rho\ddot{\varphi} \cos \varphi + \rho\dot{\varphi}^2 \sin \varphi &= \frac{1}{m} Q_x, \\ \ddot{y} - \rho\ddot{\varphi} \sin \varphi - \rho\dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= \frac{1}{m} Q_y, \\ \ddot{\varphi} - \frac{m\rho}{J} (\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi) &= \frac{1}{J} Q_\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

Из первых двух уравнений выразим величину  $\ddot{x} \cos \varphi + \ddot{y} \sin \varphi$  и подставим в третье уравнение. Получим

$$\ddot{\varphi} = \frac{Q_\varphi + \rho(Q_x \cos \varphi + Q_y \sin \varphi)}{J_0}. \quad (5)$$

Подставим эту формулу в первые два уравнения (4). Получим

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \rho\dot{\varphi}^2 \sin \varphi &= \left( \frac{\rho^2}{J_0} \cos^2 \varphi + \frac{1}{m} \right) Q_x + \frac{\rho^2}{J_0} \sin \varphi \cos \varphi Q_y + \frac{\rho}{J_0} \cos \varphi Q_\varphi, \\ \ddot{y} - \rho\dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= \frac{\rho^2}{J_0} \sin \varphi \cos \varphi Q_x + \left( \frac{\rho^2}{J_0} \sin^2 \varphi + \frac{1}{m} \right) Q_y + \frac{\rho}{J_0} \sin \varphi Q_\varphi. \end{aligned} \quad (6)$$

## 2. Моделирование заданного совместного со связями движения

### 2.1. Описание алгоритма построения управления

Пусть заданы функции  $x(t)$ ,  $y(t)$ , которые совместны со связями (1). Подставляя третью формулу (3) в третье уравнение (4) получим, что

$$\ddot{\varphi} = \frac{m\rho}{J} (\ddot{x}(t) \cos \varphi + \ddot{y}(t) \sin \varphi) + \frac{1}{J} (V + U_3 - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi). \quad (7)$$

Допустим, что мы построили управление  $U_3(t, \varphi, \dot{\varphi})$ , которое обеспечивает заданный закон  $\varphi(t)$  изменения угла  $\varphi$ . Определитель матрицы, составленной из коэффициентов, стоящих в формулах (6) перед  $Q_x$  и  $Q_y$ , равен  $\frac{\rho^2}{J_0 m} + \frac{1}{m^2} > 0$ . Поэтому из формул (6) находим  $Q_x(t, \varphi, \dot{\varphi})$  и  $Q_y(t, \varphi, \dot{\varphi})$ . Подставляя эти выражения в формулы (3), находим моменты  $U_i(t, \varphi, \dot{\varphi})$ ,  $i=1, 2, 3$ . Отметим, что определитель матрицы, составленной из коэффициентов, стоящих в формулах (3) при переменных  $U_1$  и  $U_2$ , равен  $2a \frac{y}{\sin(\alpha_1 - \beta_1) \sin(\alpha_2 - \beta_2)} \neq 0$  при  $y \neq 0$ ,  $\alpha_i \neq \beta_i$ .

### 2.2. Моделирование прямолинейного и равномерного движения точки N

Рассмотрим случай, когда  $\ddot{x}(t) = \ddot{y}(t) = 0$ . Из формул (6) и из третьей формулы (3) получим, что

$$Q_x = \rho m \dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \frac{\rho^2 m}{J} (X \cos \varphi + Y \sin \varphi) \cos \varphi - \frac{\rho m}{J} (V + U_3) \cos \varphi,$$

$$Q_y = -\rho m \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + \frac{\rho^2 m}{J} (X \cos \varphi + Y \sin \varphi) \sin \varphi - \frac{\rho m}{J} (V + U_3) \sin \varphi.$$

Подставим эти выражения в формулы (3). Найдем управляющие моменты

$$\begin{aligned} U_1 &= LL(A_1 + B_1 U_3) \sin(\alpha_1 - \beta_1), \\ U_2 &= LL(A_2 + B_2 U_3) \sin(\alpha_2 - \beta_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2ay} \left[ yX - (x-a)Y - (y \sin \varphi + (x-a) \cos \varphi) \rho m \dot{\varphi}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho m}{J} (y \cos \varphi - (x-a) \sin \varphi) (V - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi) \right], \\ A_2 &= \frac{1}{2ay} \left[ -yX + (x+a)Y - (y \sin \varphi + (x+a) \cos \varphi) \rho m \dot{\varphi}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho m}{J} (y \cos \varphi - (x+a) \sin \varphi) (V - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi) \right], \\ B_1 &= \frac{y \sin \beta_2 + (x-a) \cos \beta_2}{2aly \sin(\alpha_2 - \beta_2)} + \frac{\rho m}{J} (y \cos \varphi - (x-a) \sin \varphi), \\ B_2 &= -\frac{y \sin \beta_2 + (x+a) \cos \beta_2}{2aly \sin(\alpha_2 - \beta_2)} - \frac{\rho m}{J} (y \cos \varphi - (x+a) \sin \varphi). \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнение (7) в рассматриваемом случае принимает вид

$$\ddot{\varphi} = \frac{1}{J} (V - \rho X \cos \varphi - \rho Y \sin \varphi) + \frac{1}{J} U_3. \quad (10)$$

Рассмотрим случай, когда  $X=0$ ,  $Y=-mg$ ,  $V=0$ . Тогда уравнение (10) записываем в следующем виде:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\rho mg}{J} \sin \varphi + \frac{1}{J} U_3.$$

Если моделируем  $\varphi(t) = 0$ , то в формулах (9) можно положить  $\sin \varphi \approx \varphi$ ,  $\cos \varphi \approx 1$ ,  $\sin^2 \varphi \approx 0$ . Они примут вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2ay} \left[ (x-a)mg - (y\varphi + x-a)\rho m \dot{\varphi}^2 + \frac{\rho^2 m^2}{J} g y \varphi \right], \\ A_2 &= \frac{1}{2ay} \left[ -(x+a)mg - (y\varphi + x+a)\rho m \dot{\varphi}^2 - \frac{\rho^2 m^2}{J} g y \varphi \right], \\ B_1 &= \frac{y \sin \beta_2 + (x-a) \cos \beta_2}{2aly \sin(\alpha_2 - \beta_2)} + \frac{\rho m}{J} (y - (x-a)\varphi), \\ B_2 &= -\frac{y \sin \beta_2 + (x+a) \cos \beta_2}{2aly \sin(\alpha_2 - \beta_2)} - \frac{\rho m}{J} (y - (x+a)\varphi). \end{aligned}$$

### 3. Создание системы управления

#### 3.1. Среда для физического моделирования

В работе была создана среда для физического моделирования поведения механизма и визуализации работы системы. Для этого был использован пакет компьютерного моделирования физических законов реального мира Vox2D. Этот пакет также имеет средства графического отображения объектов.

#### 3.2. Принципы управления

Для начала рассмотрим перемещение точки  $N$ . Для изменения положения точки  $N$  достаточно использовать  $U_1$  и  $U_2$ . Все возможные положения точки  $N$  будут находиться в заштрихованной зоне на рис. 2.

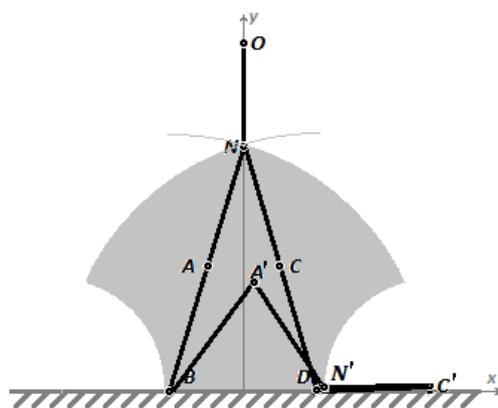


Рис. 2. Возможные положения точки  $N$

Верхние граничные положения достигаются, когда  $\angle BAN = \angle DCN = 180^\circ$  и лежат на соответствующих дугах с радиусом  $|BA| + |AN|$ . При условии, что звенья не могут проходить сквозь опору и сквозь друг друга, нижние границы также будут образованы дугами, когда точка  $C$  либо точка  $A$  лежит на оси абсцисс. Радиус дуг будет соответственно  $|CN|$ .

Для уменьшения координаты  $y$  точки  $N$  необходимо, чтобы  $U_1 < 0$  и  $U_2 > 0$ . Если  $N$  находится не дальше  $a$  по оси  $x$ , то для отклонения в сторону положительных  $x$  необходимо  $N$  приближать к точке  $D$ . Это достигается при  $U_2 > 0$ .

Так как точку  $N$  можно переместить в любую соседнюю точку внутри области, то мы можем перемещать ее по любой траектории внутри области.

Возможное положение точки  $O$  относительно точки  $N$  задается простой окружностью с радиусом  $|ON|$ . Углы  $\alpha$  можно изменить при помощи  $U_3$ .

#### 3.3. Построение системы управления

В ходе работы изначально была создана пробная системы управления звеньями механизма, обеспечивающая грубое управление. Впоследствии при анализе поведения построенной системы управления и выявлении недостатков управления, вносились изменения в нечеткие правила для того, чтобы траектория была максимально приближена к заданной.

В математической модели звенья не имели толщины и массы, но для большей реалистичности модели звенья были заданы тонкими прямоугольниками с малым весом. В точке О было добавлено жестко закрепленное тело с заданной массой. На каждом шаге моделирования для каждой пары объектов обрабатываются столкновения и силы взаимодействия.

В качестве среды программирования использована Embarcadero Delphi XE2.

Система управления, построенная на основе нечеткой логики, создавалась на экспериментальных данных, получаемых в ходе исследования движения модели.

Нечеткие правила и функции принадлежности составлены в системе FuzzyTECH 5.54 [6]. При фаззификации использован стандартный метод фаззификации (Compute MBF). Он предполагает использование функций принадлежности стандартного типа – треугольных, трапециевидных и кусочно-линейных кривых. Для агрегирования подусловий правил нечетких продукций использовано правило минимума.

Для дефаззификации выходных переменных  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  используем стандартный метод (Center\_of\_Maximum или сокращенно CoM), который, по мнению разработчиков FuzzyTECH, представляется методом наилучшего компромисса для получения окончательного значения выходных переменных.

Программа составлена таким образом, что в процессе работы можно с помощью клавиатуры или мыши вносить дополнительные помехи. При этом система управления адекватно реагирует на все изменения и корректирует траекторию движения.

## Заключение

Реализованная в работе модель, как, впрочем, и система управления – это лишь приближения к реальности. При реализации реальной системы управления реальным механизмом необходимо будет учесть еще ряд различных особенностей, условий и ограничений. Например, здесь предполагалось, что скорость поворота конечности можно изменять мгновенно, устанавливая ее равной заданной, но так, чтобы она не превышала максимальную. Это лишь приближение, на самом же деле, для любого реального привода, каков бы он ни был, существует более сложная зависимость его ускорения от скорости, внешнего сопротивления и внутреннего воздействия.

Однако, несмотря на неизбежные отличия модели от реального объекта, данная работа продемонстрировала возможность создания системы управления и показала путь к созданию такой системы – исследование поведения модели, накопление опыта управления, и изменение системы управления на основе полученного опыта.

В дальнейшем, возможно, будет попытка реализации модели пятизвенного механизма с незакрепленными к поверхности нижними звеньями. Это позволит реализовать походку пятизвенного механизма.

## Литература

1. Формальский, А.М. Перемещение антропоморфных механизмов. / А.М. Формальский – М.: Наука – 1982. – 368 с.
2. Мартыненко, Ю.Г. Маятник на подвижном основании. / Ю.Г. Мартыненко, А.М. Формальский // Доклады Академии наук. – 2011. – Т. 439. – № 6. – С. 746–751.

3. Коренев, Г.В. Введение в механику человека. / Г. В. Коренев – М.: Наука. – 1977. – 264 с.
4. Заде, Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. / Л.А. Заде. – М.: Мир, 1976. – 161 с.
5. Ухоботов, В.И. Избранные главы теории нечетких множеств: учеб. пособие. / В.И. Ухоботов. – Изд-во ЧелГУ, 2011. – 245 с.
6. Леоненко, А.В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH. / А.В. Леоненко – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2005. – 736 с.

Ухоботов Виктор Иванович, д.ф.-м.н., заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, Челябинск, Российская Федерация, [ukh@csu.ru](mailto:ukh@csu.ru).

Величко Владислав Станиславович, аспирант, математик УНЛ методов оптимизации и моделирования игровых ситуаций кафедры теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет, [124816@list.ru](mailto:124816@list.ru).

---

## SIMULATION OF THE 5-MEMBERED MECHANISM'S GIVEN MOVEMENT

*V.I. Ukhobotov*, Chelyabinsk State University (Chelyabinsk, Russian Federation),  
*V.S. Velichko*, Chelyabinsk State University (Chelyabinsk, Russian Federation)

This paper considers the simulation problem of the given consistent with constraints five-link mechanism, whose fulcrums are pivotally connected to the plane. Torques in the joints are the ways of controlling the mechanism. The scheme based on the analysis of the motion equations is presented constructing the required equations.

*Keywords: 5-membered mechanism, movement, fuzzy logic, control.*

## References

1. Formal'sky A.M. Peremeshenie antropomorfnykh mekhanizmov. [Movement of Anthropomorphic Mechanisms]. М.: Nauka [M.: Science]. 1982. 368 p.
2. Martynenko Y.G. Majatnik na podvizhnom osnovanii. [Pendulum on a Movable Base] Doklady akademii nauk [Reports of the Academy of Sciences]. 2011. Vol 439. No. 6. P. 746–751.
3. Korenev G.V. Vvedenie v mekhaniku cheloveka [Introduction to the Mechanics of Human]. М.: Nauka [M.: Science]. 1977. 264 p.
4. Zadeh L.A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. American Elsevier Publishing Company. New York. 1973.
5. Ukhobotov V.I. Izbrannie glavi teorii nechetkikh mnozhestv. [Selected chapters of the theory of fuzzy sets]. ChelGU [CSU]. 2011. 245 p.
6. Leonenko A.V. Nechetkoe modelirovanie v srede MATLAB i fuzzyTECH. [Fuzzy Simulation in MATLAB and fuzzyTECH Environment]. SPb.: BKhV-Peterburg. 2005. 736 p.

*Поступила в редакцию 13 марта 2013 г.*