

# ТОЧНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ

*А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, М.В. Яковлевский*

В работе рассмотрены схемы второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации для решения задачи диффузии-конвекции. Для модельной начально-краевой задачи, в случае когда функции правой части и начального условия представимы конечными суммами рядов Фурье по тригонометрическому базису, исследована точность разностных схем. Установлено, что точность численного решения зависит от количества узлов приходящихся на половину длины волны, соответствующей наиболее высокочастотной гармонике в конечной сумме ряда Фурье, необходимой для описания поведения расчетных объектов. Получены зависимости погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности от количества узлов. Выполнено сопоставление результатов расчета двумерной задачи диффузии-конвекции и задачи Пуассона на основе схем второго и четвертого порядков точности. В работе обоснована целесообразность перехода к схемам повышенного порядка точности при решении прикладных задач и из полученных оценок нетрудно получить численные значения выигрышев во времени счета при использовании схем повышенного порядка точности.

*Ключевые слова:* точность, разностные схемы, уравнение диффузии-конвекции, погрешность аппроксимации.

## 1. Аналитическое решение уравнения диффузии

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности вида

$$u'_t = ku''_{xx} + f, 0 < x < l, 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \quad (2)$$

В отношении функций  $u(x, t)$  и  $f(x, t)$  будем предполагать их представимость в виде рядов Фурье по тригонометрическому базису:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(u)}(t) \sin(\omega m x), f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)}(t) \sin(\omega m x), \quad (3)$$

где  $\omega = \pi/l$ ,  $C_m^{(f)} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\omega m x) dx$ ,  $C_m^{(u)} = \frac{2}{l} \int_0^l u(x) \sin(\omega m x) dx$ .

Наряду с задачей (1) – (3), которую будем называть "точной" непрерывной задачей, рассмотрим первую начально-краевую задачу с "усеченной" правой частью

$$f^{(N)}(x, t) = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(f)}(t) \sin(\omega m x), \quad (4)$$

и "усеченными" начальными условиями

$$u_0^{(N)}(x, t) = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(0) \sin(\omega m x), \quad (5)$$

для задачи вида

$$(u^{(N)})'_t = k(u^{(N)})''_{xx} + f^{(N)}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (6)$$

$$u^{(N)}(x, 0) = u_0^{(N)}(x), \quad u^{(N)}(0, t) = u^{(N)}(l, t) = 0. \quad (7)$$

Следует отметить, что такая постановка возникает, например, в случае табличного способа задания функции  $f$  и  $u_0$  ряды будут ограничены  $N-1$  гармониками т.к. для восстановления непрерывной функции применяется интерполяционный тригонометрический полином [1], где  $N$  – количество дискретных значений функции. Оценим "близость" функций  $u(x, t)$  и  $u^{(N)}(x, t)$  – соответственно решения "точной" и "усеченной" задачи, введя функции

$$w^{(N)}(x, t) \equiv u(x, t) - u^{(N)}(x, t), \quad g^{(N)}(x, t) \equiv f(x, t) - f^{(N)}(x, t), \quad v_0^{(N)}(x) \equiv u_0(x) - u_0^{(N)}(x) \quad (8)$$

имеем вспомогательную задачу

$$(w^{(N)})'_t = k(w^{(N)})''_{xx} + g^{(N)}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \quad (9)$$

$$w^{(N)}(x, 0) = v_0^{(N)}(x), \quad w^{(N)}(0, t) = w^{(N)}(l, t) = 0. \quad (10)$$

Для решения задачи (9) – (10) справедлива оценка в гильбертовом пространстве  $\mathcal{L}_\infty$  для любого  $t > 0$  [2]:

$$\|w^{(N)}(x, t)\|_\infty \leq \|v_0^{(N)}(x)\|_\infty + \int_0^t \|g^{(N)}(x, \theta)\|_\infty d\theta \quad (11)$$

Известно, что для класса функций периода  $2\pi$ , имеющих производную порядка  $\alpha$ , удовлетворяющий неравенству  $|\varphi^{(\alpha)}(x)| \leq K$ , имеет место оценка остаточного члена ряда (3) для любого натурального  $\alpha$  [3]:

$$\sup_{0 \leq x \leq l} \left| \varphi(x) - \sum_{m=1}^{N-1} C^{(\varphi)} \sin(mx) \right| = \frac{4K \ln N}{\pi^2} \frac{1}{N^\alpha} + O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right). \quad (12)$$

Учитывая оценку (12), а также соотношения (9) – (10), из неравенства (11) получим оценку для любого  $t > 0$

$$\|w^{(N)}(x/\omega, t)\|_\infty \leq 4 \frac{K_1/N^2 + T K_2 \ln N}{\pi^2} \frac{1}{N^{\alpha-2}} + O\left(\frac{1}{N^{\alpha-2}}\right), \quad (13)$$

$$K_1 = \max_{0 \leq x \leq l} |u_0^{(\alpha)}(x/\omega)|, \quad K_2 = \max_{0 \leq x \leq l} |f^{(\alpha-2)}(x/\omega, t)|$$

Оценка (13) гарантирует сходимость решения "усеченной" задачи к решению точной задачи при  $N \rightarrow \infty$  при достаточно гладких входных данных в смысле выполнения неравенства (12), при  $\alpha \geq 3$ . В дальнейшем  $u(x, t)$  предполагается принадлежащей классу

$C^{(4)}$  [ $0 \leq x \leq l$ ] в случае разностной схемы с погрешностью решения  $O(h^2 + \tau^\beta)$  (см п. 2) и классу  $C^{(6)}$  [ $0 \leq x \leq l$ ] в случае схемы с погрешностью  $O(h^4 + \tau^\beta)$  (см п. 3), где  $\beta$  зависит от веса схемы. Для остальных функций входящих в постановку исходной задачи (1) – (3) также предполагается необходимая гладкость.

Функции  $u^{(N)}$  и  $f^{(N)}$  при подстановке в (1) приводят к соотношению:

$$\left( \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)} \sin(\omega mx) \right)'_t = k \left( \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)} \sin(\omega mx) \right)''_{xx} + \sum_{n=1}^{N-1} C_n^{(f)} \sin(\omega mx).$$

Меняя очередность операции дифференцирования и суммирования ряда получим:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \left( C_m^{(u)}(t) \right)'_t \sin(\omega mx) = \sum_{m=1}^{N-1} k C_m^{(u)} (-\omega^2 m^2 \sin(\omega mx)) + \sum_{n=1}^{N-1} C_n^{(f)} \sin(\omega mx).$$

Принимая во внимание линейную независимость функций  $\sin(\omega mx)$ , получим:

$$\left( C_m^{(u)}(t) \right)'_t = -k\omega^2 m^2 C_m^{(u)} + C_m^{(f)}. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) примет вид:

$$C_m^{(u)}(t) = \left( C_{m,0}^{(u)} - \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2} \right) e^{-k\omega^2 m^2 t} + \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2}.$$

После проделанных преобразований и вычислений, с учетом заданных начальных и граничных условий, будет найдена искомая функция:

$$u = \sum_{m=1}^{N-1} \left( \left( C_{m,0}^{(u)} - \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2} \right) e^{-k\omega^2 m^2 t} + \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2} \right) \sin(\omega mx). \quad (15)$$

## 2. Точность численного решения уравнения диффузии на основе разностных схем второго порядка погрешности аппроксимации

Для численного решения задачи (1) покроем расчетную область равномерной сеткой:  $w_{h,\tau} = \{t^n = n\tau, x_i = ih; n = \overline{0..N_t}, i = \overline{0..N_x}; N_t\tau = T, N_xh = l\}$ , где  $\tau$  – шаг по времени,  $h$  – шаг по пространству,  $N_t$  – число шагов по времени,  $N_x$  – число узлов по пространственной координате.

Аппроксимация уравнения (1) примет вид [4]:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = k \frac{u_{i+1}^{n+\sigma} - 2u_i^{n+\sigma} + u_{i-1}^{n+\sigma}}{h^2} + f_i, \quad (16)$$

где  $c_i^{n+\sigma} = \sigma c_i^{n+1} + (1 - \sigma) c_i^n$ ,  $\sigma \in [0, 1]$  – вес схемы [5].

Будем использовать представления (4), (5) функций  $u$  и  $f$  при решении задачи (16)

$$\frac{\sum_{m=1}^{N-1} \left( C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n) \right) \sin(\omega mx_i)}{\tau} =$$

$$= k \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)} (t^{n+\sigma}) \frac{(\sin(\omega m x_{i+1}) - 2 \sin(\omega m x_i) + \sin(\omega m x_{i-1}))}{h^2} + \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(f)} \sin(\omega m x).$$

Преобразуем полученное выражение и, принимая во внимание линейную независимость функций  $\sin(\omega n x)$ , получим:

$$\frac{C_m^{(u)} (t^{n+1}) - C_m^{(u)} (t^n)}{\tau} = k \frac{2 (\cos(\omega m h) - 1)}{h^2} C_m^{(u)} (t^{n+\sigma}) + C_m^{(f)}. \quad (17)$$

**Лемма 1.** При выполнении оценок (12) аппроксимации задачи (1) – (2) разностными схемами (16) для каждой гармоники функции решения  $u$  и скорость диффузационного обмена  $k$  меньше реальных значений и отличаются на величину  $\alpha_1 = 1 - 2 (1 - \cos(\omega m h)) / (\omega m h)^2$ .

**Доказательство.** Из (6) при  $\tau \rightarrow 0$  следует:

$$\left( C_m^{(u)} (t) \right)' = -k \left( \frac{2 (\cos(\omega m h) - 1)}{\omega^2 m^2 h^2} \right) \omega^2 m^2 C_m^{(u)} (t^{n+\sigma}) + C_m^{(f)}.$$

В силу (14) решение, полученное на основе схемы (5) соответствует решению уравнения  $u'_t = k^* u''_{xx} + f$ ,  $k^* = k (1 - \alpha_1)$ ,  $\alpha_1 = 1 - 2 (1 - \cos(\omega m h)) / (\omega m h)^2$ . Лемма доказана.

Рассмотрим величину  $\alpha_1 = 1 - 2 (1 - \cos(\omega m h)) / (\omega m h)^2$ :

$$\alpha_1 = 1 - \frac{2 (1 - \cos(\omega m h))}{\omega^2 m^2 h^2} = 1 - \frac{2 \left( 1 - \frac{(\omega m h)^2}{2} + \frac{(\omega m h)^4}{24} + O(h^6) - 1 \right)}{-\omega^2 m^2 h^2} = \frac{(\omega m h)^2}{12} + O(h^4).$$

**Замечание 1.** Имеет место оценка  $\omega m h < \pi$ . Также следует отметить, что величина  $r = \pi / (\omega m h)$  описывает количество узлов, приходящихся на половину периода волны (на описание объекта). Из полученной оценки видно, что точность численного решения зависит от количества узлов приходящихся на половину периода волны.

На рис. 1 приведен график функции  $\alpha_1 (r) = 1 - 2 (1 - \cos(\pi/r)) / (\pi/r)^2$ , описывающей зависимость погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта.

Аналитическое выражение соответствующее численному решению запишется:

$$u = \sum_{m=1}^{N-1} \left( C_{m,0}^{(u)} \right) e^{-k(1-\alpha_1(N/m))\omega^2 m^2 t} \sin(\omega m x).$$

**Замечание 2.** При описании диффузионных слагаемых разностными схемами погрешность аппроксимации в наихудшем случае задании функции источников (в виде точечных источников  $r=2$ ) будет составлять 18,9%.

### 3. Точность численного решения уравнения диффузии на основе разностных схем четвертого порядка погрешности аппроксимации

Рассмотрим случай разностной аппроксимации схемами повышенного (четвертого) порядка точности [5]:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = k \frac{-u_{i+2}^{n+\sigma} + 16u_{i+1}^{n+\sigma} - 30u_i^{n+\sigma} + 16u_{i-1}^{n+\sigma} - u_{i-2}^{n+\sigma}}{12h^2} + f_i \quad (18)$$

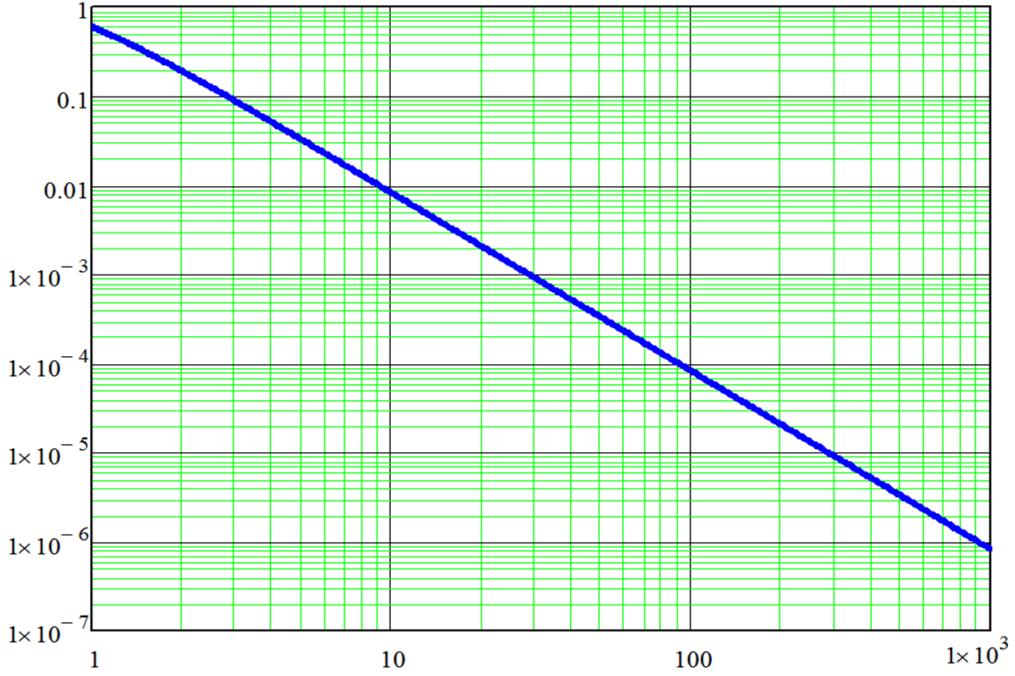


Рис. 1. График зависимости погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта

Будем использовать представления (2) функций  $u$  и  $f$  при решении задачи (18):

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \left( C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n) \right) \sin(\omega m x_i)}{\tau} = \\
 & = k \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(u)}(t^{n+\sigma}) \frac{-\sin(\omega m x_{i+2}) + 16 \sin(\omega m x_{i+1}) - 30 \sin(\omega m x_i) + 16 \sin(\omega m x_{i-1}) - \sin(\omega m x_{i-2})}{h^2} + \\
 & + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)} \sin(\omega m x).
 \end{aligned}$$

Преобразуя полученное выражение и принимая во внимание линейную независимость функций  $\sin(\omega n x)$ , получим:

$$\frac{C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n)}{\tau} = k \frac{-2 \cos(2\omega m h) + 32 \cos(\omega m h) - 30}{12 h^2} C_m^{(u)}(t^{n+\sigma}) + C_m^{(f)}. \quad (19)$$

**Лемма 2.** В условиях выполнении оценок (12) при решении задачи (1) разностными схемами (18) для каждой гармоники функции решения  $u$  скорость диффузионного обмена  $k$  меньше реальных значений и отличаются на величину  $\alpha_2 = 1 - (15 - 16 \cos(\omega m h) + \cos(2\omega m h)) / 6 (\omega m h)^2$ .

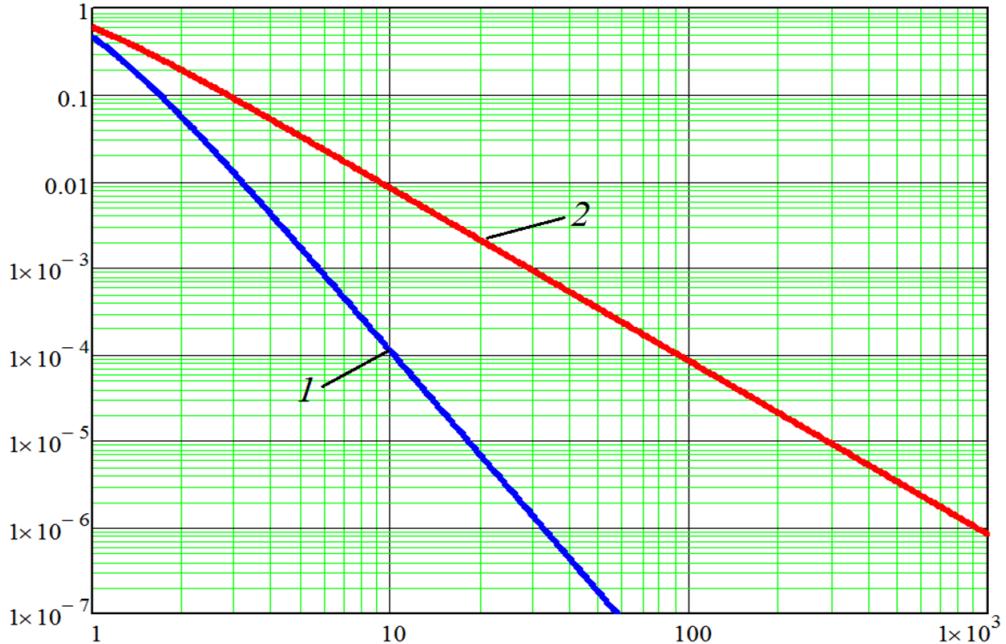
**Доказательство.** Аналогично лемме 1.

Рассмотрим величину  $\alpha_2 = 1 - (15 - 16 \cos(\omega m h) + \cos(2\omega m h)) / 6 (\omega m h)^2$ :

$$\alpha_2 = 1 - (15 - 16 \cos(\omega m h) + \cos(2\omega m h)) / 6 (\omega m h)^2 = (\omega m h)^4 / 90 + O(h^6).$$

Функция, описывающая зависимость погрешности аппроксимации диффузионных операторов разностными схемами четвертого порядка точности от количества узлов на структуру примет вид  $\alpha_2(r) = 1 - (15 - 16 \cos(\pi/r) + \cos(2\pi/r))/6(\pi/r)^2$ .

На рис. 2 приведены графики функций, описывающие зависимости погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности от количества узлов.



**Рис. 2.** График зависимости погрешности аппроксимации операторов диффузионного переноса разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта: 1 – схемы второго порядка точности, 2 – четвертого

**Замечание 3.** При описании диффузионных слагаемых разностными схемами погрешность аппроксимации может составлять для данных слагаемых в наихудшем случае задании функции источников 5,4%.

#### 4. Погрешность аппроксимации операторов конвективного переноса

Рассмотрим краевую задачу диффузии-конвекции с начальными и граничными условиями [7-8], т.е. найдем аналитическое решение уравнения

$$u'_t + vu'_x = ku''_{xx}, \quad 0 < x < l, t > 0, \quad (20)$$

удовлетворяющее начальному условию  $u(x, 0) = u_0(x)$  и граничным условиям  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$ ,  $t > 0$ .

Для решения задачи (20) выполнить переход в подвижную систему координат  $y = x - vt$  при этом решение задачи сводится к решению уравнения диффузии:  $u'_t = ku''_{yy}$  аналитическое решение которого описано выше.

Рассмотрим разностную производную оператора конвективного переноса  $u'_x$  второго порядка точности. Используем представления (12) функции  $u$ :

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t) \frac{(\sin(\omega m x_{i+1}) - \sin(\omega m x_{i-1}))}{2h} = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t) \frac{\sin(\omega m h)}{h} \cos(\omega m x).$$

Непрерывная производная с учетом представления (12) примет вид:

$$u'_x = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t) \omega m \cos(\omega m x).$$

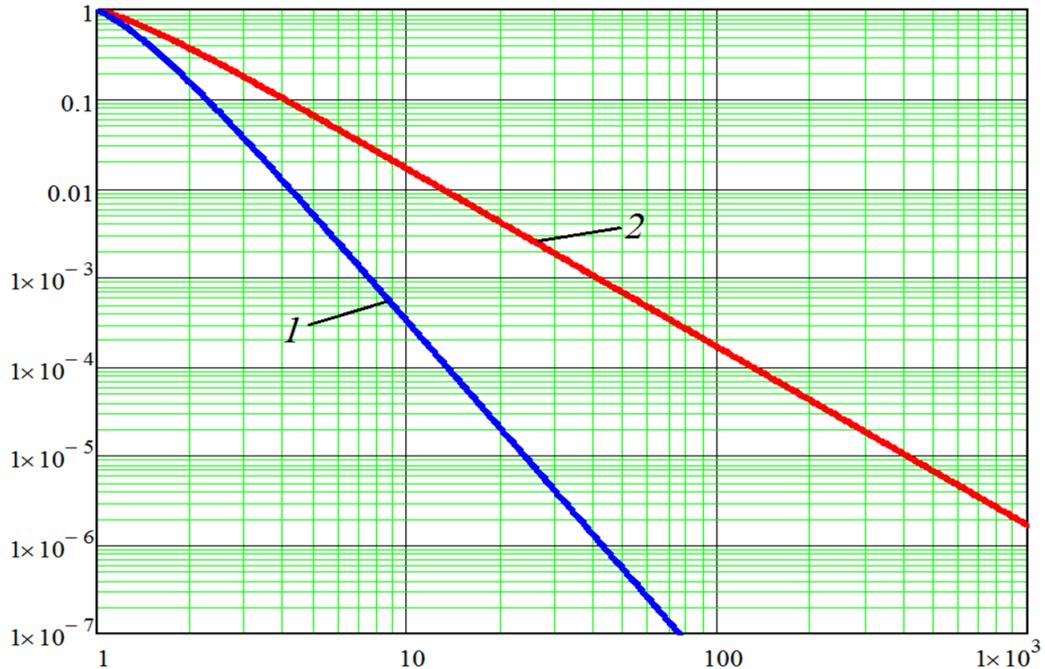
Таким образом, функция, описывающая зависимость погрешности аппроксимации конвективных операторов разностными схемами от количества узлов на структуру примет вид:  $\alpha_3(r) = 1 - \sin(\pi/r) / (\pi/r)$ .

Для схемы четвертого порядка точности

$$u'_x \simeq \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{12h}$$

оператора конвективного переноса не трудно получить функцию, описывающую зависимость погрешность аппроксимации данного оператора от количества узлов, приходящихся на половину периода волны  $\alpha_4(r) = 1 - (8 \sin(\pi/r) - \sin(2\pi/r)) / (6\pi/r)$ .

На рис. 3 приведены графики функций, описывающие зависимости погрешности аппроксимации конвективных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности от количества узлов.



**Рис. 3.** График зависимости погрешности аппроксимации операторов конвективного переноса разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта: 1 – схемы четвертого порядка точности, 2 – второго

**Замечание 4.** При описании конвективных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности погрешность аппроксимации может составлять в наихудшем случае задания функции источников 36,3% и 15,1% соответственно.

## 5. Сопоставление результатов расчета двумерной задачи диффузии-конвекции на основе схем второго и четвертого порядков точности

Моделирование производилось на сетке размерами  $100 \times 100$ , расчетных узлов, при этом параметры задавались следующим образом: размеры расчетной области  $lx=100 \text{ м}$ ,  $ly=100 \text{ м}$ , временной интервал равен  $10 \text{ с}$ , горизонтальная составляющая равна  $4 \text{ м/с}$ , вертикальная –  $3 \text{ м/с}$ , коэффициент турбулентного обмена равен  $2 \text{ м}^2/\text{с}$ . При решении задачи двумерной диффузии-конвекции начальное распределение задавалось функцией:

$$C(x, y) = \begin{cases} \sin(\pi(x - 10)) \cos(\pi(y - 10)), & \{x, y\} \in D, \quad D : \{x \in [10, 20], y \in [10, 20]\}, \\ 0, & \{x, y\} \notin D. \end{cases}$$

На рис. 4 приведено начальное распределение для задачи диффузии-конвекции и поле концентраций через заданный интервал времени.

**Замечание 5.** В случае решения задачи переноса на основе разностных методов не совсем уместно говорить о точности решения исходной задачи, т.к. погрешности аппроксимации влияют на скорость конвективного переноса и даже не большие отклонения в положении решения могут приводить к большим значениям погрешности.

За расчетный интервал времени вещества переносятся на  $50 \text{ м}$ . При использовании разностных методов полученные значения скорости конвективного переноса меньше реальной скорости распространения при этом отклонение положения центра области концентрации веществ для данной задачи составило  $38,04 \text{ мкм}$ .

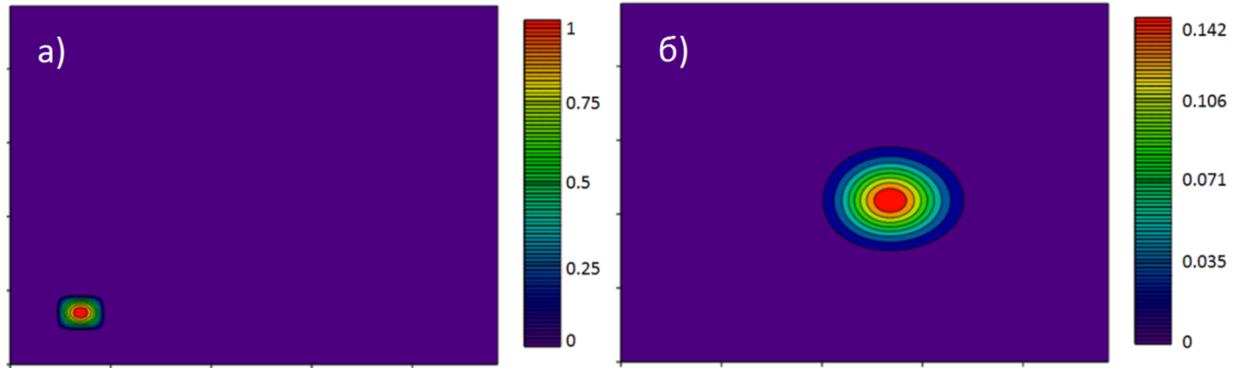


Рис. 4. Значение концентрации в начальный и конечный моменты времени

На рис. 5 приведены значения спектра поля концентрации через заданный интервал времени для аналитического и численного решения задачи диффузии-конвекции.

В таблице 1 приведены значения погрешностей, зависящих от времени, для задачи диффузии-конвекции схемами второго порядка точности.

В таблице 2 приведены значения погрешностей расчета задачи диффузии-конвекции на различных расчетных сетках схемами второго порядка точности.

На рис. 6 приведено поле, описывающее погрешность вычислений, полученное как разность между аналитическим и численным решением для задачи диффузии-конвекции.

Исходя из результатов расчета погрешности расчета задачи диффузии-конвекции, приведенных в таблице 1, можно утверждать, что используемые схемы не только теоретически, но и практически имеют второй порядок точности.

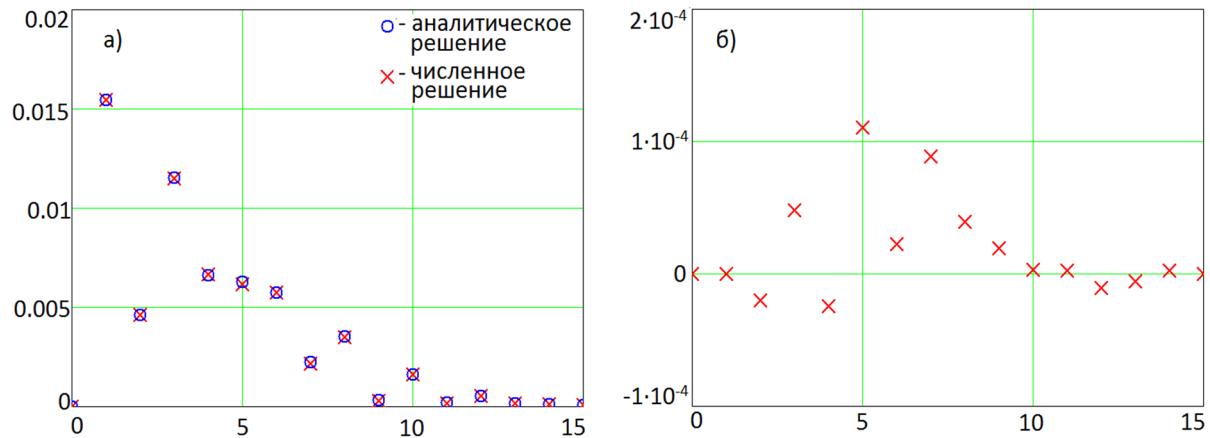


Рис. 5. Значение спектра поля концентрации через заданный интервал времени (а), разность между значениями спектра, найденные аналитическим путем и численно (б)

Таблица 1

Зависимость погрешности от времени для задачи диффузии-конвекции

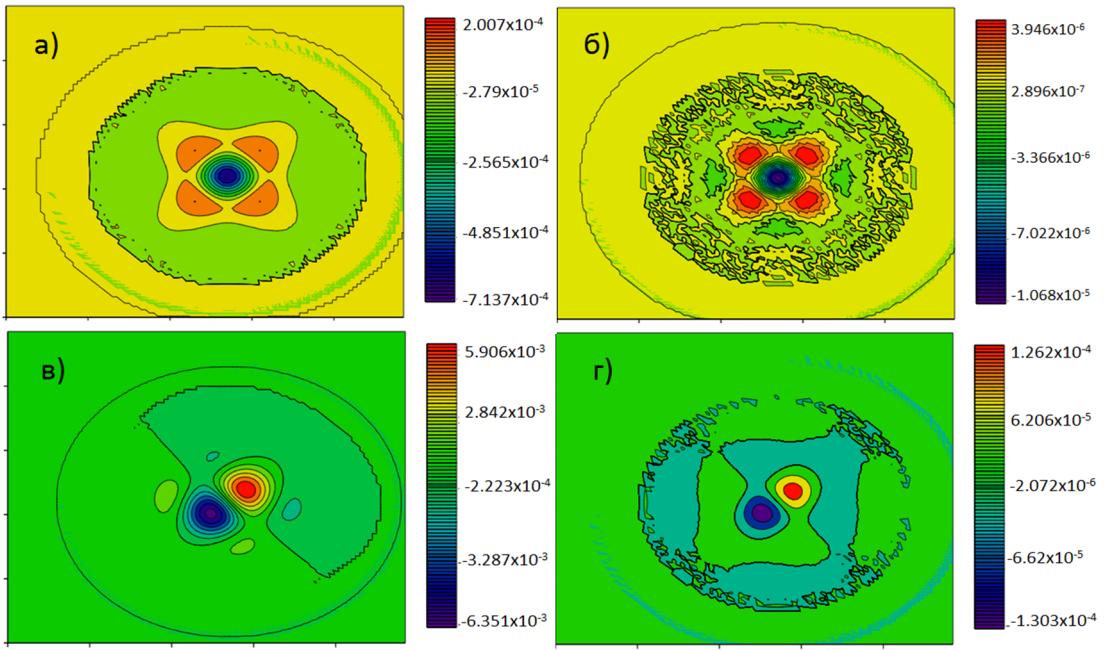
| Время                         | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    |
|-------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Максимальное значение решения | 0.681 | 0.488 | 0.376 | 0.305 | 0.256 | 0.221 | 0.194 | 0.173 | 0.156 | 0.142 |
| Погрешность                   | 2,4%  | 2.5%  | 2.1%  | 1.7%  | 1.4%  | 1.1%  | 0.97% | 0.83% | 0.72% | 0.64% |
| Относительная погрешность     | 3.52% | 5.12% | 5.58% | 5.57% | 5.47% | 5%    | 4.98% | 4.8%  | 4.61% | 4.51% |

Таблица 2

Погрешность расчета задачи диффузии-конвекции на различных сетках

| Размер сетки              | 100 x 100 | 200 x 200 | 400 x 400 | 800 x 800 |
|---------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Значение погрешности      | 0,6351%   | 0,1596%   | 0,04037%  | 0,01059%  |
| Относительная погрешность | 4.507%    | 1.124%    | 0.284%    | 0.075%    |

В рассмотренной модельной задаче диффузии-конвекции область, где задано начальное распределение концентрации веществ отличных от нуля, покрывается 9 узлами по каждому из пространственных направлений. Из сопоставления результатов численных экспериментов на основе схем второго и четвертого порядков точности (рис. 6) следует, что для задачи диффузии удалось повысить точность в 66.7 раз, а для задачи диффузии-конвекции в 48.7 раз. Результаты расчетов, приведенные на рис. 6, согласуется с теоретическими суждениями, и таким образом, при использовании разностных методов, скорости конвективного и диффузационного переносов меньше реальных скоростей данных процессов.



**Рис. 6.** Поля, полученные как разность между аналитическими и численными решениями для задачи диффузии-конвекции: сверху – задача диффузии, снизу – задача диффузии-конвекции (слева схемы второго порядка точности, справа – четвертого)

## 6. Сопоставление результатов расчета двумерной задачи Пуассона на основе схем второго и четвертого порядков точности

Рассмотрим уравнение Пуассона [9]

$$\Delta u = -f, 0 < x < l_x, 0 < y < l_y,$$

удовлетворяющее граничным условиям  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$ ,  $t > 0$ .

Аналитическое решение данной задачи примет вид:

$$u = \sum_{m_x=1}^{N-1} \sum_{m_y=1}^{N-1} \left( \frac{C_{m_x m_y}^{(f)}}{\omega^2 (m_x^2 + m_y^2)} \right) \sin(\omega m_x x) \sin(\omega m_y y), f = \sum_{m_x=1}^{N-1} \sum_{m_y=1}^{N-1} C_{m_x m_y}^{(f)} \sin(\omega m_x x) \sin(\omega m_y y).$$

Численные расчеты данной задачи производились на сетке размерами  $100 \times 100$ , расчетных узлов, при этом: размеры расчетной области  $lx=100$  м,  $ly=100$  м, правая часть задавалась функцией:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(\pi(x - 45)) \cos(\pi(y - 45)), & \{x, y\} \in D, D : \{x \in [45, 55], y \in [45, 55]\}, \\ 0, & \{x, y\} \notin D. \end{cases}$$

Аналитическое выражение соответствующее численному решению запишется:

$$u = \sum_{m_x=1}^{N-1} \sum_{m_y=1}^{N-1} \left( \frac{C_{m_x m_y}^{(f)}}{\omega^2 (m_x^2 (1 - f_1(N/m_x)) + m_y^2 (1 - f_1(N/m_y)))} \right) \sin(\omega m_x x) \sin(\omega m_y y).$$

На рис. 7 приведены значения спектра поля концентрации через заданный интервал времени для аналитического и численного решения задачи Пуассона.



Рис. 7. Значение спектра поля концентрации через заданный интервал времени (а), разность между значениями спектра, найденные аналитическим путем и численно (б)

На рис. 8 представлена функция правой части (а), численное решение поставленной задачи (б) и поля, полученные как разность между аналитическим и численным решением для схем второго (в) и четвертого порядков точности (г).

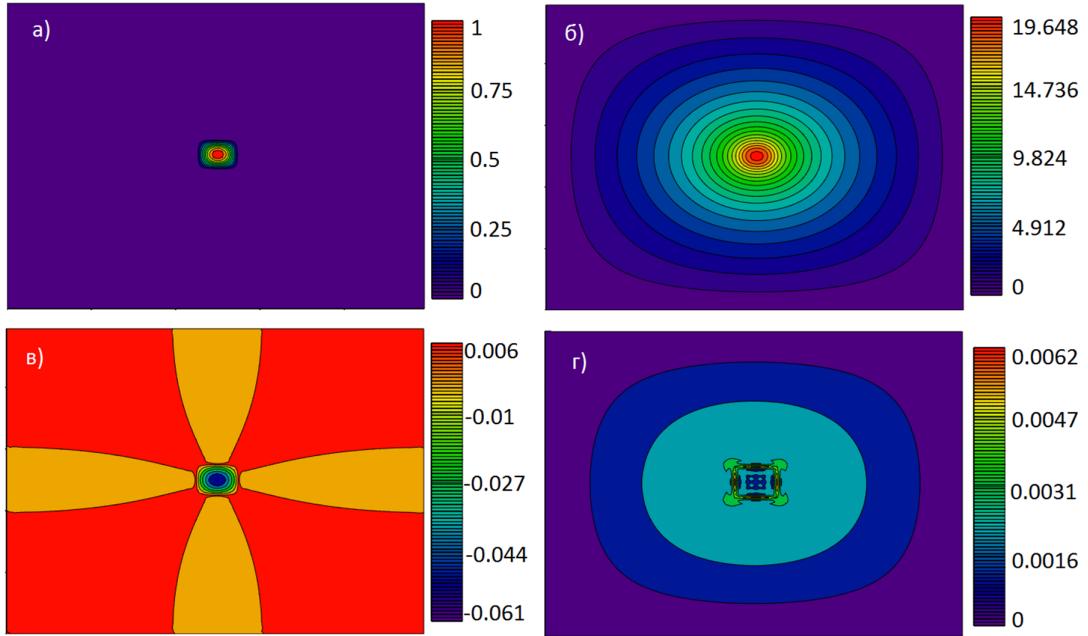


Рис. 8. Функция правой части (а), численное решение поставленной задачи (б) и поля, полученные как разность между аналитическим и численным решением для схем второго (в) и четвертого порядков точности (г)

Следует сказать, что для двумерной задачи Пуассона схемы четвертого порядка точности для данной модельной задачи в 10 раз точнее, чем второго.

## Заключение

Настоящая работа является логическим продолжением работы [10] в которой описана построенная библиотека итерационных методов, предназначенных для решения

сеточных уравнений с самосопряженными и несамосопряженными операторами при помощи схем повышенного порядка точности, учитывающими заполненности ячеек на многопроцессорной вычислительной системе. В общем случае при решении прикладных задач нельзя утверждать, что повышение порядка погрешности аппроксимации гарантирует увеличение точности расчета. В работе обоснована целесообразность перехода к схемам повышенного порядка точности при решении прикладных задач и из полученных оценок нетрудно получить численные значения выигрышней во времени счета при использовании схем повышенного порядка точности. Выполнение данных работ соответствует выполняемым в последнее время научно-образовательным программам по развитию суперкомпьютерного образования в стране [11–13].

*Работа выполнена при частичной поддержке Задания №2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России.*

## Литература

1. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. Изд-во Лаборатория базовых знаний. 2003.
2. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. - 736 с.
3. Пинкевич В. Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Weyl'я// Изв. АН СССР. Сер. матем., 1940, том 4, выпуск 6, 521–528.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М. Наука, 1989.
5. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишкеня А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами// Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 11. С. 53-64.
6. Жалнин Р. В., Змитренко Н. В., Ладонкина М. Е., Тишкун В. Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Матем. моделирование, 2007, 19:10, 61–66.
7. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов//Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 12. С. 65-82.
8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе// Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15. № 4. С. 610-620.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики, Наука, М., 1988.
10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Семенякина А.А., Никитина А.В. Параллельная реализация задач транспорта веществ и восстановления донной поверхности на основе схем повышенного порядка точности // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16. № 2. С. 256-267.
11. Антонов А.С., Артемьева И.Л., Бухановский А.В., Воеводин В.В., Гергель В.П., Демкин В.П., Коньков К.А., Крукиер Л.А., Попова Н.Н., Соколинский Л.Б., Сухинов

- А.И. Проект "Суперкомпьютерное образование": 2012 год// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. № 1-1. С. 12-16.
12. Воеводин Вл.В., Гергель В.П., Соколинский Л.Б., Демкин В.П., Попова Н.Н., Бухановский А.В. Развитие системы суперкомпьютерного образования в России: текущие результаты и перспективы// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. № 4-1. С. 268-274.
13. Антонов А.С., Артемьева И.Л., Бухановский А.В., Воеводин Вл.В., Гергель В.П., Демкин В.П., Коньков К.А., Крукиер Л.А., Попова Н.Н., Соколинский Л.Б., Сухинов А.И. Проект «Суперкомпьютерное образование»: 2012 год// Научный сервис в сети Интернет: поиск новых решений Труды Международной суперкомпьютерной конференции. Москва, 2012. С. 4-8.

Сухинов Александр Иванович, д.ф.-м.н., Декан факультета физики, математики, информатики Таганрогского института имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ)» (Таганрог, Российская Федерация), sukhinov@gmail.com

Чистяков Александр Евгеньевич, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник Научно-исследовательского института многопроцессорных вычислительных систем им. А.В. Каляева Южного Федерального Университета (Таганрог, Российская Федерация), cheese\_05@mail.ru

Якобовский Михаил Владимирович д.ф.-м.н., заведующий сектором «Программное обеспечение вычислительных систем и сетей» Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), lira@imamod.ru

---

## ACCURACY OF THE NUMERICAL SOLUTION OF THE EQUATIONS OF DIFFUSION - CONVECTION USING THE DIFFERENCE SCHEMES OF SECOND AND FOURTH ORDER APPROXIMATION ERROR

**A.I. Sukhinov**, Taganrog Institute of A.P. Chekhov (branch) of the Rostov State University of Economics (RINH) (Taganrog, Russian Federation),

**A.E. Chistakov**, Scientific research institute of multiprocessing computing systems of A.V. Kalyaeva Southern Federal University (Taganrog, Russian Federation),

**M. V. Iakobovskii**, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS (Moscow, Russian Federation)

The paper deals with the scheme of the second and fourth order approximation error for solving convection-diffusion problems. To model initial boundary value problem in the case when the functions of the right and the initial condition can be represented by finite sums of Fourier series in the trigonometric basis, we investigated the accuracy of difference schemes. It was found that the accuracy of the numerical solution depends on the number of units attributable to half the wavelength corresponding to the most high frequency harmonics in the final sum of the Fourier series, necessary to describe the behavior of calculated objects. The dependence of the diffusion approximation error terms difference schemes of second and fourth order of accuracy of the number of nodes. The comparison of the calculation results of two-dimensional convection-diffusion problems and tasks of the Poisson-based schemes of the second and fourth order accuracy. In the

expediency of transition to a scheme of high accuracy for solving applied problems of the estimates and is easy to obtain the numerical values of the gain in computation time by using schemes of higher order accuracy.

*Keywords: accuracy difference schemes , convection-diffusion equation , approximation error*

## References

1. N.S. Boaster, N.P. Zhidkov, G.M. Kobelkov Numerical methods. Publishing house Lab basic knowledge. 2003 .
2. O.A. Ladyzhenskaya , V.A. Solonnikov , N.N. Ural'tseva Linear and quasi-linear parabolic equation. M .: Nauka , 1967 - 736 p.
3. V.T. Pinkevich On the order of the remainder term of the Fourier series of functions differentiable in the sense of Weyl'ya // Math. USSR Academy of Sciences . Ser . Mat., 1940 , Volume 4 , Issue 6 , pp 521-528 .
4. A.A. Samarskii The theory of difference schemes. M. Science , 1989 .
5. A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, A.V. Shishenya An error estimate for the solution of the diffusion equation based on schemes with weights // Mathematical modeling. 2013. T. 25. № 11. C. 53-64.
6. R.V. Zhalnin, N.V. Zmitrenko, M.E. Ladonkina, V.F. Tishkin Numerical simulation of Richtmyer - Meshkov using schemes of high order of accuracy // Mat. Simulation, 2007, 19:10, 61–66.
7. A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.A. Protsenko Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs // Mathematical modeling. 2013. T. 25. № 12. C. 65-82.
8. A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.A. Protsenko Mathematical modeling of sediment transport in coastal water systems to multiprocessor computer system // Computational Methods and Programming. 2014. T. 15. № 4. pp 610-620 .
9. V.S. Vladimirov Equations of mathematical physics, Nauka, Moscow, 1988.
10. A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, A.A. Semenyakin, A.V. Nikitin Parallel implementation of the tasks of transport agents and the bottom surface of the restoration on the basis of schemes of increased order of accuracy // Computational Methods and Programming. 2015. T. 16. № 2. pp 256-267 .
11. A.S. Antonov, I.L. Artemev, A.V. Boukhanovsky and etc. The project "Supercomputer Education": 2012 // Bulletin of the Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky. 2013. № 1-1. pp 12-16 .
12. Vl.V.Voevodin, VP Gergel, L.B. Sokolinskii, V.P. Demkin, N.N. Popova, A.V. Boukhanovsky Development of Supercomputer Education in Russia: current results and prospects // Bulletin of the Nizhny Novgorod University. NI Lobachevsky. 2012. № 4-1. pp 268-274.
13. A.S. Antonov, I.L. Artemev, A.V. Boukhanovsky and etc. The project "Supercomputer Education": 2012 // Scientific service on the Internet: the search for new solutions Proceedings of the International Supercomputer Conference. Moscow, 2012. pp 4-8.