

## О ЗАДАЧЕ ПО ВОССТАНОВЛЕНИЮ КОЭФФИЦИЕНТОВ-ФУНКЦИЙ ВРЕМЕНИ ИСТОЧНИКОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ

© 2020 А.Б. Рагимов

*Институт систем управления НАН Азербайджана  
(AZ1141 Азербайджан, Баку, ул. Б. Вахабзаде, д. 9)*

*E-mail: anar\_r@yahoo.com*

Поступила в редакцию: 05.03.2020

Исследуется обратная задача по идентификации коэффициентов, зависящих только от времени, при источнике специального вида в линейных параболических уравнениях с точечными условиями переопределения. К исследуемым обратным задачам, в частности, приводятся краевые задачи с нелокальными (интегральными) краевыми условиями. Специфика рассматриваемой в данной работе обратной задачи заключается в том, что восстанавливаемые коэффициенты находятся при свободном члене и они зависят только от временной переменной. Предлагается методика численного решения задачи с применением метода прямых, основанная на использовании специального вида представления решения. Методом прямых задача приводится к параметрически обратной задаче относительно обыкновенной системы дифференциальных уравнений. Для ее решения предложено представление этого решения в специальном виде. Построены вспомогательные краевые задачи, которые определяют решение исходной задачи. Наиболее существенным в данной работе является то, что предлагаемый подход к численному решению исследуемой обратной задачи по идентификации коэффициентов не требует (в отличие от ранее известных методов) построения каких-либо итерационных процедур. Приводятся результаты численных экспериментов в виде таблиц и графиков, полученных при решении тестовой задачи, и их анализ.

*Ключевые слова: обратная задача, нелокальные условия, метод прямых, параболическое уравнение, параметрическая идентификация.*

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Рагимов А.Б. О задаче по восстановлению коэффициентов-функций времени источников специального вида в параболическом уравнении // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2020. Т. 9, № 4. С. 33–47. DOI: 10.14529/cmse200403.

### Введение

Обратным задачам по восстановлению правой части параболического уравнения посвящены работы многих авторов [5, 7, 11, 14, 17–23, 25, 26]. Наиболее общие случаи этих задач исследовались в монографиях А.И. Прилепко и др. [25] и М.И. Иванчова [22]. В [5] была изучена разрешимость обратных задач по нахождению неизвестного внешнего воздействия (правой части) специального вида. Исследования условий существования, единственности решения обратных задач для параболических уравнений проведены в работах [7, 11, 25].

В данной работе исследуется численное решение обратной задачи относительно параболического уравнения по восстановлению источника специального вида, в которой идентифицируемые коэффициенты зависят лишь от временной переменной. Для численного решения такой задачи можно было бы использовать различные подходы. Один из них заключается в сведении ее к задаче оптимального управления, численное решение которой требует использования итерационных методов оптимизации [18–20, 23]. Другой подход заключается в использовании фундаментального решения задачи и при-

ведении задачи к интегральному уравнению. В случае, когда участвующие в задаче функции, определяющие коэффициенты уравнения, не являются постоянными, использование такого подхода сталкивается с существенными трудностями [14, 17, 21, 26].

К исследуемым обратным задачам, в частности, приводит рассмотренный в работе важный класс краевых задач с нелокальными условиями [2–4, 6, 8–10, 16, 21]. Задание начальных и краевых условий в нелокальном (интегральном) виде обусловлено практической невозможностью производить замеры состояния объекта (процесса) в отдельных его точках или мгновенно во времени. Замеряемая информация, как правило, отражает состояние процесса в какой-либо окрестности точки замера или на интервале времени измерения, а иногда она определяет лишь среднее значение состояния в целом по объекту и/или по всему интервалу времени его функционирования. Подобные задачи возникают при изучении явлений, происходящих в плазме [10], процессов распространения тепла [4, 16, 21] и влагопереноса в капиллярно-пористых средах [3], математическом моделировании технологического процесса внешнего геттерирования при очищении кремниевых плат от примесей [8], в задачах математической биологии [6] и демографии [2].

Специфика рассматриваемой в данной работе обратной задачи заключается, во-первых, в том, что восстанавливаемые коэффициенты находятся при свободном члене, во-вторых, они зависят только от временной переменной. Эта специфика позволяет с использованием метода прямых свести решение исходной задачи к решению специально построенной краевой задачи относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а ее решение используется для формирования системы алгебраических уравнений [1, 15].

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводится постановка коэффициентно-обратной задачи относительно параболического уравнения. Раздел 2 посвящен описанию подхода к численному решению поставленной задачи, основанного на использовании метода прямых. В разделе 3 приводятся результаты численных экспериментов, полученные при решении тестовой задачи, и их анализ. В заключении резюмируются полученные результаты и намечаются направления дальнейших исследований.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим коэффициентно-обратную задачу относительно параболического уравнения [5, 7, 11, 12]:

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + a_1(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + a_2(x, t) v(x, t) + f(x, t) + F(x, t), \quad (1)$$

$$(x, t) \in \Omega = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \leq T\},$$

где

$$F(x, t) = \sum_{s=1}^L C_s(x, t) B_s(t), \quad (2)$$

при следующих начально-краевых условиях и условиях переопределения:

$$v(x, 0) = \phi_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (3)$$

$$v(0, t) = \psi_0(t), \quad v(l, t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$v(\bar{x}_s, t) = \psi_{2s}(t), \quad \bar{x}_s \in (0, l), \quad t \in [0, T], \quad s = 1, \dots, L. \quad (5)$$

Здесь заданными являются:  $L > 0$  — целое число, определяющее количество идентифицируемых источников и условий переопределения; точки  $\bar{x}_s \in (0, l), s = 1, \dots, L$ ; непрерывные по  $x$  и  $t$  функции  $a(x, t) \geq \mu > 0$ ,  $a_1(x, t)$ ,  $a_2(x, t)$ ,  $f(x, t)$ ,  $\phi_0(x)$ ,

$\psi_0(t), \psi_1(t), \psi_{2s}(t), s = 1, \dots, L, \mu = const > 0; C_s(x, t), s = 1, \dots, L$  — линейно-независимые функции;  $a_2(x, t) \leq 0, \phi_0(x) \in C^2([0, l]), \psi_{2s}(t) \in C^1([0, T]), |C_s(\bar{x}_k, t)| \geq \delta > 0, s, k = 1, \dots, L, t \in [0, T], \delta = const > 0;$  Заданные точки  $\bar{x}_s, s = 1, \dots, L, \bar{x}_i \neq \bar{x}_j$  при  $i \neq j, i, j = 1, \dots, L,$  являются точками наблюдения. Функции  $\phi_0(x), \psi_0(t), \psi_1(t), \psi_{2s}(t)$  удовлетворяют условиям согласования:

$$\phi_0(0) = \psi_0(0), \phi_0(l) = \psi_1(0), \psi_{2s}(0) = \phi_0(\bar{x}_s), s = 1, \dots, L.$$

Задача (1)–(5) заключается в определении неизвестной непрерывной  $L$ -мерной вектор-функции  $B(t) = (B_1(t), \dots, B_L(t))^T$  и соответствующего решения краевой задачи  $v(x, t) \in C^{2,1}(\Omega) \cap C^{1,0}(\bar{\Omega})$ , удовлетворяющих условиям (1)–(5).

Отметим, что при сделанных выше предположениях обратная задача (1)–(5) имеет решение и оно единственно [7, 11, 12, 25].

**Замечание.** Известно, что число условий переопределения должно быть не меньше числа идентифицируемых функций, т.е. может превышать их. Этот случай наиболее часто встречается на практике.

К исследуемым обратным задачам, в частности, приводит важный класс краевых задач с нелокальными условиями [2–4, 6, 8–10, 16, 21]. Например, к частному случаю задачи (1)–(5) приводится следующая краевая задача с нелокальным (интегральным) краевым условием:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a(t) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + a_1(t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + a_2(t) u(x, t) + \tilde{f}(x, t), (x, t) \in \Omega, \quad (6)$$

$$u(0, t) = \psi_2(t), \int_0^l e^{k\xi} u(\xi, t) d\xi = \psi_1(t), t \in [0, T], \quad (7)$$

$$u(x, 0) = \tilde{\phi}_0(x), x \in [0, l], \quad (8)$$

где постоянные  $k$ , функции  $\tilde{f}(x, t), \psi_0(t), \psi_1(t), \tilde{\phi}_0(x)$  — заданы. Задачи вида (6)–(8) исследовались, например, в работах [9, 21].

Для сведения задачи (6)–(8) к задаче (1)–(5) введем функцию

$$v(x, t) = \int_0^x e^{k\xi} u(\xi, t) d\xi. \quad (9)$$

Дифференцируя (9) по  $x$ , получаем

$$u(x, t) = e^{-kx} \frac{\partial v(x, t)}{\partial x}. \quad (10)$$

Дифференцируя (10) один раз по  $t$  и дважды по  $x$  и подставляя это выражение в (6), после несложных преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x} &= a(t) \frac{\partial^3 v(x, t)}{\partial x^3} + (a_1(t) - 2ka(t)) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \\ &+ (k^2 a(t) - ka_1(t) + a_2(t)) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + e^{kx} \tilde{f}(x, t). \end{aligned}$$

Интегрируя обе части этого уравнения по  $x$ , получаем уравнение с точностью до произвольной функции  $B(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= a(t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + (a_1(t) - 2ka(t)) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} + \\ &+ (k^2 a(t) - ka_1(t) + a_2(t)) v(x, t) + f(x, t) + B(t). \end{aligned} \quad (11)$$

При этом использовано обозначение  $f(x, t) = \int_0^x e^{k\xi} \tilde{f}(\xi, t) d\xi$ .

Из (7)–(10) имеем следующие начальные и краевые условия:

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = \psi_1(t), \quad t \in [0, T]; \quad (12)$$

$$v(x, 0) = \phi_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (13)$$

$$\frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = \psi_2(t), \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

где

$$\phi_0(x) = \int_0^x e^{k\xi} \tilde{\phi}_0(\xi) d\xi.$$

Ясно, что коэффициентно-обратная задача (11)–(14) является частным случаем задачи (1)–(5).

## 2. Решение задачи

Ниже предлагается подход к численному решению задачи (1)–(5), основанный на использовании метода прямых. Задача (1)–(5) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными параметрами.

В области  $\Omega$  проведем прямые:

$$t_j = jh_t, \quad j = 0, 1, \dots, N, \quad h_t = T/N.$$

На этих прямых определим функции:

$$v_j(x) = v(x, t_j), \quad x \in [0, l], \quad j = 0, 1, \dots, N,$$

для которых, на основании (3)–(5), имеют место равенства:

$$v_0(x) = \phi_0(x), \quad x \in [0, l], \quad (15)$$

$$v_j(0) = \psi_0(t_j) = \psi_{0j}, \quad j = 0, \dots, N, \quad (16)$$

$$v_j(l) = \psi_1(t_j) = \psi_{1j}, \quad j = 0, \dots, N, \quad (17)$$

$$v_j(\bar{x}_s) = \psi_{2s}(t_j) = \psi_{2sj}, \quad \bar{x}_s \in (0, l), \quad s = 1, \dots, L, \quad j = 0, \dots, N. \quad (18)$$

На прямых  $t = t_j$  аппроксимируем производные  $\partial v(x, t)/\partial t$  с использованием разностной схемы:

$$\left. \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right|_{t=t_j} = \frac{v_j(x) - v_{j-1}(x)}{h_t} + O(h_t), \quad j = 1, \dots, N. \quad (19)$$

Используя (19) в (1), получим  $N$  дифференциальных уравнений:

$$v''_j(x) + \tilde{a}_{1j}(x)v'_j(x) + \tilde{a}_{2j}(x)v_j(x) + \tilde{f}_j(x) + \sum_{s=1}^L \tilde{C}_{sj}(x)B_{sj} = 0, \quad (20)$$

$$j = 1, \dots, N, \quad x \in (0, l),$$

где использованы обозначения:

$$B_{sj} = B_s(t_j), \quad \tilde{f}_j(x) = \frac{v_{j-1}(x) + h_t f(x, t_j)}{a(x, t_j)h_t}, \quad \tilde{C}_{sj}(x) = \frac{C_s(x, t_j)}{a(x, t_j)},$$

$$\tilde{a}_{1j}(x) = \frac{a_1(x, t_j)}{a(x, t_j)}, \quad \tilde{a}_{2j}(x) = \frac{a_2(x, t_j)h_t - 1}{a(x, t_j)h_t}.$$

Сходимость при  $h_t \rightarrow 0$  и погрешность метода прямых при аппроксимации производных по  $t$  в уравнении (1) (в данном случае при аппроксимации задачи (1)–(5) зада-

чей (20), (16)–(18) с погрешностью, оцениваемой как  $O(h_t)$  исследована в работе [24]. Следовательно, при известных  $B_{sj}$  решение краевой задачи относительно системы (22) при  $h_t \rightarrow 0$  сходится к решению исходной краевой задачи (1)–(4). Из существования и единственности решения исходной обратной задачи (1)–(5) можно показать существование и единственность решения обратной задачи (20), (16)–(18). Действительно, в случае отсутствия решения обратной задачи (20), (16)–(18) или ее неединственности аналогичные свойства имеет и исходная задача.

Уравнения системы (20) для каждого  $j$  решаются независимо и последовательно, начиная от  $j = 1$  до  $N$ , а следовательно и компоненты вектора  $B_s = (B_{s1}, \dots, B_{sN})^T$  определяются последовательно.

**Теорема 1.** Пусть функции  $\alpha_j(x)$ ,  $\beta_{sj}(x)$ ,  $s = 1, \dots, L$  при  $x \in [0, l]$  являются решением следующих краевых задач:

$$\alpha''_j(x) + \tilde{a}_{1j}(x)\alpha'_j(x) + \tilde{a}_{2j}(x)\alpha_j(x) + \tilde{f}_j(x) = 0, \quad (21)$$

$$\alpha_j(0) = \psi_{0j}, \quad \alpha_j(l) = \psi_{1j}, \quad (22)$$

$$\beta''_{sj}(x) + \tilde{a}_{1j}(x)\beta'_{sj}(x) + \tilde{a}_{2j}(x)\beta_{sj}(x) + \tilde{c}_{sj}(x) = 0, \quad (23)$$

$$\beta_{sj}(0) = 0, \quad \beta_{sj}(l) = 0. \quad (24)$$

Тогда для произвольных значений параметра  $B_{sj}$  функции

$$v_j(x) = \alpha_j(x) + \sum_{s=1}^L \beta_{sj}(x)B_{sj}, \quad x \in [0, l], \quad (25)$$

удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (20) и условиям (16), (17).

*Доказательство.* С учетом первых условий в (22) и (24), для произвольных значений параметра  $B_{sj}$  из (25) получим, что

$$v_j(0) = \alpha_j(0) + \sum_{s=1}^L \beta_{sj}(0)B_{sj} = \psi_{0j}. \quad (26)$$

Аналогичным образом, учитывая вторые условия в (22) и (24), для произвольных значений параметра  $B_{sj}$  из (25) получим, что

$$v_j(l) = \alpha_j(l) + \sum_{s=1}^L \beta_{sj}(l)B_{sj} = \psi_{1j}. \quad (27)$$

Условия (26), (27) означают, что функции  $v_j(x)$ , определенные из (25), для произвольных значений  $B_{sj}$ ,  $s = 1, \dots, L$ ,  $j = 1, \dots, N$  удовлетворяют условиям (16), (17).

Для проверки условия, что  $v_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, N$  удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (20), сначала продифференцируем обе части равенства (25), имеем

$$v'_j(x) = \alpha'_j(x) + \sum_{s=1}^L \beta'_{sj}(x)B_{sj}, \quad x \in [0, l], \quad (28)$$

$$v''_j(x) = \alpha''_j(x) + \sum_{s=1}^L \beta''_{sj}(x)B_{sj}, \quad x \in [0, l]. \quad (29)$$

Подставляя (25), (28), (29) в левую часть уравнения (20), получим

$$\begin{aligned}
 & v''_j(x) + \tilde{a}_{1j}(x)v'_j(x) + \tilde{a}_{2j}(x)v_j(x) + \tilde{f}_j(x) + \sum_{s=1}^L \tilde{C}_{sj}(x)B_{sj} = \\
 & = \alpha''_j(x) + \sum_{s=1}^L \beta''_{sj}(x)B_{sj} + \tilde{a}_{1j}(x)\alpha'_j(x) + \tilde{a}_{1j}(x) \sum_{s=1}^L \beta'_{sj}(x)B_{sj} + \\
 & + \tilde{a}_{2j}(x)\alpha_j(x) + \tilde{a}_{2j}(x) \sum_{s=1}^L \beta_{sj}(x)B_{sj} + \tilde{f}_j(x) + \sum_{s=1}^L \tilde{C}_{sj}(x)B_{sj}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

После некоторых преобразований и группировки с учетом (21), (23) из (30), получим:

$$\begin{aligned}
 & v''_j(x) + \tilde{a}_{1j}(x)v'_j(x) + \tilde{a}_{2j}(x)v_j(x) + \tilde{f}_j(x) + \sum_{s=1}^L \tilde{C}_{sj}(x)B_{sj} = \\
 & = [\alpha''_j(x) + \tilde{a}_{1j}(x)\alpha'_j(x) + \tilde{a}_{2j}(x)\alpha_j(x) + \tilde{f}_j(x)] + \\
 & + \sum_{s=1}^L \left( \beta''_{sj}(x) + \tilde{a}_{1j}(x)\beta'_{sj}(x) + \tilde{a}_{2j}(x)\beta_{sj}(x) + \tilde{C}_{sj}(x) \right) B_{sj} = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad x \in (0, l).
 \end{aligned}$$

Следовательно, функции  $v_j(x)$ , определенные из (25), удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (20). Отсюда следует справедливость утверждения теоремы.

Несложно доказывается следующая теорема.

**Теорема 2.** Для произвольных значений параметра  $B_{sj}$  представление (25) для решения дифференциального уравнения (20) с краевыми условиями (16), (17) единственно.

*Доказательство.* Предположим противное: пусть для какого-либо значения параметра  $B_{sj}$  задачи (20), (16), (17) имеются два решения  $\bar{v}_j(x)$  и  $\tilde{v}_j(x)$ :

$$\bar{v}_j(x) = \bar{\alpha}_j(x) + \sum_{s=1}^L \bar{\beta}_{sj}(x)B_{sj}, \quad x \in [0, l], \tag{31}$$

$$\tilde{v}_j(x) = \tilde{\alpha}_j(x) + \sum_{s=1}^L \tilde{\beta}_{sj}(x)B_{sj}, \quad x \in [0, l]. \tag{32}$$

Ввиду линейности задачи (20), (16), (17), ясно, что разность  $v_j(x) = \bar{v}_j(x) - \tilde{v}_j(x)$  будет решением следующего однородного уравнения

$$v''_j(x) + \tilde{a}_{1j}(x)v'_j(x) + \tilde{a}_{2j}(x)v_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad x \in (0, l) \tag{33}$$

с однородными краевыми условиями

$$v_j(0) = 0, \quad v_j(l) = 0. \tag{34}$$

Ясно, что однородная задача (33), (34) имеет только тривиальное решение  $v_j(x) \equiv 0, x \in [0, l]$ . В противном случае нарушается условие единственности решения первоначальной неоднородной задачи (20), (16), (17) [13]. Следовательно,  $\bar{v}_j(x) = \tilde{v}_j(x), x \in [0, l]$ , а  $\bar{\alpha}_j(x) = \tilde{\alpha}_j(x), \bar{\beta}_{sj}(x) = \tilde{\beta}_{sj}(x)$ . Отсюда следует единственность представления (25). Теорема доказана.

Решив отдельно для каждого  $j$  две краевые задачи (21), (22) и (23), (24), далее используя условие (18) и представление (25), получим равенство

$$v_j(\bar{x}_s) = \alpha_j(\bar{x}_s) + \sum_{s=1}^L \beta_{sj}(\bar{x}_s)B_{sj} = \psi_{2s,j}, \quad s = 1, \dots, L, \tag{35}$$

представляющее собой алгебраическую систему уравнений, из которой можно определить идентифицируемый вектор  $B_s, s = 1, \dots, L$ . Учитывая, что  $L$  — число неизвестных

функций, участвующих в уравнении (1), как правило, в реальных задачах невелико, для решения алгебраической системы уравнений (35) можно использовать какие-либо известные методы, например, Гаусса или итеративные методы.

Разрешимость системы (35) зависит от разрешимости обратной задачи (20), (16)–(18) и обратно, если система (35) не имеет решения, то не имеет решения задача (20), (16)–(18), а следовательно, и исходная задача (1)–(5). Таким образом, свойства существования и единственности решения системы (35) и исходной обратной задачи (1)–(5) взаимосвязаны.

Из решения задачи (20), (16), (17), определяется функция  $v_j(x)$ ,  $x \in [0, l]$ . После этого процедура (21)–(25), (35) повторяется на прямой  $t = t_{j+1}$ , на которой определяется  $v_{j+1}(x)$ .

Таким образом, для определения компонент вектора параметров  $B_s$ ,  $s = 1, \dots, L$  необходимо решить  $N$  раз краевую задачу относительно  $(L + 1)$  независимых дифференциальных уравнений второго порядка. Вычисленный вектор  $B_s = (B_s(t_1), \dots, B_s(t_N))^T$  в дальнейшем с применением методов интерполяции или аппроксимации может быть использован для получения аналитического вида функции  $B_s(t)$ .

### 3. Результаты численных экспериментов

Приведем результаты решения следующих задач параметрической идентификации. Для численного решения задач численным методом, предложенным в разд. 2, разработано программное обеспечение в среде Embarcadero RAD Studio Delphi XE8. Численные эксперименты проводились на персональном компьютере с 64-разрядным, двухъядерным процессором Intel Core i7-4510U, частотой 2,0 ГГц, с объемом оперативной памяти 8 Gb.

**Пример 1.** Рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= a(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \\ B(t)e^{2x} \left[ \frac{1}{7}x - 4a(x)(x + 1) \right], & \quad (x, t) \in \Omega = \{(x, t): 0 < x < 1, 0 < t \leq 1\}, \\ v(x, 0) &= xe^{2x}, \quad x \in [0, 1], \\ v(0, t) = 0, \quad v(1, t) &= e^{\frac{t}{7}+2}, \quad \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = e^{\frac{t}{7}}, \quad t \in [0, 1], \end{aligned}$$

где  $a(x) = \frac{\cos x}{e^x}$ . Точными решениями данной задачи является функции:

$$B(t) = e^{\frac{t}{7}}, \quad v(x, t) = xe^{\frac{t}{7}+2x}.$$

Численные эксперименты проводились при разном числе  $N$  прямых  $t = t_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Для решения вспомогательных задач использовался метод Рунге—Кутты четвертого порядка при различных шагах  $h_x$ .

В табл. 1 приведены результаты решения задачи и времени выполнения программного обеспечения при числе прямых  $N = 100, 200, 500$ .

Были проведены расчеты при наличии случайных помех в функции  $\frac{\partial v(0, t)}{\partial x}$ , обусловленных погрешностями измерения состояния  $v(0, t)$  на левом конце, которые определялись следующим образом:

$$\left( \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} \right)^\sigma = e^{\frac{t}{7}}(1 + \sigma \text{rand}).$$

Здесь  $\sigma$  — величина, определяющая уровень погрешности в измерениях,  $\text{rand}$  — случайные числа, равномерно распределенные на интервале  $[-1, 1]$ , полученные с использованием функции MATLAB  $\text{rand}$ .

Таблица 1

Полученное и точные значения  $B(t)$  для примера 1

$t_j$	$N = 100$		$N = 200$		$N = 500$		Точное $B(t_j)$
	Время: 0,61 сек.		Время: 0,96 сек.		Время: 2,20 сек.		
	$B(t_j)$	$ \Delta B(t_j) $	$B(t_j)$	$ \Delta B(t_j) $	$B(t_j)$	$ \Delta B(t_j) $	
0,10	1,01403	0,00036	1,01425	0,00014	1,01433	0,00006	1,01439
0,20	1,02856	0,00042	1,02883	0,00016	1,02892	0,00006	1,02898
0,30	1,04336	0,00043	1,04363	0,00016	1,04372	0,00007	1,04379
0,40	1,05837	0,00044	1,05864	0,00016	1,05874	0,00007	1,05881
0,50	1,07360	0,00045	1,07388	0,00017	1,07397	0,00007	1,07404
0,60	1,08904	0,00045	1,08933	0,00017	1,08943	0,00007	1,08949
0,70	1,10471	0,00046	1,10500	0,00017	1,10510	0,00007	1,10517
0,80	1,12061	0,00046	1,12090	0,00017	1,12100	0,00007	1,12107
0,90	1,13673	0,00047	1,13703	0,00018	1,13713	0,00007	1,13720

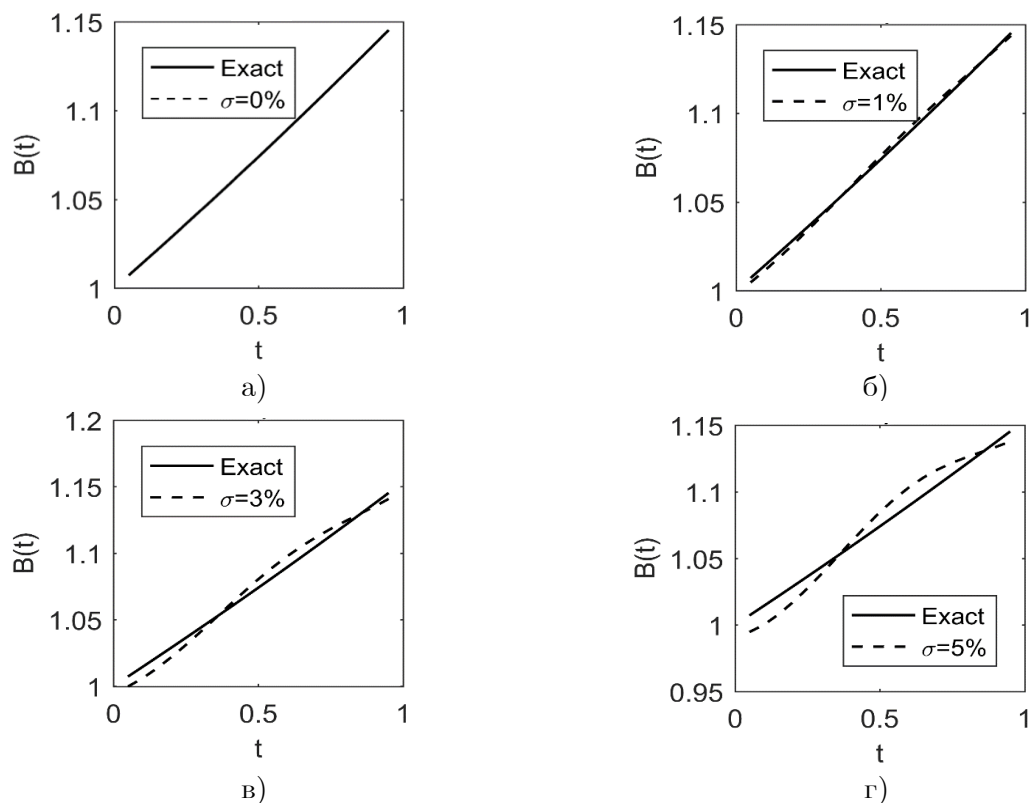
В табл. 2 приведены результаты решения примера 1 при  $N = 500$ ,  $h_x = 0,002$  для уровней погрешности, равных  $\sigma = 1\%$ ,  $\sigma = 3\%$  и  $\sigma = 5\%$ , а также без наличия шума, т.е.  $\sigma = 0\%$ . На рис. 1 даны графики точных значений коэффициента  $B(t)$  (аналитическое решение) и полученных численным методом, предложенным в разд. 2 при различных уровнях шума  $\sigma$ .

Таблица 2

Значения коэффициента  $B(t)$  для примера 1

$j$	$t_j$	Значение $B(t)$				
		Точное	Полученное			
			$\sigma = 0\%$	$\sigma = 1\%$	$\sigma = 3\%$	$\sigma = 5\%$
25	0,05	1,007168	1,007117	1,004635	0,999671	0,994708
50	0,10	1,014388	1,014331	1,011494	1,005821	1,000148
75	0,15	1,021660	1,021599	1,018857	1,013373	1,007889
100	0,20	1,028984	1,028920	1,026556	1,021827	1,017098
125	0,25	1,036360	1,036295	1,034525	1,030986	1,027446
150	0,30	1,043789	1,043724	1,042709	1,040681	1,038653
175	0,35	1,051271	1,051205	1,051040	1,050710	1,050379
200	0,40	1,058807	1,058741	1,059438	1,060833	1,062228
225	0,45	1,066397	1,066330	1,067822	1,070805	1,073787
250	0,50	1,074041	1,073974	1,076113	1,080392	1,084670
275	0,55	1,081741	1,081673	1,084251	1,089406	1,094561
300	0,60	1,089495	1,089427	1,092191	1,097718	1,103246
325	0,65	1,097305	1,097236	1,099916	1,105275	1,110634
350	0,70	1,105171	1,105102	1,107435	1,112100	1,116766
375	0,75	1,113093	1,113024	1,114782	1,118297	1,121813
400	0,80	1,121072	1,121002	1,122013	1,124035	1,126056
425	0,85	1,129109	1,129038	1,129203	1,129533	1,129862
450	0,90	1,137203	1,137132	1,136434	1,135040	1,133645
475	0,95	1,145355	1,145283	1,143792	1,140810	1,137827





**Рис. 1.** Графики точного (Exact) и полученного численными методами коэффициента  $B(t)$  при различных уровнях шума для примера 1

Численные эксперименты проводились при разном числе  $N$  прямых  $t = t_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Для решения вспомогательных задач использовался метод Рунге—Кутты четвертого порядка при различных шагах  $h_x$ .

В табл. 3 приведены результаты решения задачи и времени выполнения программного обеспечения при числе прямых  $N = 100, 200, 500$ .

**Таблица 3**

Полученное и точные значения  $B(t)$  для примера 2

$t_j$	$N = 100$		$N = 200$		$N = 500$		Точное $B(t_j)$
	Время: 0,47 сек.		Время: 0,82 сек.		Время: 1,86 сек.		
	$B(t_j)$	$ \Delta B(t_j) $	$B(t_j)$	$ \Delta B(t_j) $	$B(t_j)$	$ \Delta B(t_j) $	
0,10	1,05042	0,00085	1,05079	0,00048	1,05093	0,00034	1,05127
0,20	1,10416	0,00102	1,10461	0,00056	1,10480	0,00037	1,10517
0,30	1,16071	0,00112	1,16122	0,00062	1,16144	0,00040	1,16183
0,40	1,22020	0,00120	1,22075	0,00066	1,22099	0,00042	1,22140
0,50	1,28275	0,00127	1,28333	0,00070	1,28359	0,00044	1,28403
0,60	1,34852	0,00134	1,34913	0,00073	1,34940	0,00046	1,34986
0,70	1,41765	0,00141	1,41830	0,00077	1,41858	0,00049	1,41907
0,80	1,49034	0,00149	1,49101	0,00081	1,49131	0,00051	1,49182
0,90	1,56675	0,00156	1,56746	0,00085	1,56777	0,00054	1,56831

Были проведены расчеты при наличии случайных помех в функции  $\frac{\partial v(0,t)}{\partial x}$ , обусловленных погрешностями измерения состояния  $v(0,t)$  на левом конце, которые определялись следующим образом:

$$\left(\frac{\partial v(0,t)}{\partial x}\right)^\sigma = \sigma \text{rand},$$

здесь  $\sigma$  — величина, определяющая уровень погрешности в измерениях,  $\text{rand}$  — случайные числа, равномерно распределенные на интервале  $[-1, 1]$ , полученные с использованием функции MATLAB  $\text{rand}$ .

В табл. 4 приведены результаты решения примера 2 при  $N = 500$ ,  $h_x = 0,002$  для уровней погрешности равных  $\sigma = 1\%$ ,  $\sigma = 3\%$  и  $\sigma = 5\%$ , а также без наличия шума, т.е.  $\sigma = 0\%$ . На рис. 2 даны графики точных значений коэффициента  $B(t)$  (аналитическое решение) и полученных численным методом, предложенным в разд. 2 при различных уровнях шума  $\sigma$ .

Результаты большого числа проведенных численных экспериментов по решению различных тестовых обратных задач по определению коэффициентов  $B(t)$  показали следующее.

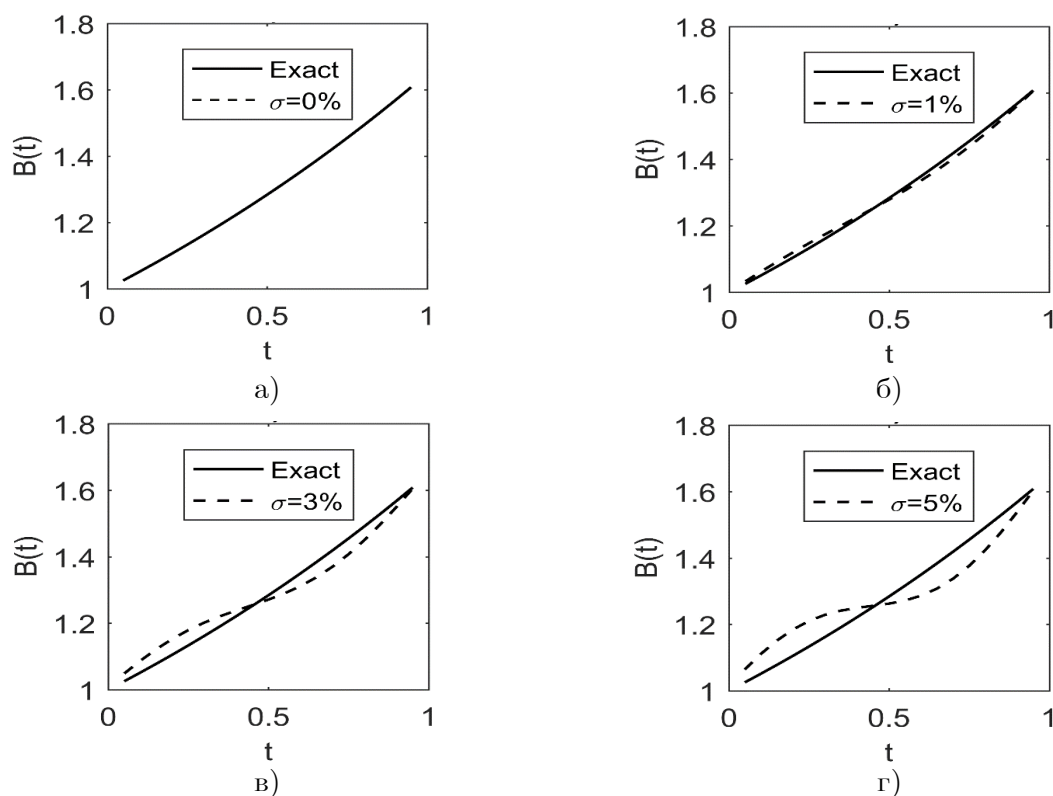
Точность решения обратных задач, как и следовало ожидать, существенно зависит от числа используемых прямых  $N$  в методе прямых для аппроксимации исходной краевой задачи.

Для задачи идентификации коэффициента  $B(t)$  увеличение числа прямых существенно не сталкивается с вычислительными проблемами, т.к. задача (20), (16), (17) на каждой прямой  $t = t_j$  решается независимо и последовательно при  $j = 1, 2, \dots, N$ . Решение этой задачи возможно практически с любой заданной точностью с использованием известных эффективных численных методов решения задач Коши.

Таблица 4

Значения коэффициента  $B(t)$  для примера 2

$j$	$t_j$	Значение $B(t)$				
		Точное	Полученное			
			$\sigma = 0\%$	$\sigma = 1\%$	$\sigma = 3\%$	$\sigma = 5\%$
25	0,05	1,025315	1,024989	1,032816	1,048470	1,064124
50	0,10	1,051271	1,050927	1,062911	1,086879	1,110846
75	0,15	1,077884	1,077526	1,092253	1,121709	1,151165
100	0,20	1,105171	1,104799	1,120715	1,152548	1,184380
125	0,25	1,133148	1,132765	1,148240	1,179190	1,210140
150	0,30	1,161834	1,161439	1,174912	1,201858	1,228805
175	0,35	1,191246	1,190840	1,200963	1,221208	1,241454
200	0,40	1,221403	1,220985	1,226748	1,238273	1,249797
225	0,45	1,252323	1,251894	1,252720	1,254371	1,256022
250	0,50	1,284025	1,283586	1,279386	1,270986	1,262586
275	0,55	1,316531	1,316080	1,307260	1,289621	1,271982
300	0,60	1,349859	1,349396	1,336817	1,311659	1,286501
325	0,65	1,384031	1,383557	1,368447	1,338228	1,308009
350	0,70	1,419068	1,418581	1,402419	1,370094	1,337770
375	0,75	1,454991	1,454493	1,438859	1,407591	1,376323
400	0,80	1,491825	1,491314	1,477738	1,450586	1,423435
425	0,85	1,529590	1,529066	1,518877	1,498499	1,478121
450	0,90	1,568312	1,567775	1,561970	1,550359	1,538749
475	0,95	1,608014	1,607463	1,606610	1,604904	1,603197



**Рис. 2.** Графики точного (Exact) и полученного численными методами коэффициента  $B(t)$  при различных уровнях шума для примера 2

## Заключение

В работе рассмотрена обратная задача по идентификации источника специального вида в линейных параболических уравнениях. Предложена методика численного решения задачи с применением метода прямых, основанная на использовании представления специального вида для решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эффективность предложенного в работе численного метода решения задач параметрической идентификации для параболического уравнения обоснована тем, что он приводится к решению вспомогательных, хорошо исследованных задач, и не требует построения каких-либо итерационных процедур. К рассмотренным коэффициентно-обратным задачам сводятся часто встречающиеся на практике прямые задачи с нелокальными начальными или граничными условиями.

В качестве перспективных направлений исследований отметим применимость этого подхода к другим типам дифференциальных уравнений, например, гиперболическим уравнениям, и к другим видам локальных и нелокальных условий.

*Автор выражает искреннюю благодарность проф. К.Р. Айда-заде за ценные советы и внимание к работе.*

## Литература

1. Айда-заде К.Р., Рагимов А.Б. Решение классов коэффициентно-обратных задач и задач с нелокальными условиями для параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 2015. Т. 51, № 1. С. 84–94. DOI: 10.1134/S0012266115010085.

2. Белавин В.А., Капица С.П., Курдюмов С.П. Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 38, № 6. С. 885–902.
3. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М.Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.
4. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
5. Кожанов А.И. Обратные задачи восстановления правой части специального вида в параболическом уравнении // Математические заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 4. С. 31–45.
6. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высшая школа, 1995. 305 с.
7. Прилепко А.И., Соловьев В.В. Теоремы разрешимости и метод Ротэ в обратных задачах для уравнения параболического типа. I // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 10. С. 1791–1799.
8. Прилепко А.И., Ткаченко Д.С. Корректность обратной задачи об источнике для параболических систем // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 11. С. 1540–1547.
9. Пулькина Л.С. Об одном классе нелокальных задач и их связи с обратными задачами // Труды третьей всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и краевые задачи, Математическое моделирование и краевые задачи». Ч. 3. Самара: Изд-во СамГТУ, 2006. С. 190–192.
10. Самарский А.А. О некоторых проблемах современной теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1221–1228.
11. Соловьев В.В. Определение источника и коэффициентов в параболическом уравнении в многомерном случае // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 6. С. 1060–1069.
12. Соловьев В.В. Существование решения в «целом» обратной задачи определения источника в квазилинейном уравнении параболического типа // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 4. С. 536–544.
13. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. М.: Физматлит, 2005. 256 с.
14. Ahmadabadi M. Nili, Arab M., Maalek Ghaini F.M. The method of fundamental solutions for the inverse space-dependent heat source problem // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2009. Vol. 33. P. 1231–1235. DOI: 10.1016/j.enganabound.2009.05.001.
15. Aida-zade K.R., Rahimov A.B. An approach to numerical solution of some inverse problems for parabolic equations // Inverse Problems in Science and Engineering. 2014. Vol. 22, no. 1. P. 96–111. DOI: 10.1080/17415977.2013.827184.
16. Bouziani A., Benouar N.-E. Probleme mixte avec conditions integrales pour une classe d'equations paraboliques // Comptes Rendus de l'Academie des Sciences. Paris, Serie 1. 1995. Vol. 321. P. 1177–1182.
17. Farcas A., Lesnic D. The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable // Journal of Engineering Mathematics. 2006. Vol. 54. P. 375–388. DOI: 10.1007/s10665-005-9023-0.
18. Hasanov A. Identification of spacewise and time dependent source terms in 1D heat conduction equation from temperature measurement at a final time // Int. J. of Heat and Mass Transfer. 2012. Vol. 55. P. 2069–2080. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.12.009.

19. Hasanov A. An inverse source problem with single Dirichlet type measured output data for a linear parabolic equation // Applied Mathematics Letters. 2011. Vol. 24. P. 1269–1273. DOI: 10.1016/j.aml.2011.02.023.
20. Hasanov A., Otelbaev M., Akpayev B. Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data // Inverse Problems in Science and Engineering. 2011. Vol. 19, no. 7. P. 895–1006. DOI: 10.1080/17415977.2011.565931.
21. Ismailov M.I., Kanca F., Lesnic D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions // Applied Mathematics and Computation. 2011. Vol. 218. P. 4138–4146. DOI: 10.1016/j.amc.2011.09.044.
22. Ivanchov M.I. Inverse Problems for Equations of Parabolic Type. VNTL Publications, Lviv, Ukraine, 2003. 238 p.
23. Johansson T., Lesnic D. A variational method for identifying a spacewise-dependent heat source // IMA Journal of Applied Mathematics. 2007. Vol. 72, no. 6. P. 748–760. DOI: 10.1093/imamat/hxm024.
24. Rothe E. Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben // Mathematische Annalen. 1930. Vol. 102, no. 1. P. 650–670.
25. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. M. Dekker, New York, 2000. 709 p.
26. Yan L., Fu C.L., Yang F.L. The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2008. Vol. 32. P. 216–222. DOI: 10.1016/j.enganabound.2007.08.002.

Рагимов Анар Бейбала, к.ф.-м.н., доцент, ведущий научный сотрудник, Институт Систем Управления НАН Азербайджана (Баку, Азербайджан)

---

DOI: 10.14529/cmse200403

## ON THE PROBLEM OF RESTORING TIME COEFFICIENT-FUNCTIONS OF SPECIAL TYPE SOURCE IN PARABOLIC EQUATION

© 2020 A.B. Rahimov

*The Institute of Control Systems, Azerbaijan National Academy of Science*

*(B. Vahabzadeh 9, Baku, AZ1141 Azerbaijan)*

*E-mail: anar\_r@yahoo.com*

Received: 05.03.2020

An inverse problem of identifying coefficients depend only on time for a special form source in a linear parabolic equation with point overdetermined conditions. In particular, boundary value problems with nonlocal (integral) boundary conditions are reduced to such problems. The specificity of the problems is that the identifiable parameters depend only on a time variable and are factors of the coefficients of the right-hand side of the equation. A method for numerically solving the problem using the method of lines is proposed, based on using a special type representation of solution. By applying the method of lines, the problem is reduced to a parametric inverse problem with respect to an ordinary differential equations system. For its solution, a special type of representation of this solution is proposed. To solve this problem, auxiliary boundary value problems are constructed that determine a solution to the initial problem. The most important in this work is that the proposed approach to the numerical solution to the investigated inverse problem of identifying the coefficients does not require (in contrast to previously known methods) to construct any iterative procedure. The results of numerical experiments in the form of tables and graphs obtained by solving the test problems, and their analysis are provided.

*Keywords: inverse problem, nonlocal conditions, method of lines, parabolic equation, parametric identification.*

## FOR CITATION

Rahimov A.B. On the Problem of Restoring Time Coefficient-Functions of Special Type Source in Parabolic Equation. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2020. Vol. 9, no. 4. P. 33–47. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse200403.

*This paper is distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-Non Commercial 3.0 License which permits non-commercial use, reproduction and distribution of the work without further permission provided the original work is properly cited.*

## References

1. Aida-zade K.R., Rahimov A.B. Solution to classes of inverse coefficient problems and problems with nonlocal conditions for parabolic equations. *Differential Equations*. 2015. Vol. 51, no. 1. P. 83–93. DOI: 10.1134/S0012266115010085.
2. Belavin V.A., Kapitza S.P., Kurdyumov S.P. A mathematical model of global demographic processes with regard to the spatial distribution. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1998. Vol. 38, no. 6. P. 849–865.
3. Vodahova V.A. A boundary value problem with A.M. Nakhushev's nonlocal condition for a pseudoparabolic equation of moisture transfer. *Differential Equations*. 1982. Vol. 18, no. 2. P. 280–285. (in Russian)
4. Ionkin N.I. The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition. *Differential Equations*. 1977. Vol. 13, no. 2. P. 294–304. (in Russian)
5. Kozhanov A.I. A Nonlinear Loaded Parabolic Equation and a Related Inverse Problem. *Mathematical Notes*. 2004. Vol. 76, no. 78. P. 784–795. DOI: 10.1023/B:MATN.0000049678.16540.a5.
6. Nakhushev A.M. *Equations of mathematical biology*. M.: Vysshaya Shkola, 1995. 305 p. (in Russian)
7. Prilepko A.I., Solov'ev V.V. Solvability theorems and the rothe method in inverse problems for an equation of parabolic type. I. *Differential Equations*. 1987. Vol. 23, no. 10. P. 1791–1799. (in Russian)
8. Prilepko A.I., Tkachenko D.S. Well-posedness of the inverse source problem for parabolic systems. *Differential Equations*. 2004. Vol. 40, no. 11. P. 1619–1626.
9. Pulkina L.S. On one class of nonlocal problems and their connection with inverse problems. *Proceedings of the Third All-Russia scientific conference “Mathematical modelling and boundary value problems”, Part 3: Differential equations and boundary value problems*. Samara: Publishing of the Samara State Technical University, 2006. P. 190–192. (in Russian)
10. Samarskii A.A. On some problems of the modern theory of differential equations. *Differential Equations*. 1980. Vol. 16, no. 11. P. 1221–1228. (in Russian)
11. Solov'ev V.V. Determination of a source and coefficients in a parabolic equation in the multidimensional case. *Differential Equations*. 1995. Vol. 31, no. 6. P. 1060–1069. (in Russian)
12. Solov'ev V.V. Existence of solution as a “whole” of inverse problem of determining the source in a quasilinear equation of parabolic type. *Differential Equations*. 1996. Vol. 32, no. 4. P. 536–544. (in Russian)
13. Tikhonov A.N., Vasilyeva A.B., Sveshnikov A.Q. *Differential equations*. M.: Fizmatlit, 2005. 256 p. (in Russian)

14. Ahmadabadi M. Nili, Arab M., Maalek Ghaini F.M. The method of fundamental solutions for the inverse space-dependent heat source problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2009. Vol. 33. P. 1231–1235. DOI: 10.1016/j.enganabound.2009.05.001.
15. Aida-zade K.R., Rahimov A.B. An approach to numerical solution of some inverse problems for parabolic equations. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2014. Vol. 22, no. 1. P. 96–111. DOI: 10.1080/17415977.2013.827184.
16. Bouziani A., Benouar N.-E. Probleme mixte avec conditions integrales pour une classe d'equations paraboliques. *Comptes Rendus de l'Academiedes Sciences. Paris, Serie 1*. 1995. Vol. 321. P. 1177–1182.
17. Farcas A., Lesnic D. The boundary-element method for the determination of a heat source dependent on one variable. *Journal of Engineering Mathematics*. 2006. Vol. 54. P. 375–388. DOI: 10.1007/s10665-005-9023-0.
18. Hasanov A. Identification of spacewise and time dependent source terms in 1d heat conduction equation from temperature measurement at a final time. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*. 2012. Vol. 55. P. 2069–2080. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.12.009.
19. Hasanov A. An inverse source problem with single dirichlet type measured output data for a linear parabolic equation. *Applied Mathematics Letters*. 2011. Vol. 24. P. 1269–1273. DOI: 10.1016/j.aml.2011.02.023.
20. Hasanov A., Otelbaev M., Akpayev B. Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2011. Vol. 19, no. 7. P. 895–1006. DOI: 10.1080/17415977.2011.565931.
21. Ismailov M.I., Kanca F., Lesnic D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions. *Applied Mathematics and Computation*. 2011. Vol. 218. P. 4138–4146. DOI: 10.1016/j.amc.2011.09.044.
22. Ivanchov M.I. *Inverse problems for equations of parabolic type*. VNTL Publications, Lviv, Ukraine, 2003. 238 p.
23. Johansson T., Lesnic D. A variational method for identifying a spacewise-dependent heat source. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2007. Vol. 72, no. 6. P. 748–760. DOI: 10.1093/imamat/hxm024.
24. Rothe E. Zweidimensionale parabolische randwertaufgaben als grenzfall eindimensionaler randwertaufgaben. *Mathematische Annalen*. 1930. Vol. 102, no. 1. P. 650–670.
25. Prilepko A.I., Orlovsky D.G., Vasin I.A. *Methods for solving inverse problems in mathematical physics*. M. Dekker, New York, 2000. 709 p.
26. Yan L., Fu C.L., Yang F.L. The method of fundamental solutions for the inverse heat source problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2008. Vol. 32. P. 216–222. DOI: 10.1016/j.enganabound.2007.08.002.