

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОНКУРЕНТНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ ПРЕДПРИЯТИЙ СОТОВОЙ СВЯЗИ

И.П. Болодурин, Т.А. Огурцова, Е.П. Маас

В работе предложена динамическая модель конкурентного поведения предприятий сотовой связи в виде системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. Реализованы численные методы и алгоритмы для решения задачи оптимального управления поведением операторов сотовой связи в условиях конкурентной борьбы за потребителей услуг связи. Сформулирована и решена задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи с постоянным запаздыванием с использованием принципа максимума Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием. Получены условия оптимальности для решения задачи управления динамикой развития абонентской базы фирмы № 1. Реализован метод линеаризации системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием и проведен поиск оптимального решения задачи посредством операций улучшения управления, повторяемых в итерационной процедуре, на примере метода Шатровского.

Ключевые слова: математическая модель, запаздывание, оптимальное управление, принцип максимума Понтрягина, улучшение управления.

Введение

Телекоммуникационная отрасль относится к важнейшим секторам, обеспечивающим функционирование и согласованную работу всех отраслей экономики. Для описания конкуренции и взаимодействия нескольких фирм на рынке телекоммуникационных услуг, а также общей динамики развития абонентской базы двух конкурирующих экономических агентов в работе предложено использование логистической модели Лотки–Вольтерра с запаздыванием во времени. Решению задач, касающихся вопросов управления в компаниях сотовой связи посвящено значительное количество работ. В частности, в работе [4] построена модель, описывающая поведение предприятий сотовой связи на рынке в условиях неопределенности и предложен алгоритм управления поведением предприятия сотовой связи, реализованный по принципу обратной связи. В работе [9] исследованы модели рынка, описывающие поведение потребителей в отношении нескольких участников рынка, решена задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи линейно-квадратичного критерия оптимальности. Однако не решены задачи определения оптимального управления развитием предприятий сотовой связи для динамических моделей, имеющих запаздывание в фазовых переменных, что по большей части и определяет научную новизну работы.

Математические модели большинства экономических объектов и процессов являются нелинейными. При решении задач анализа и синтеза систем хорошо обоснованы только методы классической линейной теории, поэтому применяют различные методы линеаризации, при которых нелинейные зависимости заменяются эквивалентными линейными моделями. При решении многих оптимизационных задач для описания объектов и систем применяют модели на основе линейного приближения ряда Тейлора. Одним из направлений использования дифференциальной линеаризации являются числен-

ные методы, которые используются при синтезе систем управления и обработки информации, а также в идентификации параметров модели.

В первом разделе статьи рассматривается задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи с использованием принципа максимума Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием. Во втором разделе предлагается метод линеаризации системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием. В заключении сформулированы основные выводы и результаты работы.

1. Численное решение задачи оптимального управления поведением предприятия сотовой связи с учетом запаздывания

В настоящее время в России действуют три крупнейших оператора сотовой связи: МТС, Билайн, Мегафон и множество других менее развитых компаний, также предоставляющих услуги сотовой связи. Для описания конкурентного взаимодействия операторов сотовой связи на рынке телекоммуникационных услуг, а также общей динамики развития абонентской базы двух конкурирующих экономических агентов рассмотрим логистическую модель (1) Лотки–Вольтерра с запаздыванием во времени [3],

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[\varepsilon_1 - \gamma_{11}x_1(t-\tau) - \gamma_{12}x_2(t-\tau)] - p_{11}u_1(t) - p_{12}u_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_2(t)[\varepsilon_2 - \gamma_{21}x_1(t-\tau) - \gamma_{22}x_2(t-\tau)] - p_{21}u_1(t) - p_{22}u_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

где $x_i(t)$ – число абонентов i -го оператора сотовой связи в момент времени t ;

ε_i , $i = 1, 2$ – коэффициент прироста абонентской базы i -го оператора сотовой связи;

γ_{ik} , $i, k = 1, 2$ – коэффициент взаимного влияния i -го и k -го предприятий, предоставляющих услуги сотовой связи;

p_{ik} , $i, k = 1, 2$ – коэффициент влияния средней стоимости минуты на прирост числа абонентов i -го оператора сотовой связи;

τ – временной лаг (запаздывание), связанный с разницей во времени между изменениями в рыночной ситуации и моментом принятия управленческих решений с целью реагирования на эти изменения;

$u_i(t)$ – средняя стоимость минуты пользования услугами связи i -го оператора в момент времени t , удовлетворяющий ограничению (2)

$$\alpha \leq u_i(t) \leq \beta, \quad t \in [0, T] \quad (2)$$

Число абонентов i -го оператора сотовой связи на начальном интервале $[-\tau, 0]$ задано функциями $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (3)$$

Фазовые ограничения описаны неравенствами (4).

$$\mu_i \leq x_i(t) \leq \eta_i, \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

Задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи состоит в оптимизации ценовой политики $u_1(t)$ первого экономического агента, с целью максимизации числа его абонентов.

$$J(u_1) = \int_0^T bx_1(t)dt \rightarrow \max \quad (5)$$

Поставленная задача относится к классу задач оптимального управления с постоянным запаздыванием [1]. Поэтому для ее решения применим принцип максимума Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием в предположении, что значение стоимости минуты связи фирм конкурентов $u_2 = const$. Для этого построим функцию Понтрягина (6), где $y_i = x_i(t - \tau)$.

$$H(t, x, y, u_1, \psi, \lambda_0) = -\lambda_0 bx_1 + \psi_1(\varepsilon_1 x_1 - \gamma_{11} x_1 y_1 - \gamma_{12} x_1 y_2 - p_{11} u_1 - p_{12} u_2) + \psi_2(\varepsilon_2 x_2 - \gamma_{21} x_2 y_1 - \gamma_{22} x_2 y_2 - p_{21} u_1 - p_{22} u_2) \quad (6)$$

Пусть $(\bar{x}(t), \bar{u}_1(t))$ – локально оптимальный процесс в поставленной задаче. Тогда с необходимостью существуют множитель $\lambda_0 > 0$ и абсолютно непрерывная вектор-функция $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$, $t \in [0, T]$ такие, что выполняются следующие условия:

– условие максимума $H(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{u}_1, \psi, \lambda_0) = \max_{u_1 \in U} H(t, \bar{x}, \bar{y}, u_1, \psi, \lambda_0)$

или $\bar{u}_1(t)(p_{11}\psi_1(t) + p_{21}\psi_2(t)) = \min_{\alpha \leq u_1 \leq \beta} u_1(t)(p_{11}\psi_1(t) + p_{21}\psi_2(t))$;

– сопряженные функции $\psi_i(t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\psi_1(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_1}(t + \tau) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_1}(t) = \psi_1(t + \tau)\gamma_{11}\bar{x}_1(t + \tau) + \psi_2(t + \tau)\gamma_{21}\bar{x}_2(t + \tau) - \lambda_0 b - \psi_1(t)(\varepsilon_1 - \gamma_{11}\bar{y}_1(t) - \gamma_{12}\bar{y}_2(t))$$

$$\psi_2(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial y_2}(t + \tau) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial x_2}(t) = \psi_1(t + \tau)\gamma_{12}\bar{x}_1(t + \tau) + \psi_2(t + \tau)\gamma_{22}\bar{x}_2(t + \tau) - \psi_2(t)(\varepsilon_2 - \gamma_{21}\bar{y}_1(t) - \gamma_{22}\bar{y}_2(t))$$

на отрезке $t_0 \leq t \leq T - \tau$, и $\psi_1(t) \equiv \psi_2(t) \equiv 0$ на отрезке $T - \tau \leq t \leq T$;

– условия трансверсальности $\psi_1(T) = 0$, $\psi_2(T) = 0$;

– условия допустимости (1)-(4).

Введем функцию переключения: $-p_{11}\psi_1 - p_{21}\psi_2 = \rho(t)$. Для нахождения оптимального управления необходимо решить задачу

$$\bar{u}_1(t)[-p_{11}\psi_1 - p_{21}\psi_2] \rightarrow \max_{u_1 \in U}, \text{ где } U = \{u_1 \in R : \alpha \leq u_1 \leq \beta, \alpha > 0, \beta > 0\}.$$

Из условия максимума функции Понтрягина находим оптимальное управление (7)

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} \beta, & \rho(t) > 0, \\ \alpha, & \rho(t) < 0, \\ \in (\alpha, \beta), & \rho(t) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Наличие фазовых ограничений (4) учтем в функционале (5) путем введения штрафных слагаемых.

Для построения численной схемы приближённого решения поставленной задачи оптимального управления динамикой развития абонентской базы, проведем дискретную аппроксимацию непрерывной задачи с точностью первого порядка. Дискретная задача оптимального управления, аппроксимирующая непрерывную задачу (1)-(5), состоит в нахождении минимума функции (9) при ограничениях (10)-(12).

$$I(u_1) = - \sum_{i=0}^{q-1} b x_1^i \Delta t + \bar{A}_k \sum_{i=0}^q \left[\sum_{j=1}^2 \max^2 \{ h_j^i(x^i), 0 \} \right] \Delta t + \bar{B}_k \sum_{i=0}^q \left[\sum_{j=1}^2 \max^2 \{ g_j^i(x^i), 0 \} \right] \Delta t \rightarrow \inf \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_1^{i+1} = x_1^i + \varepsilon_1 x_1^i \Delta t - \gamma_{11} x_1^i x_1^{i-\nu} \Delta t - \gamma_{12} x_1^i x_2^{i-\nu} \Delta t - p_{11} u_1^i \Delta t - p_{12} u_2^i \Delta t \\ x_2^{i+1} = x_2^i + \varepsilon_2 x_2^i \Delta t - \gamma_{21} x_2^i x_1^{i-\nu} \Delta t - \gamma_{22} x_2^i x_2^{i-\nu} \Delta t - p_{21} u_2^i \Delta t - p_{22} u_2^i \Delta t \end{cases} \quad i = \overline{0, q-1} \quad (10)$$

$$x_j^{i(0)} = \varphi_j(i\Delta t), \quad i = \overline{-\nu, 0}, \quad j = 1, 2, \quad (11)$$

$$\alpha \leq u_1^i \leq \beta, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad i = \overline{0, q-1}. \quad (12)$$

где $h_i(t, x) = \eta_i - x_i(t) \leq 0$, $g_i(t, x) = x_i - \mu_i(t) \leq 0$.

Параметры задачи подобраны с учетом анализа статистических данных абонентской базы, динамики предыдущей тарифной политики и тенденции развития рынка.

2. Поиск оптимального управления поведением предприятий сотовой связи, посредством операций улучшения управления

Один из приближенных методов решения задач оптимального управления нелинейными объектами предложен Л.И. Шатровским [5]. Он относится к методам линеаризации, использующим первую вариацию, и основан на итерационной процедуре, в ходе которой при заданном в виде функции времени начальном приближении управления, на каждом шаге решается линеаризованная задача с использованием рекуррентных вычислений. В ходе итерационной процедуры произвели приближение функции управления $u_1(t)$ к оптимальному управлению $\bar{u}_1(t)$. Достаточное количество итераций определили неравенством (13), где $u_1^k(t)$ – функция управления, найденная на k -ом шаге, χ – точность минимизации функционала.

$$J(u^{k-1}) - J(u^k) \leq \chi \quad (13)$$

Начальное приближение управления выбрали равным $u_0(t)$.

После аппроксимации дифференциальных уравнений отрезком ряда Тейлора с учетом вторых производных, задача улучшения управления $u_1^k(t)$ сводится к задаче поиска такой вариации $v^k(t)$, которая минимизировала бы приращение функционала (14)

$$J(u) = y_3(T) \rightarrow \min \quad (14)$$

на решениях линеаризованной системы (15)

$$\begin{cases} y_1^{i+1} = y_1^i + (a_{11}y_1^i + a_{12}y_2^i + a_{13}y_3^i - p_{11}v^i)\Delta t \\ y_2^{i+1} = y_2^i + (a_{21}y_1^i + a_{22}y_2^i + a_{23}y_3^i - p_{21}v^i)\Delta t \\ y_3^{i+1} = y_3^i + (a_{31}y_1^i + a_{32}y_2^i + a_{33}y_3^i)\Delta t \end{cases} \quad (15)$$

С целью определения оптимальных динамических траекторий и оптимального управления в среде Borland Delphi 7.0 разработан программный комплекс, реализующий численное решение поставленной задачи оптимального управления конкурентным поведением предприятий сотовой связи, в основе которого лежит метод проекции градиента и метод улучшения управления (метод Шатровского).

По имеющимся статистическим данным абонентской базы, динамики предыдущей тарифной политики и тенденции развития рынка созданный программный комплекс позволяет находить оптимальные управленческие сценарии для различных предприятий, предоставляющих услуги связи. Значения функционала качества показаны в таблице.

Таблица

Значения функционала качества $J(u_1)$, характеризующего прирост числа абонентов фирмы № 1 за период в 10 кварталов (млн. чел.)

	Метод проекции градиента	Метод Шатровского
Неуправляемая модель без запаздывания	91.23	91.03
Неуправляемая модель с запаздыванием	99.35	99.12
Управляемая модель без запаздывания	115.09	98.17
Управляемая модель с запаздыванием	127.002	108.79

Заключение

В работе решена задача оптимального управления поведением предприятий сотовой связи с использованием принципа максимума Понтрягина для систем с постоянным запаздыванием, а также методом последовательной линеаризации для поиска оптимального управления, посредством операций улучшения управления (методом Шатровского). В результате проведенного анализа решений установлено, что при использовании метода Шатровского не удалось улучшить функционал качества поставленной задачи по сравнению с методом проекции градиентов. Прирост числа абонентов фирмы № 1 при численном решении на основе принципа максимума Понтрягина на 16,71 % больше, чем при управлении, найденным по методу Шатровского. Таким образом, методы численного решения, базирующиеся на принципе максимума Понтрягина, являются более эффек-

тивным инструментом для наращивания абонентской базы предприятия в условиях конкурентной борьбы на рынке сотовой связи.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, проект 12-01-31325.

Литература

1. Андреева, Е.А. Управление системами с последствием / Е.А. Андреева, В.Б. Колмановский, Л.Е. Шайхет – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1992. – 336 с.
2. Болодурина, И.П. Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом и их приложения: учебное пособие / И.П. Болодурина – Оренбург: Оренбург. гос. ун-т, 2006. – 101 с.
3. Болодурина, И.П. Управление ценой на предоставляемые услуги предприятий телекоммуникационной отрасли / И.П. Болодурина, Т.А. Огурцова // Проблемы управления. – 2011. – № 3. – С. 30–35.
4. Коблов, А.И. Модели и алгоритмы управления поведением предприятий сотовой связи в условиях неопределенности: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.01: защищена 15.11.2007 / А.И. Коблов – ЮУрГУ, 2007. – 136 с.
5. Когут, А.Т. Модификация метода Шатровского решения нелинейных задач оптимального управления. / А.Т. Когут, А.А. Лаврухин // Омский научный Вестник. – Омск, 2005. – № 3. – С. 81–85.
6. Когут, А.Т. Применение алгоритмов линеаризации для идентификации и адаптивного управления в нелинейных динамических системах: монография / А.Т. Когут, Н.А. Тихонова. Омский гос. ун-т путей сообщения. – Омск, 2008. – 126 с.
7. Прасолов, А.В. Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии / А.В. Прасолов – СПб.: Лань, 2010. – 192 с.
8. Шатровский, Л.И. Об одном численном методе решения задач оптимального управления / Л.И. Шатровский // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2:3 (1962). – С. 488–491.
9. Модели прогнозирования развития региональных рынков и оптимальное управление поведением фирмы / В.И. Ширяев, И.Г. Гришин, А.И. Коблов // Вестник Пермского университета. Математика, механика, информатика. – 2007. – Выпуск 7(12). – С. 149–164.

Болодурина Ирина Павловна, д.т.н., профессор, зав. кафедрой прикладной математики, Оренбургский государственный университет (Оренбург, Российская Федерация), prmat@mail.osu.ru.

Огурцова Татьяна Александровна, ст. преподаватель кафедры прикладной математики, Оренбургский государственный университет (Оренбург, Российская Федерация), ogurtsovat.a@yandex.ru.

Маас Елена Петровна, студент кафедры прикладной математики, Оренбургский государственный университет (Оренбург, Российская Федерация), prmat@mail.osu.ru.

COMPARATIVE ANALYSIS OF NUMERICAL METHODS FOR SOLVING PROBLEMS OF OPTIMAL CONTROL THE BEHAVIOR OF ECONOMIC AGENTS IN THE CONDITIONS OF COMPETITIVENESS

Bolodurina I.P., Orenburg State University (Orenburg, Russian Federation)

Ogurtsova T.A., Orenburg State University (Orenburg, Russian Federation)

Maas E.P., Orenburg State University (Orenburg, Russian Federation)

In work the dynamic model of competitive behavior of the enterprises of cellular communication in the form of system of the differential equations with delay is offered. Numerical methods and algorithms for the solution of a problem of optimum control by behavior of mobile operators in the conditions of competitive fight for consumers of communication services are realized. The problem of optimum control by behavior of the enterprises of cellular communication with continuous delay with use of the principle of a maximum of Pontryagin for systems with continuous delay is formulated and solved. Conditions of an optimality for the solution of a problem of management are received by dynamics of development of subscriber base of firm No. 1. The method of linearization of system of the nonlinear differential equations with delay is realized and search of the optimum solution of a task by means of operations of improvement of the management, repeated in iterative procedure, on the example of modification of a method Shatrovsky is carried out.

Keywords: mathematical model, delay, optimum control, management improvement.

References

1. Andreeva E.A. Upravleniye sistemami s posledeystviem [the management of systems with aftereffect]. Moscow, Nauka. The main editorial office of physico-mathematical literature, 1992. 336 p.
2. Bolodurina I.P. Differentsialnye uravneniya s zapazdivausim argumentum i ih prilozheniya [Differential equations with retarded argument and their applications]. Orenburg. The state. un-t, 2006. 101 p.
3. Bolodurina I.P., Ogurtsova T.A. Upravlenie cenoy na predostavlyаемie uslugi predpriyatiy telekommunikacionnoy otrasli [The management of the price for the provided services of the enterprises of the telecommunications industry]. Problemi Upravleniya [Problems of management]. 2011. No. 3. P. 30–35.
4. Koblov A.I. Modeli i algoritmi upravleniya povedeniem predpriyatiy sotovoy svyazi v usloviyah neopredelennosti [Models and algorithms for behavior management of the enterprises of cellular communication in the conditions of uncertainty]: the Dissertation of candidate of technical Sciences. SUSU, 2007. 136 p.
5. Kogut A.T. Modificaciya metoda Shatrovskogo resheniya nelineynih zadach optimalnogo upravleniya [Modified method of Shatrovsky solution of nonlinear problems of optimal control]. Omskiy nauchniy Vestnik [Omsk scientific bulletin]. 2005. No. 3. P. 81–85.
6. Kogut A.T. Primeneniye algoritmov lianerizacii dlya identifikacii i adaptivnogo upravleniya v nelineynih dinamicheskikh sistemah [Application of algorithms of linearization for identification and adaptive control for nonlinear dynamic systems]. Omsk, The Omsk state. un-t of communication, 2008. 126 p.

7. Prasolov A.V. Dinamicheskiye modeli s zapazdivaniem i ih prilozheniya v ekonomike i ingenerii [Dynamic models with delay and their applications in Economics and engineering]. St. Petersburg, Fallow deer, 2010. 192 p.
8. Shatrovsky L.I. Ob odnom chislennom metode resheniya zadach optimalnogo upravleniya [About one numerical method of the solution of problems of optimum control]. Zurnal vychislitelnoy matematiki i matematicheskoy fiziki [computational mathematics and mathematical physics]. 2:3 (1962), P. 488–491.
9. Shiryayev V.I., Grishin I.G., Koblov A.I. Jars B.M. Modeli prognozirovaniya razvitiya regionalnih rynkov i optimalnoe upravlenie povedeniem firmi [Models of forecasting the development of regional markets and optimal control of the behavior of the firm] Bulletin of the University of Perm. Mathematics, mechanics, information. 2007. Issue 7 (12). P. 149–164.

Поступила в редакцию 18 марта 2013 г.