



# ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА

2016  
Т. 5, № 1

ISSN 2305-9052

СЕРИЯ

## «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»

Решением ВАК включен в Перечень научных изданий,  
в которых должны быть опубликованы результаты диссертаций  
на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук

Учредитель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный  
университет» (национальный исследовательский университет)

Тематика журнала:

- Вычислительная математика и численные методы
- Математическое программирование
- Распознавание образов
- Вычислительные методы линейной алгебры
- Решение обратных и некорректно поставленных задач
- Доказательные вычисления
- Численное решение дифференциальных и интегральных уравнений
- Исследование операций
- Теория игр
- Теория аппроксимации
- Информатика
- Математическое и программное обеспечение высокопроизводительных вычислительных систем
- Системное программирование
- Перспективные многопроцессорные архитектуры
- Облачные вычисления
- Технология программирования
- Машинная графика
- Интернет-технологии
- Системы электронного обучения
- Технологии обработки баз данных и знаний
- Интеллектуальный анализ данных

### Редакционная коллегия

С.М. Абдуллаев, д.г.н., проф.  
А.В. Панюков, д.ф.-м.н., проф.  
Л.Б. Соколинский, д.ф.-м.н., проф., *отв. редактор*  
И.И. Стародубов, *техн. секретарь*  
В.П. Танана, д.ф.-м.н., проф., *зам. отв. редактора*  
М.Л. Цымблер, к.ф.-м.н., доц., *отв. секретарь*

### Редакционный совет

А. Андряк, PhD, профессор (Германия)  
В.И. Вердышев, д.ф.-м.н., акад. РАН, *председатель*

В.В. Воеводин, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН  
Дж. Донгарра, PhD, профессор (США)  
С.В. Зыкин, д.т.н., профессор  
Д. Маллманн, PhD, профессор (Германия)  
А.Н. Томилин, д.ф.-м.н., профессор  
В.Е. Третьяков, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН  
В.И. Ухоботов, д.ф.-м.н., профессор  
В.Н. Ушаков, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН  
М.Ю. Хачай, д.ф.-м.н., профессор  
П. Шумяцки, PhD, профессор (Бразилия)  
Е. Ямазаки, PhD, профессор (Бразилия)



# BULLETIN

**OF THE SOUTH URAL      2016**  
**STATE UNIVERSITY      vol. 5, no. 1**

**SERIES**

**“COMPUTATIONAL  
MATHEMATICS AND SOFTWARE  
ENGINEERING”**

**ISSN 2305-9052**

---

**Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.  
Seriya “Vychislitel'naya Matematika i Informatika”**

---

## South Ural State University

The scope of the journal:

- Numerical analysis and methods
- Mathematical optimization
- Pattern recognition
- Numerical methods of linear algebra
- Reverse and ill-posed problems solution
- Computer-assisted proofs
- Numerical solutions of differential and integral equations
- Operations research
- Game theory
- Approximation theory
- Computer science
- High performance computing
- System software
- Advanced multiprocessor architectures
- Cloud computing
- Software engineering
- Computer graphics
- Internet technologies
- E-learning
- Database processing
- Data mining

### Editorial Board

**S.M. Abdullaev**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)  
**A.V. Panyukov**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)  
**L.B. Sokolinsky**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)  
**I.I. Starodubov**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)  
**V.P. Tanana**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)  
**M.L. Zymbler**, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)

### Editorial Council

**A. Andrzejak**, Heidelberg University (Germany)  
**V.I. Berdyshev**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS (Yekaterinburg, Russia)  
**J. Dongarra**, University of Tennessee (USA)  
**M.Yu. Khachay**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS (Yekaterinburg, Russia)  
**D. Mallmann**, Julich Supercomputing Centre (Germany)  
**P. Shumyatsky**, University of Brasilia (Brazil)  
**A.N. Tomilin**, Institute for System Programming of the RAS (Moscow, Russia)  
**V.E. Tretyakov**, Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)  
**V.I. Ukhobotov**, Chelyabinsk State University (Chelyabinsk, Russia)  
**V.N. Ushakov**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS (Yekaterinburg, Russia)  
**V.V. Voevodin**, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)  
**Y. Yamazaki**, Federal University of Pelotas (Brazil)  
**S.V. Zykin**, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the RAS (Omsk, Russia)

# Содержание

## Вычислительная математика

АСИМПТОТИКА МАГНЕТОСОПРОТИВЛЕНИЯ А.А. Ершов, Ю.А. Крутова .....	5
ОБ ОЦЕНИВАНИИ СОСТОЯНИЙ МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМ ПРИ ГРУППОВОМ ДВИЖЕНИИ Е.К. Костоусова .....	13
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ МЕТОД ОБЪЕДИНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ ПРОГРАММ ПО СБОРКЕ ГЕНОМА К.В. Романенков, А.Н. Сальников, А.В. Алексеевский .....	24
О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЭТОГО МЕТОДА В.П. Танана, А.И. Сидикова .....	35
ТОЧНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, М.В. Якобовский .....	47

## Дискретная математика и математическая кибернетика

АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ В.И. Ухоботов, Е.С. Михайлова .....	63
--	----

## Информатика, вычислительная техника и управление

О ПОСТРОЕНИИ РЕЙТИНГА УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ МЕТОДОМ СОБСТВЕННЫХ СОСТОЯНИЙ В.В. Мокеев, М.С. Нелюбина .....	69
СРАВНЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ИСТИННОСТИ ЗАПРОСОВ К РЕЛЯЦИОННОЙ БАЗЕ ДАНЫХ С.В. Мосин .....	85

# Contents

## Computational Mathematics

ASIMPTOTICS OF MAGNETORESISTANCE A.A. Ershov, J.A. Krutova .....	5
ON STATE ESTIMATION FOR MULTI-AGENT MOTION: DISCRETE-TIME SYSTEMS E.K. Kostousova .....	13
PARALLEL MERGING METHOD TO INTEGRATE DIFFERENT GENOME ASSEMBLIES K.V. Romanenkov, A.N. Salnikov, A.V. Alexeevski .....	24
ON SOLUTION OF SOLID STATE PHYSICS INVERSE PROBLEM BY MEANS OF A. N. TIKHONOV'S REGULARIZATION METHOD AND ESTIMATION OF THE ERROR OF THIS METHOD V.P. Tanana, A.I. Sidikova .....	35
ACCURACY OF THE NUMERICAL SOLUTION OF THE EQUATIONS OF DIFFUSION-CONVECTION USING THE DIFFERENCE SCHEMES OF SECOND AND FOURTH ORDER APPROXIMATION ERROR A.I. Sukhinov, A.E. Chistakov, M.V. Iakobovskii .....	47

## Discrete Mathematics and Mathematical Cybernetics

THE ANALYSIS OF THE MECHANISM OF COLLECTIVE BEHAVIOUR BASED ON FUZZY LOGIC V.I. Ukhobotov, E.S. Mihailova .....	63
--	----

## Computer Science, Engineering and Control

ON DETERMINING OF RATING OF SUSTAINED ENTERPRISE DEVELOPMENT BY EIGENSTATE METHOD V.V. Mokeyev, M.S. Nelyubina .....	69
TRUTH SPACE COMPARISON OF RELATIONAL DATABASE QUERIES S.V. Mosin .....	85

## АСИМПТОТИКА МАГНЕТОСОПРОТИВЛЕНИЯ

А.А. Ершов, Ю.А. Крутова

Найдена асимптотическая формула, выражающая электрическое сопротивление кристалла изотропного полупроводника в магнитном поле и подключенного с помощью малых контактов. Для моделирования электрического потенциала использовалось решение краевой задачи для эллиптического уравнения с косою производной на границе.

*Ключевые слова:* магнетосопротивление, потенциал электрического поля, электрическое сопротивление, магнитное поле, асимптотическое разложение, уравнение Лапласа, косою производная, краевая задача.

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Ершов А.А., Крутова Ю.А. Асимптотика магнетосопротивления // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 5–12. DOI: 10.14529/cmse160101.

### Введение

Магнетосопротивление (*магниторезистивный эффект*) — это изменение электрического сопротивления материала в магнитном поле [1]. Математические модели, позволяющие рассчитать магнетосопротивление, зависят от свойств материала и типа проводимости. Мы будем использовать математическую модель, приведенную Н.Н. Поляковым в работе [2] для моделирования электрического потенциала образца изотропного полупроводника прямоугольной формы при протекании через него электрического тока в магнитном поле. В этой работе были проведены эксперименты по следующей схеме (рис. 1).

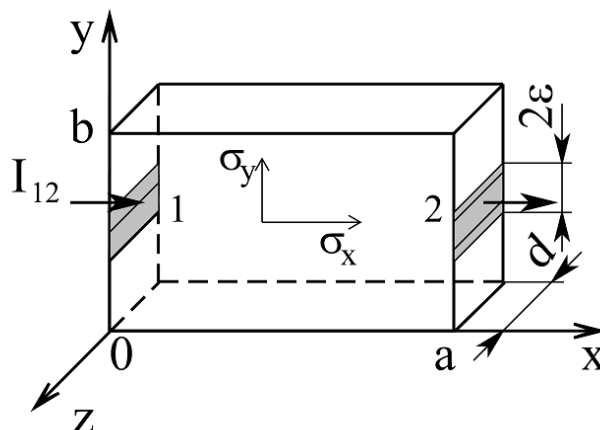


Рис. 1. Схема эксперимента

Образец прямоугольной формы вырезан параллельно кристаллографическим плоскостям из монокристалла арсенида кадмия. По торцам образца расположены контакты 1 и 2, через которые пропускается ток  $I_{12}$ . Кроме того, весь образец помещен в магнитное поле с индукцией  $B_z$ , которое направлено перпендикулярно плоскости образца. Данная схема применяется в стандартной методике Ван дер Поля по измерению коэффициента Холла анизотропных кристаллов и пленок прямоугольной формы. При этом

для моделирования электрического потенциала  $\phi(x, y)$  при постоянном токе  $I_{12}$  и в установившемся режиме Н.Н. Поляковым использовалось решение следующей краевой задачи.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < d, \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{x=0,a} = \begin{cases} -\frac{I_{12}}{\sigma_x 2\varepsilon d}, & y \in \left( \frac{b}{2} - \varepsilon, \frac{b}{2} + \varepsilon \right), \\ 0, & y \in \left( b, \frac{b}{2} - \varepsilon \right) \cup \left( \frac{b}{2} + \varepsilon, b \right), \end{cases} \\ \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} - \gamma_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_{y=0,a} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\gamma_x = \sigma_x R_z B_z$ ,  $\gamma_y = \sigma_y R_z B_z$ ;  $I_{12}$  — ток, протекающий через токовые контакты 1 и 2;  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  — компоненты тензора электропроводимости;  $a$ ,  $b$ ,  $d$  — длина, ширина и толщина образца;  $2\varepsilon$  — ширина токовых контактов;  $R_z$  — компонента тензора Холла при условии, что вектор плотности тока лежит в плоскости  $xOy$ , и поперечное магнитное поле с индукцией  $B_z$  направлено вдоль оси  $Oz$ .

Решение данной краевой задачи рассматривается нами в классе функций, бесконечно дифференцируемых внутри области и непрерывных вплоть до границы области. В работе Н.Н. Полякова [2] указано, что решение данной задачи методом Фурье в комплексной форме довольно громоздко (и в то же время явный вид решения не приведен), поэтому мы приведем другое, более простое решение.

Отметим, что данная модель применима при достаточно слабом магнитном поле и малых контактах, поскольку, например, плотность тока по сечению контакта не является равномерной, а имеет довольно сложный характер (см., например, [3]).

Нашей задачей является отыскание асимптотики электрического сопротивления прямоугольного образца в магнитном поле при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Также отметим, что в случае отсутствия магнитного поля задача эффективного вычисления электрического сопротивления образца с малыми контактами рассматривалась различными методами в двумерном случае в работах [2, 4–6], в трехмерном случае в работах [7–10] и многих других.

В разделе 1 рассмотрен метод Фурье для краевой задачи с косой производной, которым получено решение задачи (1). Раздел 2 содержит вычисление самого магнетосопротивления как функционала от решения задачи и его асимптотику. В заключении подводятся итоги проведенного исследования и обсуждаются направления будущих работ.

## 1. Решение краевой задачи

Решим краевую задачу (1) с помощью метода Фурье. Обозначим через  $\gamma = \sqrt{\frac{\sigma_y}{\sigma_x}}$ . Тогда  $\gamma_y = \gamma^2 \gamma_x$ .

Будем вначале искать решение в виде произведения  $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$ . Подставим его в уравнение

$$X''(x)Y(y) + \gamma^2 X(x)Y''(y) = 0$$

и разделим переменные

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{\gamma^2 Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Здесь  $\lambda$  — некоторая неопределенная пока постоянная. Подставим  $\phi(x, y) = X(x)Y(y)$  в граничные условия задачи (1):

$$X(x)Y'(0) - \gamma_x X'(x)Y(0) = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$X'(x) = \mu X(x),$$

где  $\mu = \frac{Y'(0)}{\gamma_x Y(0)}$  — некоторая постоянная.

Таким образом, одновременно выполняется

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X'(x) = \mu X(x). \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} X''(x) = \frac{\lambda}{\mu} X'(x), \\ X''(x) = \mu X'(x). \end{cases}$$

Отсюда,

$$\lambda = \mu^2.$$

Аналогичными действиями получим следующую задачу Штурма—Лиувилля для  $Y(y)$ :

$$\begin{cases} Y''(y) = -\frac{\mu^2}{\gamma^2} Y(y), \\ Y'(0) = \gamma_x \mu Y(0), \\ Y'(b) = \gamma_x \mu Y(b). \end{cases} \quad (2)$$

Ненулевыми решениями задачи (2) являются

$$Y_n(y) = \cos\left(\frac{\pi n}{b} y + A\right), \quad n \in \mathbb{Z},$$

где  $A = -\arctg(\gamma_x \gamma)$ .

Соответственно, функции

$$X_n(x) = e^{\gamma \frac{\pi n}{b} x}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Общее решение задачи (1) можно искать в виде

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & B_0 + A_0(x + \gamma_x y) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left( e^{\gamma \frac{\pi n}{b} x} \cos\left(\frac{\pi n}{b} y + A\right) + B_n e^{-\gamma \frac{\pi n}{b} x} \cos\left(\frac{\pi n}{b} y - A\right) \right). \end{aligned}$$

Поскольку  $\gamma_y = \gamma^2 \gamma_x$ ,  $\sin A = -\gamma_x \gamma \cos A$ , то

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} = A_0(1 + \gamma_x \gamma_y) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma \frac{\pi n}{b} \left( (1 + \gamma_x \gamma_y) e^{\gamma \frac{\pi n}{b} x} + B_n (1 - \gamma_x \gamma_y) e^{-\gamma \frac{\pi n}{b} x} \right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) \cos A.$$

Для того чтобы выполнялось равенство

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{x=0} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{x=a},$$

положим  $B_n = \frac{1 + \gamma_x \gamma_y}{1 - \gamma_x \gamma_y} e^{\gamma \frac{\pi n}{b} a}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{x=0} &= \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} + \gamma_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \Big|_{x=a} = \\ &= A_0 (1 + \gamma_x \gamma_y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \gamma \frac{\pi n}{b} \frac{1 + \gamma_x \gamma_y}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}} \left( 1 + e^{\gamma \frac{\pi n}{b} a} \right) \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right), \end{aligned}$$

учитывая, что  $\cos A = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}}$ .

Обозначим  $C_0 = A_0 (1 + \gamma_x \gamma_y)$ ,  $C_n = A_n \gamma \frac{\pi n}{b} \frac{1 + \gamma_x \gamma_y}{\sqrt{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}} \left( 1 + e^{\gamma \frac{\pi n}{b} a} \right)$ . Тогда на отрезке

$y \in [0, b]$  будем иметь равенство

$$C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) = \begin{cases} -\frac{I_{12}}{\sigma_x 2 \varepsilon d}, & y \in \left(\frac{b}{2} - \varepsilon, \frac{b}{2} + \varepsilon\right), \\ 0, & y \in \left[0, \frac{b}{2} - \varepsilon\right) \cup \left(\frac{b}{2} + \varepsilon, b\right]. \end{cases}$$

Отсюда,

$$C_0 = -\frac{I_{12}}{\sigma_x b d},$$

$$C_n = -\frac{I_{12}}{\sigma_x 2 \varepsilon d} \cdot \frac{2}{b} \int_{b/2-\varepsilon}^{b/2+\varepsilon} \cos\left(\frac{\pi n}{b} y\right) dy = -\frac{I_{12}}{\sigma_x 2 \varepsilon d} \cdot \frac{4}{\pi n} \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{b} \varepsilon\right).$$

Поскольку  $\cos(\pi m) = (-1)^m$ , то

$$C_{2m} = -\frac{I_{12}}{\sigma_x \varepsilon d} \cdot \frac{(-1)^m}{\pi m} \sin\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right).$$

$$C_{2m+1} = 0.$$

Таким образом,

$$A_0 = -\frac{I_{12}}{\sigma_x b d} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_x \gamma_y},$$

$$A_{2m} = -\frac{I_{12}}{\sigma_x \varepsilon d} \cdot \frac{(-1)^m b}{2 \gamma \pi^2 m^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \gamma_x^2 \gamma_y^2}}{1 + \gamma_x \gamma_y} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right)}{1 + e^{\gamma \frac{2\pi m}{b} a}},$$

$$A_{2m+1} = 0.$$

И окончательно получаем, что

$$\phi(x, y) = B_0 - \frac{I_{12}}{\sigma_x b d} \cdot \frac{1}{1 + \gamma_x \gamma_y} (x + \gamma_x y) -$$



$$-\frac{I_{12}}{\sigma_x \varepsilon d} \frac{\sqrt{1+\gamma_x^2 \gamma_y^2}}{1+\gamma_x \gamma_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n b}{2\gamma \pi^2 m^2} \cdot \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right)}{1+e^{\gamma \frac{2\pi m}{b} a}} \left( e^{\gamma \frac{2\pi m}{b} x} \cos\left(\frac{2\pi m}{b} y + A\right) + \right. \quad (3)$$

$$\left. + \frac{1+\gamma_x \gamma_y}{1-\gamma_x \gamma_y} e^{\gamma \frac{2\pi m}{b} (a-x)} \cos\left(\frac{\pi n}{b} y - A\right) \right).$$

где  $A = -\arctg(\gamma_x \gamma_y)$ ,  $B_0$  — произвольная аддитивная постоянная.

Отметим, что полученный ряд равномерно сходится при  $0 \leq x \leq a$  и  $0 \leq y \leq b$ , а каждое его слагаемое удовлетворяет уравнению из краевой задачи (1). Отсюда следует, что мы действительно построили решение краевой задачи (1) в классе функций

$$C^\infty(\{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}) \cap C(\{x, y : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}).$$

## 2. Вычисление асимптотики магнетосопротивления

Используя полученное нами решение (3), вычислим величину выделяемой мощности по формуле

$$W = d \cdot \int_0^a \int_0^b \left( \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \sigma_x + \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 \sigma_y \right) dy dx =$$

$$= \frac{a I_{12}^2}{\sigma_x b d} \frac{1}{1+\gamma_x \gamma_y} + \frac{2 I_{12}^2}{d \pi \sqrt{\sigma_x \sigma_y}} \left( \frac{1+\gamma_x^2 \gamma_y^2}{1-\gamma_x^2 \gamma_y^2} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right) \operatorname{th}\left(\gamma \frac{\pi m}{b} a\right)}{\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right)^2 m}.$$

Из последнего равенства легко получить выражение для электрического сопротивления прямоугольной пластины в магнитном поле:

$$R = \frac{W}{I_{12}^2} = \frac{a}{\sigma_x b d} \frac{1}{1+\gamma_x \gamma_y} +$$

$$+ \frac{2 I_{12}^2}{d \pi \sqrt{\sigma_x \sigma_y}} \left( \frac{1+\gamma_x^2 \gamma_y^2}{1-\gamma_x^2 \gamma_y^2} \right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right) \operatorname{th}\left(\gamma \frac{\pi m}{b} a\right)}{\left(\frac{2\pi m}{b} \varepsilon\right)^2 m}. \quad (4)$$

Заметим, что ряд (4) имеет сложную зависимость от малого параметра  $\varepsilon$ : при стремлении  $\varepsilon$  к нулю он расходится как гармонический. Однако, в работах [4] и [6] методом замены ряда на интеграл ([11, гл.2], [12, гл.4, §11]) уже была получена полная асимптотика суммы следующего ряда при  $\mu \rightarrow 0$ :

$$S(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\mu n)}{(\mu n)^2} \frac{\operatorname{th}(\lambda n)}{n} = \ln \frac{1}{2\mu} + \frac{3}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda n}}{n \cdot \operatorname{ch}(\lambda n)} +$$

$$+ \left( \frac{1}{36} + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n e^{-\lambda n}}{\operatorname{ch}(\lambda n)} \right) \mu^2 + \left( \frac{1}{2700} - \frac{2}{45} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 e^{-\lambda n}}{\operatorname{ch}(\lambda n)} \right) \mu^4 + O(\mu^6).$$

Таким образом,

$$R = \frac{a}{\sigma_x b d} \frac{1}{1+\gamma_x \gamma_y} +$$

$$+ \frac{2}{d\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y}} \left( \frac{1+\gamma_x^2\gamma_y^2}{1-\gamma_x^2\gamma_y^2} \right)^2 \left( \ln \frac{e^{3/2}b}{4\pi\varepsilon} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\pi a}{b}\gamma m}}{n \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{\pi a}{b}\gamma m\right)} \right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{b^2}\right).$$

## Заключение

В статье рассмотрены сложности моделирования магниторезистивного эффекта. Решение приведенной задачи (1) и соответствующий функционал, выражающий магнетосопротивление, могут быть найдены численно. Однако, в таком случае его зависимость от параметров остается неясной. В данной работе мы выписали явное решение с помощью метода Фурье, а затем вычислили по нему электрическое сопротивление в виде суммы довольно сложного ряда. Опираясь на недавно полученные результаты, нам удалось найти асимптотику его суммы, в результате чего получена простая асимптотическая формула, наглядно показывающая зависимость электрического сопротивления проводника от величины напряженности магнитного поля и сечения контактов. Используя данную формулу, нетрудно вычислить и величину магнетосопротивления, которая является изменением электрического сопротивления под воздействием магнитного поля. Отметим, что при увеличении напряженности магнитного поля электрическое сопротивление

растет из-за главного члена асимптотики  $\frac{2}{d\pi\sqrt{\sigma_x\sigma_y}} \left( \frac{1+\gamma_x^2\gamma_y^2}{1-\gamma_x^2\gamma_y^2} \right)^2 \ln \frac{1}{\varepsilon}$ , что и наблю-

дается в большинстве случаев за редким исключением так называемого отрицательного магнетосопротивления.

В дальнейшем было бы интересно найти такие конфигурации проводника и контактов, при которых бы магнетосопротивление было бы отрицательным, или показать, что такое невозможно в данной модели.

*Работа выполнена при поддержке гранта РНФ (проект 15-11-10018).*

## Литература

1. Киреев П.С. Физика полупроводников. М.: Высшая школа. Изд-во 2, доп, 1975. 584 с.
2. Поляков Н.Н. Об измерении коэффициент Холла электропроводности анизотропных проводников // Заводская лаборатория. 1989. № 3. С. 20–22.
3. Грищенко А.Ю. Моделирование распределения плотности тока в сложном неоднородном проводнике. Часть 1 // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. 2006. № 29. С. 87–94.
4. Ершов А.А. Краевая эллиптическая задача с дельтообразной производной на границе // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50. № 3. С. 479–485.
5. Ершов А.А. К задаче об измерении электропроводности // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53. № 6. С. 1004–1007.
6. Ершов А.А. Асимптотика решения уравнения Лапласа со смешанными условиями на границе // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51. № 7. С. 1064–1080.
7. Хольм Р. Электрические контакты. М.: Иностранная литература, 1961. 314 с.

8. Павлейно О.М., Павлов В.А., Павлейно М.А. Уточнение границ применимости хольмовского приближения для расчета сопротивления электрических контактов // Электронная обработка материалов. 2010. Т. 46. № 5. С. 56–62.
9. Затовский В.Г., Минаков Н.В. Экспериментальное моделирование сопротивления стягивания // Электрические контакты и электроды. 2010. № 10. С. 132–139.
10. Филиппов В.В., Поляков Н.Н. Распределения потенциала в анизотропных проводниковых кристаллах и пленки при измерении электропроводности и коэффициента Холла // Вести высших учебных заведений черномозья. 2011. № 2(24). С. 6–10.
11. Ильин А.М., Данилин А.Р. Асимптотические методы в анализе. М.: Физматлит, 2009. 222 с.
12. Федорюк М.В. Асимптотика, интегралы и ряды. М.: Наука, 1987. 544 с.

Ершов Александр Анатольевич, к.ф.-м.н., научный сотрудник отдела динамических систем, Институт математики и механики имени Н.Н. Красовского Уральского отделения РАН (Екатеринбург, Российская Федерация), ale10919@yandex.ru.

Крутова Юлия Александровна, студент математического факультета, Челябинский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), lulia\_74rus@mail.ru.

*Поступила в редакцию 4 июля 2015 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series “Computational Mathematics and Software Engineering”*  
*2016, vol. 5, no. 1, pp. 5–12*

---

DOI: 10.14529/cmse160101

## ASIMPTOTICS OF MAGNETORESISTANCE

**A.A. Ershov**, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural branch of RAS, Ekaterinburg, Russian Federation

**J.A. Krutova**, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

An asymptotic formula expressing the electric the resistance of the isotropic crystal semiconductor in a magnetic field and connected through small contacts was found. For modeling of the electric potential the solution of boundary value problems for elliptic equations with oblique derivative on the boundary was used.

*Keywords: magnetoresistance, electric potential, electrical resistance, magnetic field, asymptotic expansion, Laplace equation, oblique derivative, boundary value problem.*

### FOR CITATION

Ershov A.A., Krutova J.A. Asimptotics of Magnetoresistance. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 1. pp. 5–12. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160101.

## References

1. Kireev P.S. *Fizika poluprovodnikov* [Physics of semiconductors]. Moscow, Higher school, 1975. 584 p. (in Russian)

2. Polyakov N.N. Ob izmerenii koeffitsient Kholla elektroprovodimosti anizotropnykh provodnikov [The measurement of Hall coefficient of conductivity of anisotropic conductors]. *Zavodskaya laboratoriya* [Factory laboratory]. 1989. no. 3. pp. 20–22. (in Russian)
3. Grishentsev A.Yu. Modelirovanie raspredeleniya plotnosti toka v slozhnom neodnorodnom provodnike. Chast' 1 [Simulation of current density distribution in complex inhomogeneous conductor. Part 1]. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik SPbGU ITMO* [Scientific and technical Bulletin of SPbSU ITMO]. 2006. no. 29. pp. 87–94. (in Russian)
4. Ershov A.A. Asymptotics of the solution to the Neumann problem with a delta-function-like boundary function. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2010. vol. 50, no. 3. pp. 457–463. DOI: 10.1134/S0965542510030073.
5. Ershov A.A. On measurement of electrical conductivity // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2013. vol. 53. no. 6. pp. 823–826. DOI: 10.1134/S0965542513060079.
6. Ershov A.A. Asymptotics of the solution of Laplace's equation with mixed boundary conditions. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2011. vol. 51, no. 7. pp. 994–1010. DOI: 10.1134/S0965542511060066.
7. Holm R. *Electric contacts handbook*. Berlin, Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH, 1958. 522 p.
8. Pavleyno O.M., Pavlov V.A., Pavleyno M.A. Verification of the Boundaries of the Applicability of the Holm Approximation for the Calculation of the Resistance of Electric Contacts. *Surface Engineering and Applied Electrochemistry*. 2010. vol. 46, no. 5. pp. 440–446.
9. Zatovskiy V.G., Minakov N.V. Eksperimental'noe modelirovanie soprotivleniya styagivaniya [Experimental simulation of the resistance of the tightening]. *Elektricheskie kontakty i elektrody* [Electrical contacts and electrodes]. 2010. no. 10. pp. 132–139. (in Russian)
10. Filippov V.V., Polyakov N.N. Raspredeleniya potentsiala v anizotropnykh provodnikovykh kristallakh i plenki pri izmerenii elektroprovodimosti i koeffitsienta Kholla [The potential distribution in the anisotropic conductive crystals and films in the measurement of conductivity and Hall coefficient]. *Vesti vysshikh uchebnykh zavedeniy chernozem'ya* [News of higher educational institutions of Chernozem region]. 2011. no. 2(24). pp. 6–10. (in Russian)
11. Il'in A.M., Danilin A.R. *Asimptoticheskie metody v analize* [Asymptotic methods in analysis]. M.: Fizmatlit, 2009. 222 p. (in Russian)
12. Fedoryuk M.V. *Asimptotika, integraly i ryady* [Asymptotics, integrals and series]. M.: Nauka, 1987. 544 p. (in Russian)

*Received July 4, 2015.*

# ОБ ОЦЕНИВАНИИ СОСТОЯНИЙ МНОГОШАГОВЫХ СИСТЕМ ПРИ ГРУППОВОМ ДВИЖЕНИИ<sup>1</sup>

*Е.К. Костоусова*

Рассматривается задача достижимости для набора однотипных линейных многошаговых управляемых объектов, совершающих так называемое групповое движение, при котором объекты попарно не сближаются, но и не слишком отдаляются друг от друга. Приводятся некоторые свойства множеств достижимости; предлагаются алгоритмы построения внешних полиэдральных (параллелепипедозначных) оценок для них.

*Ключевые слова:* множества достижимости, многошаговые системы, групповое движение, полиэдральные оценки.

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Костоусова Е.К. Об оценивании состояний многошаговых систем при групповом движении // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 13–23. DOI: 10.14529/cmse160102.

## Введение

Задача построения трубок траекторий (трубок достижимости) является одной из ключевых в гарантированной теории управления [4, 7, 9]. Работа посвящена задаче достижимости для набора из  $m$  однотипных линейных многошаговых управляемых объектов, совершающих так называемое групповое «движение» (используем этот термин не обязательно в механическом смысле), при котором объекты попарно не сближаются, но и не слишком отдаляются. Мотивация задач такого рода вытекает из активно развиваемой в последнее время теории управления групповым движением (см., например, [3, 8, 10]). Напомним, что поскольку практическое нахождение трубок траекторий даже для систем без условий группового движения может быть затруднительно, развиваются различные численные методы, в том числе методы оценивания множеств достижимости (МД) областями фиксированной формы, такими как эллипсоиды и параллелепипеды (см, например, [1, 2, 4–9, 11] и указанную там библиографию).

Статья организована следующим образом. В первом разделе дана постановка задачи. Во втором разделе приводятся некоторые свойства МД рассматриваемых систем. Оказывается, что МД полной системы могут быть, вообще говоря, невыпуклыми и несвязными, а трубка достижимости может быть представлена (подобно [9, разд. 11.2]) в виде системы ветвящихся трубок, где сечения ветвей являются выпуклыми политопами. В третьем разделе предлагаются алгоритмы построения некоторых внешних оценок на основе «элементарных» полиэдральных (параллелепипедозначных) оценок для результатов операций с параллелепипедами (описанных в [2, 6, 11] и дополненных оценками для объединения параллелепипедов). В заключении даны итоговые выводы.

## 1. Постановка задачи

Предполагается, что система состоит из  $m$  подсистем с фазовыми координатами  $x^j = (x^{j,1\top}, x^{j,2\top})^\top \in \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  (здесь  $\top$  — знак транспонирования,  $\mathbb{R}^n$  —  $n$ -мерное

<sup>1</sup>Статья написана по материалам доклада, представленного на XV Всероссийской конференции «Математическое программирование и приложения» (МПиП-2015), г. Екатеринбург, 2–6 марта 2015 г.

векторное пространство), и описывается соотношениями

$$x^j[k] = A^j[k] x^j[k-1] + B^j[k] u^j[k], \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (1)$$

$$x^j[0] \in \mathcal{P}_0^j; \quad u^j[k] \in \mathcal{R}^j[k], \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

$$\|x^{j,1}[k] - x^{l,1}[k]\|_\infty \geq \underline{\mu}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad j, l = 1, 2, \dots, m, \quad l > j; \quad (3)$$

$$\|x^{j,1}[k] - x^{l,1}[k]\|_\infty \leq \bar{\mu}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad j, l = 1, 2, \dots, m, \quad l > j. \quad (4)$$

Здесь  $n_1 > 0$ ,  $n_2 \geq 0$ ;  $A^j[k]$  и  $B^j[k]$  — известные матрицы,  $\det A^j[k] \neq 0$ ;  $u^j[k] \in \mathbb{R}^{n_u}$  — управления, стесненные геометрическими ограничениями из (2); множества  $\mathcal{P}_0^j \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$  и  $\mathcal{R}^j[k] \subset \mathbb{R}^{n_u}$  считаем параллелепипедами [2, 6]; формализация *условий группового движения* производится с помощью (3), (4), где  $0 < \underline{\mu} < \bar{\mu} \leq \infty$  — заданные значения, и нормы  $\|x\|_\infty$  ( $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  для вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ ), отличающейся от используемой в [3] евклидовой нормы. Условия (3) (*нижние ограничения*) означают, что траектории подсистем попарно не должны сближаться ближе, чем на положительное значение  $\underline{\mu}$  в смысле первой группы координат  $x^{j,1}$ , а условия (4) (*верхние ограничения*) — что, кроме того, не должны расходиться более, чем на  $\bar{\mu}$ , если это число принято конечным.

Введем расширенные векторы фазового состояния  $z = (x^1{}^\top, x^2{}^\top, \dots, x^m{}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{m(n_1+n_2)}$  и управления  $u = (u^1{}^\top, u^2{}^\top, \dots, u^m{}^\top)^\top \in \mathbb{R}^{mn_u}$  полной системы.

Множеством *достижимости* (МД)  $\mathcal{Z}[i]$  системы (1)–(4) в момент  $i \in \{0, 1, \dots, N\}$  называем множество всех тех точек  $z \in \mathbb{R}^{m(n_1+n_2)}$ , для каждой из которых существуют такие  $z[0]$  и  $u[\cdot]$ , удовлетворяющие (2), что порождаемое ими в силу (1) решение  $z[\cdot]$  будет удовлетворять условиям  $z[i] = z$  и (3)–(4) для  $k=0, 1, \dots, i$ . Многозначную функцию  $\mathcal{Z}[k]$ ,  $k=0, 1, \dots, N$ , называем по аналогии с [9] *трубкой достижимости* или *трубкой траекторий*  $\mathcal{Z}[\cdot]$ .

Рассмотрим следующие *задачи*:

- Описать множества достижимости  $\mathcal{Z}[k]$  и трубку достижимости  $\mathcal{Z}[\cdot]$ .
- Найти внешние параллелепипедозначные (короче, полиэдральные) оценки для них.

Напомним некоторые используемые нами понятия.

*Параллелепипедом*  $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$  называем множество  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(p, P, \pi) = \{x \mid x = p + \sum_{i=1}^n p^i \pi_i \xi_i, |\xi_i| \leq 1\}$ , где  $p \in \mathbb{R}^n$ ;  $P = \{p^i\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — неособая матрица ( $\det P \neq 0$ ) со столбцами  $p^i$ ,  $\|p^i\|_2 = 1$  (приведенное условие нормировки в терминах евклидовой нормы может быть опущено с целью упрощения формул);  $\pi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\pi \geq 0$  (векторные неравенства понимаем покомпонентно). Можно сказать, что  $p$  — центр параллелепипеда,  $P$  — матрица ориентации,  $p^i$  — направления,  $\pi_i$  — величины его «полуосей».

*Параллелотопом*  $\mathcal{P}[p, \bar{P}] \subset \mathbb{R}^n$  называем множество  $\mathcal{P} = \mathcal{P}[p, \bar{P}] = \{x \mid x = p + \bar{P}\zeta, \|\zeta\|_\infty \leq 1\}$ , где  $p \in \mathbb{R}^n$ , а матрица  $\bar{P} = \{\bar{p}^i\} \in \mathbb{R}^{n \times r}$  может быть неквадратной ( $r \leq n$ ), особой. Называем параллелотоп  $\mathcal{P}$  *невыврожденным*, если  $r = n$  и  $\det \bar{P} \neq 0$ .

*Полосой* или *m-полосой*  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m) \subset \mathbb{R}^n$  называем пересечение  $m$  *гиперполос*  $\Sigma^i$  (где  $1 < m \leq n$ , здесь  $m$  не связано с числом подсистем в (1)):

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(c, S, \sigma, m) = \bigcap_{i=1}^m \Sigma^i, \quad \Sigma^i = \Sigma(c_i, s^i, \sigma_i) = \{x \mid |x^\top s^i - c_i| \leq \sigma_i\}.$$

Здесь  $c \in \mathbb{R}^m$ ;  $S = \{s^i\} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  — матрица ранга  $m$  со столбцами  $s^i \in \mathbb{R}^n$ ;  $\sigma \in \mathbb{R}^m$ ,  $\sigma \geq 0$ . Векторы  $\pm s^i$  определяют нормали к гиперплоскостям, ограничивающим гиперполосу  $\Sigma^i$ .

Каждый параллелепипед — это параллелотоп:  $\mathcal{P}(p, P, \pi) = \mathcal{P}[p, \bar{P}]$ ,  $\bar{P} = P \operatorname{diag} \pi$ ; каждый невырожденный параллелотоп — это параллелепипед с  $P = \bar{P}$ ,  $\pi = e$ , где

$e = (1, 1, \dots, 1)^\top$ . Известно также, что при  $m = n$  полоса превращается в параллелепипед (см. формулы в [2, 6]).

## 2. Описание множеств достижимости

Несложно видеть, что полная система может быть записана в виде:

$$\begin{aligned} z[k] &= A[k] z[k-1] + B[k] u[k], \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ z[0] &\in \mathcal{P}_0; \quad u[k] \in \mathcal{R}[k]; \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ z[k] &\in \mathcal{Y}, \quad k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $A[k] = \text{diag}\{A^j[k]\}$  и  $B[k] = \text{diag}\{B^j[k]\}$  — блочные матрицы, составленные из матриц, фигурирующих в (1); параллелепипеды  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}[p_0, \bar{P}_0]$  и  $\mathcal{R}[k] = \mathcal{P}[r[k], \bar{R}[k]]$  (записанные для простоты обозначений в виде параллелотопов) определяются множествами  $\mathcal{P}_0^j = \mathcal{P}[p_0^j, \bar{P}_0^j]$  и  $\mathcal{R}^j[k] = \mathcal{P}[r^j[k], \bar{R}^j[k]]$  из (2):  $p_0 = (p_0^{1\top}, p_0^{2\top}, \dots, p_0^{m\top})^\top$ ,  $\bar{P}_0 = \text{diag}\{\bar{P}_0^j\}$ ,  $r[k] = (r^1[k]^\top, r^2[k]^\top, \dots, r^m[k]^\top)^\top$ ,  $\bar{R}[k] = \text{diag}\{\bar{R}^j[k]\}$ ; множество  $\mathcal{Y}$  определяется нижними и верхними ограничениями из условий группового движения:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \check{\mathcal{Y}} \cap \hat{\mathcal{Y}}; \\ \check{\mathcal{Y}} &= \{z = (x^1{}^\top, x^2{}^\top, \dots, x^m{}^\top)^\top \mid \|x^{j,1} - x^{l,1}\|_\infty \geq \underline{\mu}, \quad j, l = 1, 2, \dots, m, \quad l > j\}; \\ \hat{\mathcal{Y}} &= \{z = (x^1{}^\top, x^2{}^\top, \dots, x^m{}^\top)^\top \mid \|x^{j,1} - x^{l,1}\|_\infty \leq \bar{\mu}, \quad j, l = 1, 2, \dots, m, \quad l > j\} \end{aligned} \quad (6)$$

и задает фазовые ограничения (ФО) в системе (5).

Известно [4, § 18], что МД системы типа (5) удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{(0)}[0] &= \mathcal{P}_0; \\ \mathcal{Z}^{(0)}[k] &= A[k] \mathcal{Z}^{(0)}[k-1] + B[k] \mathcal{R}[k], \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ \mathcal{Z}[k] &= \mathcal{Z}^{(0)}[k] \cap \mathcal{Y}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

которые включают операции с множествами: линейное преобразование, сумму Минковского и пересечение. Точное построение МД для систем большой размерности даже в случае выпуклых ФО может быть достаточно затруднительно. В рассматриваемом же случае дополнительная трудность связана с невыпуклостью множеств  $\check{\mathcal{Y}}$  и  $\mathcal{Y}$ . Это приводит к тому, что МД могут быть, вообще говоря, не только невыпуклыми, но и несвязными.

Рассмотрим, что представляет собой пересечение выпуклого множества  $\mathcal{Z}^{(0)}$  с  $\mathcal{Y}$ .

Несложно заметить, что невыпуклое множество  $\check{\mathcal{Y}}$  представимо в следующем виде:

$$\check{\mathcal{Y}} = \bigcap_{j,l=1,2,\dots,m, l>j} \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n_1} \check{\mathcal{Y}}_i^{jl} \right), \quad \check{\mathcal{Y}}_i^{jl} = \{z \mid |x_i^{j,1} - x_i^{l,1}| \geq \underline{\mu}\}, \quad (8)$$

пересечение взято по всем различным парам подсистем, определяемых индексами  $j$  и  $l$ . Каждая из компонент пересечения есть объединение  $n_1$  множеств  $\check{\mathcal{Y}}_i^{jl}$ , каждое из которых есть в свою очередь объединение двух полупространств в  $\mathbb{R}^{m(n_1+n_2)}$  с обратными коллинеарными нормальными:  $\check{\mathcal{Y}}_i^{jl} = \check{\mathcal{Y}}_{(i,0)}^{jl} \cup \check{\mathcal{Y}}_{(i,1)}^{jl}$ , где  $\check{\mathcal{Y}}_{(i,0)}^{jl} = \{z \mid x_i^{j,1} - x_i^{l,1} \leq -\underline{\mu}\}$ , а  $\check{\mathcal{Y}}_{(i,1)}^{jl} = \{z \mid x_i^{j,1} - x_i^{l,1} \geq \underline{\mu}\}$ .

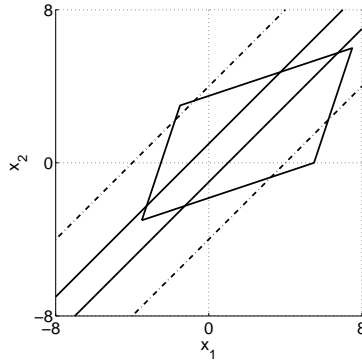
Аналогичную структуру имеет множество  $\mathcal{Y}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \bigcap_{j,l=1,2,\dots,m, l>j} \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n_1} \mathcal{Y}_i^{jl} \right), \quad \mathcal{Y}_i^{jl} = \{z \mid |x_i^{j,1} - x_i^{l,1}| \geq \underline{\mu}, \|x^{j,1} - x^{l,1}\|_\infty \leq \bar{\mu}\}, \\ \mathcal{Y}_i^{jl} &= \mathcal{Y}_{(i,0)}^{jl} \cup \mathcal{Y}_{(i,1)}^{jl} = \mathcal{Y}_{(i,0)}^\gamma \cup \mathcal{Y}_{(i,1)}^\gamma = \mathcal{Y}_i^\gamma. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь и далее для упрощения обозначений вместо двух индексов  $j$  и  $l$  будем использовать также один индекс  $\gamma$ , которым нумеруем различные пары подсистем; число таких пар  $J = m(m-1)/2$  штук, где  $m$  — общее число подсистем в (1).

**Замечание 1.** Можно считать, что пары множеств  $\mathcal{Y}_{(i,0)}^\gamma = \mathcal{Y}_{(i,0)}^{j_l}$  и  $\mathcal{Y}_{(i,1)}^\gamma = \mathcal{Y}_{(i,1)}^{j_l}$  в (9) с одинаковыми индексами  $\gamma$  и  $i$  — это пары непересекающихся  $n_3$ -полос, имеющих одинаковые параметры  $S$  и  $\sigma$  (будем называть их *парными*), где  $n_3 = n_1$  при  $\bar{\mu} < \infty$  и  $n_3 = 1$  при  $\bar{\mu} = \infty$  (т.е. когда условия (4) отсутствуют). При  $\bar{\mu} < \infty$  параметры этих полос определяются следующим образом. Пусть  $H = (I, 0) \in \mathbb{R}^{n_1 \times (n_1+n_2)}$  — блочная матрица с блоками в виде единичной  $I \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$  и нулевой  $0 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$  матриц, а  $L^j = (0, \dots, 0, I, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times m(n_1+n_2)}$  — матричная строка, состоящая из  $m$  квадратных матриц, где единичная матрица  $I$  стоит на  $j$ -м месте в этой строке (так что получается  $H \cdot L^j \cdot z = x^{j,1} \in \mathbb{R}^{n_1}$ ). Тогда параметры  $n_1$ -полос  $\mathcal{Y}_{(i,\omega)}^{j_l}$  можно записать в виде:  $s = (-1)^{\omega+1} e^i (\underline{\mu} + \bar{\mu})/2 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $\sigma = \bar{\mu} e - e^i (\underline{\mu} + \bar{\mu})/2 \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $S = (L^j - L^l)^\top H^\top \in \mathbb{R}^{m(n_1+n_2) \times n_1}$ , где  $e^i$  —  $i$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^{n_1}$  ( $i$ -й столбец единичной матрицы  $I$ ). При  $\bar{\mu} = \infty$  для единообразия примем, что  $\mathcal{Y}_{(i,\omega)}^{j_l}$  — это гиперполосы с  $s = (-1)^{\omega+1} (\underline{\mu} + \bar{\mu})/2 \in \mathbb{R}^1$ ,  $\sigma = (\bar{\mu} - \underline{\mu})/2 \in \mathbb{R}^1$ ,  $S = (L^j - L^l)^\top H^\top e^i \in \mathbb{R}^{m(n_1+n_2)}$ , где  $\bar{\mu} = 2\tilde{\mu}$ , а в качестве  $\tilde{\mu}$  взята какая-либо априорная верхняя оценка для значений  $\max_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq k \leq N} \|x^j[k]\|_\infty$  состояний системы (1), (2) без учета фазовых ограничений (3), (4).

На рисунке дан пример для случая  $m=2$ ,  $n_1=1$ ,  $n_2=0$ , показывающий, что может получиться в  $\mathbb{R}^{m(n_1+n_2)}$  при пересечении параллелепипеда  $\mathcal{Z}^{(0)} = \mathcal{P}_0$  с множествами  $\check{\mathcal{Y}}$  и  $\mathcal{Y}$ . Здесь  $\check{\mathcal{Y}}$  состоит из двух непересекающихся полупространств, ограниченных сплошными линиями,  $\hat{\mathcal{Y}}$  — это гиперполоса между штрихпунктирными линиями,  $\mathcal{Y}$  состоит из двух непересекающихся параллельных гиперполос. Множество  $\mathcal{P}_0 \cap \check{\mathcal{Y}}$  состоит из двух политопов, а  $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{Y}$  тоже несвязно и состоит из двух выпуклых компонент — частей этих политопов.



В общем случае в силу взаимной дистрибутивности операций объединения и пересечения справедлива следующая лемма.

**Лемма 1.** Множество  $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}^{(0)} \cap \mathcal{Y}$  представимо в виде объединения  $(2n_1)^J$  компонент:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_J \leq n_1} \bigcup_{0 \leq \omega_1, \dots, \omega_J \leq 1} \left( \mathcal{Z}^{(0)} \cap (\mathcal{Y}_{(i_1, \omega_1)}^1 \cap \mathcal{Y}_{(i_2, \omega_2)}^2 \cap \dots \cap \mathcal{Y}_{(i_J, \omega_J)}^J) \right), \\ &= \bigcup_{1 \leq i_1, \dots, i_J \leq n_1} \bigcup_{0 \leq \omega_1, \dots, \omega_J \leq 1} \left( \mathcal{Z}^{(0)} \cap \left( \bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(i_\gamma, \omega_\gamma)}^\gamma \right) \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где объединения берутся по всевозможным индексам  $i_1, i_2, \dots, i_J$ , изменяющимся от 1 до  $n_1$ , и всевозможным индексам  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J$ , принимающим значения 0 и 1.



Заметим, что иногда может быть удобно записать это же объединение в следующем виде:

$$\mathcal{Z} = \bigcup_{0 \leq \delta \leq (n_1)^J - 1} \bigcup_{0 \leq \beta \leq 2^J - 1} \left( \mathcal{Z}^{(0)} \cap \left( \bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(v_\gamma(\delta)+1, w_\gamma(\beta))}^\gamma \right) \right)$$

с использованием двух индексов  $\delta \in \{0, 1, \dots, (n_1)^J - 1\}$  и  $\beta \in \{0, 1, \dots, 2^J - 1\}$  и их  $n_1$ -ичного и двоичного представлений  $v(\delta) = (v_1(\delta), v_2(\delta), \dots, v_J(\delta))$  (где  $v_\gamma(\delta) \in \{0, 1, \dots, n_1 - 1\}$ ) и  $w(\beta) = (w_1(\beta), w_2(\beta), \dots, w_J(\beta))$  (где  $w_\gamma(\beta) \in \{0, 1\}$ ) соответственно.

С учетом рекуррентных соотношений (7) и леммы 1 несложно видеть, что трубка достижимости  $\mathcal{Z}[\cdot]$  может быть представлена (подобно [9, разд. 11.2]) в виде системы ветвящихся трубок с ветвями, которые обозначаем через  $\mathcal{Z}[\cdot; H[\cdot]]$ . Здесь матрица  $H[k] = [h[0]; h[1]; \dots; h[k]] = \{h[\alpha]\}_{\alpha=0}^k \in \mathbb{R}^{J \times (k+1)}$  увеличивающейся от шага к шагу размерности определяет «историю» построения ветви до шага  $k$ . Примем, что каждый ее  $\alpha$ -й столбец хранит информацию о значениях индексов  $i$  и  $\omega$  из тех полос  $\mathcal{Y}_{(i,\omega)}^\gamma$ , которые определяют множество  $\mathcal{Y}$  и фигурируют на шаге  $\alpha$  под знаком объединения в (10), в следующем виде:  $h[\alpha] = ((-1)^{\omega_1[\alpha]+1} i_1[\alpha], \dots, (-1)^{\omega_J[\alpha]+1} i_J[\alpha])^\top$ , где  $\omega_\gamma[\alpha] \in \{0, 1\}$ ,  $i_\gamma[\alpha] \in \{1, \dots, n_1\}$ ,  $\gamma = 1, \dots, J$ .

**Предложение 1.** Трубка достижимости  $\mathcal{Z}[\cdot]$  системы (1)–(4) (иными словами, (5)–(6)) может быть представлена в виде системы ветвящихся трубок с ветвями  $\mathcal{Z}[\cdot; H[\cdot]]$ , сечения которых  $\mathcal{Z}[k; H[k]]$  в моменты  $k$  являются выпуклыми политопами. При этом МД  $\mathcal{Z}[k]$  представимы в виде объединения вышеупомянутых сечений:  $\mathcal{Z}[k] = \bigcup_{H[k]} \mathcal{Z}[k; H[k]]$  (назовем их компонентами множеств достижимости), верхняя оценка числа которых дается большим числом  $(2n_1)^{J(k+1)}$ , где  $J = m(m-1)/2$ , а ветви могут быть описаны соотношениями

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[0; H[0]] &= \mathcal{P}_0 \cap \left( \bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(i_\gamma[0], \omega_\gamma[0])}^\gamma \right); & H[0] &= [h[0]]; \\ \mathcal{Z}^{(0)}[k; H[k-1]] &= A[k] \mathcal{Z}[k-1; H[k-1]] + B[k] \mathcal{R}[k], & k &= 1, 2, \dots, N; \\ H[k] &= [H[k-1]; h[k]] = [h[0]; h[1]; \dots; h[k]], & k &= 1, 2, \dots, N; \\ h[k] &= ((-1)^{\omega_1[k]+1} i_1[k], (-1)^{\omega_2[k]+1} i_2[k], \dots, (-1)^{\omega_J[k]+1} i_J[k])^\top, & k &= 0, 1, \dots, N; \\ \mathcal{Z}[k; H[k]] &= \mathcal{Z}^{(0)}[k; H[k-1]] \cap \left( \bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(i_\gamma[k], \omega_\gamma[k])}^\gamma \right), & k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{11}$$

Таким образом, для каждой ветви  $\mathcal{Z}[\cdot; H[\cdot]]$  на каждом  $k$ -м шаге сначала производятся операции линейного преобразования сечения и суммирования множеств, затем выбирается  $J$  штук  $n_3$ -полос из тех, которые определяют  $\mathcal{Y}$ , и производится операция пересечения с ними. Индексы, определяющие эти полосы, запоминаются в последнем столбце  $H[k]$ .

Верхняя оценка числа получающихся таким образом компонент МД дается очень большим числом  $(2n_1)^{J(k+1)}$ . При некоторых предположениях (типа приведенного ниже), которые, в частности, естественным образом выполняются для систем, полученных из дифференциальных систем с помощью аппроксимаций Эйлера при достаточно малом шаге дискретизации, эту оценку можно немного уменьшить.

**Предположение 1.** Все «движение» происходит в области  $\|x^j[k]\|_\infty \leq C_x$ ,  $j=1, \dots, m$ ,  $k=0, 1, \dots, N$ , и имеем  $C_A \cdot C_x + C_u < \underline{\mu}$ , где  $C_A = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq k \leq N} \|A^j[k] - I\|$  (используется матричная норма, индуцированная нормой  $\|x\|_\infty$ ),  $C_u = \max_{1 \leq j \leq m} \max_{1 \leq k \leq N} \max_{w^j[k] \in \mathcal{R}^j[k]} \|B^j[k] w^j[k]\|_\infty$ .

Элементарными оценками получается, что при указанных условиях траектория не может за один шаг перескочить с одной полосы на другую, парную ей, полосу, и имеет место

**Следствие 1.** При выполнении предположения 1 множество  $\mathcal{Z}[k; H[k]]$  получается заведомо пустым для такой «истории»  $H[k]$ , у которой хотя бы для одного  $\gamma \in \{1, 2, \dots, J\}$  выполняются условия:  $i_\gamma[k] = i_\gamma[k-1]$ , но  $\omega_\gamma[k] \neq \omega_\gamma[k-1]$ .

**Следствие 2.** При выполнении предположения 1 и  $m = 2$  число непустых компонент МД на шаге  $k$  не превосходит  $K[k] = 2n_1(2n_1-1)^k$  (вместо оценки  $(2n_1)^{J(k+1)}$  для общего случая). В частности, при  $m = 2$  и  $n_1 = 1$  получается не более двух ветвей  $\mathcal{Z}[\cdot; H[\cdot]]$ .

### 3. Внешние полиэдральные оценки множеств достижимости

Называем параллелепипед  $\mathcal{P}(p, P, \pi) \subset \mathbb{R}^n$  *внешней оценкой* множества  $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^n$ , если  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$ . Оценку называют *тугой* (в направлении  $l$ ) [9], если  $\rho(\pm l | \mathcal{P}) = \rho(\pm l | \mathcal{Q})$ , где  $\rho(l | \mathcal{Q}) = \sup\{l^\top x | x \in \mathcal{Q}\}$  — опорная функция множества  $\mathcal{Q}$ . Внешнюю параллелепипедозначную оценку называем *касающейся* для  $\mathcal{Q}$ , если она является тугой в направлении  $n$  следующих векторов:  $l^i = P^{-1\top} e^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , где  $e^i$  —  $i$ -й единичный орт в  $\mathbb{R}^n$ .

В силу (7) внешние оценки для МД  $\mathcal{Z}[k]$  будут найдены, если построим элементарные полиэдральные оценки для результатов фигурирующих в (7) операций с множествами. В [2, 6] указаны способы построения ряда элементарных оценок. Кратко напомним их.

Внешняя касающаяся оценка  $P_{P^+}^+(\mathcal{Q})$  для множества  $\mathcal{Q}$  с заданной матрицей ориентации  $P^+$  строится на основе знания значений опорной функции множества  $\mathcal{Q}$  [6]. Матрицы  $P^+$  можно рассматривать как параметр, определяющий целое семейство оценок.

По явным формулам легко найти касающиеся оценки  $P_{P^+}^+(\mathcal{P}^1 + \mathcal{P}^2)$  и  $P_{P^+}^+(\mathcal{P}^1 \cup \mathcal{P}^2)$  для суммы параллелепипедов/параллелотопов [2, 6] и для их объединения.

Для множества  $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cap \Sigma$ , являющегося пересечением параллелепипеда и гиперполосы, по явным формулам можно найти  $n+1$  «сжатых» гиперполос [2, 11], дающих в пересечении  $\mathcal{Q}$ , и, значит, касающиеся оценки  $P_{P^+}^+(\mathcal{P} \cap \Sigma)$ , соответствующие нескольким специально выбранным матрицам ориентации  $P^+ \in \{P^0, P^1, \dots, P^n\}$ , описанным в [2, 11] (а именно, оценки, получающиеся отбрасыванием одной из  $n+1$  вышеупомянутых гиперполос).

Через  $\tilde{P}_{P^+}^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{Y})$  обозначим внешнюю оценку с матрицей ориентации  $P^+$  (не обязательно касающуюся) для пересечения параллелепипеда  $\mathcal{P}$  с множеством  $\mathcal{Y} = \bigcap_{i=1}^d \Sigma^i$ , являющимся пересечением нескольких гиперполос.

Для некоторых матриц ориентации  $P^+$  такую оценку несложно найти по явным формулам, в частности, последовательно за  $d$  шагов с помощью вышеупомянутых касающихся оценок для пересечения параллелепипеда и гиперполосы (при этом можно использовать на каждом шаге соображения локальной оптимальности оценок в смысле объема [2, 11]):

$$\mathcal{P}^{+,0} = \mathcal{P}; \mathcal{P}^{+,i} = P_{P^{+,i}}^+(\mathcal{P}^{+,i-1} \cap \Sigma^i), i=1, 2, \dots, d; \mathcal{P}^+ = \mathcal{P}^{+,d}, \tilde{P}_{P^+}^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{Y}) = \mathcal{P}^{+,d}. \quad (12)$$

Для пересечения двух параллелепипедов по явным формулам можно найти также оценки  $\tilde{P}_{P^+}^+(\mathcal{P}^1 \cap \mathcal{P}^2)$ , которые при любой неособой матрице ориентации  $P^+$  определяются соотношениями другого типа [6], а именно:  $\tilde{P}_{P^+}^+(\mathcal{P}^1 \cap \mathcal{P}^2) = P_{P^+}^+(\mathcal{P}^1) \cap P_{P^+}^+(\mathcal{P}^2)$ .

Рассмотрим групповое движение двух объектов ( $m = 2$ ). Покажем, как для  $\mathcal{Z}[\cdot]$  можно построить внешние оценки в виде системы из не более, чем  $2n_1$  полиэдральных трубок.

В рассматриваемом случае имеем  $J = 1$  и формулы (11) упрощаются за счет отсутствия пересечений по  $\gamma$  (при сделанном предположении  $\gamma = J = 1$ ). Для простоты записи далее

используем обозначение  $\mathcal{Y}_{(i,\omega)} = \mathcal{Y}_{(i,\omega)}^1$  для множеств  $\mathcal{Y}_{(i,\omega)}^1$  из (9). Из свойств вышеупомянутых элементарных оценок и рекуррентных формул (11) для МД  $\mathcal{Z}[k]$  получаем, что имеет место следующее утверждение.

**Предложение 2.** Пусть  $\mathcal{Z}[k]$  — множества достижимости системы (5)–(6) при  $m = 2$ . Пусть трубки  $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[\cdot]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_1$ ,  $\omega = 0, 1$ , определены следующими рекуррентными соотношениями<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[0] &= \tilde{\mathbf{P}}_{P_{(i,\omega)}^+[0]}^+(\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{Y}_{(i,\omega)}), \quad i = 1, 2, \dots, n_1, \quad \omega = 0, 1; \\ \mathcal{P}_{(i,\omega)}^{(0)+}[k] &= \mathbf{P}_{P_{(i,\omega)}^{(0)+}[k]}^+(A[k] \mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[k-1] + B[k] \mathcal{R}[k]), \quad i = 1, 2, \dots, n_1, \quad \omega = 0, 1; \\ \mathcal{P}_{(i,\omega)(j,v)}^+[k] &= \tilde{\mathbf{P}}_{P_{(i,\omega)(j,v)}^+[k]}^+(\mathcal{P}_{(i,\omega)}^{(0)+}[k] \cap \mathcal{Y}_{(j,v)}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n_1, \quad \omega, v = 0, 1; \\ \mathcal{P}_{(j,v)}^+[k] &= \mathbf{P}_{P_{(j,v)}^+[k]}^+(\bigcup_{1 \leq i \leq n_1} \bigcup_{\omega \in \{0,1\}} \mathcal{P}_{(i,\omega)(j,v)}^+[k]), \quad j = 1, 2, \dots, n_1, \quad v = 0, 1; \end{aligned} \quad (13)$$

$$k = 1, 2, \dots, N,$$

при произвольных допустимых значениях параметров оценок (матриц ориентации  $P_{(i,\omega)}^+[k]$ ,  $P_{(i,\omega)}^{(0)+}[k]$ ,  $P_{(i,\omega)(j,v)}^+[k]$ ) на всех подшагах процедуры. Тогда имеют место включения

$$\mathcal{Z}[k] \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n_1} \bigcup_{\omega \in \{0,1\}} \mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[k], \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

т.е. объединение параллелепипедозначных трубок  $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[\cdot]$  дает внешние оценки для  $\mathcal{Z}[\cdot]$ .

Поясним формулы (13) подробнее. Построение трубок  $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[\cdot]$  оказывается взаимосвязанным. Начальное сечение каждой из них строится в виде внешней оценки  $\tilde{\mathbf{P}}_{P_{(i,\omega)}^+[0]}^+(\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{Y}_{(i,\omega)})$  для пересечения начального множества с одной из  $n_3$ -полос из числа определяющих множество  $\mathcal{Y}$ . Такую оценку можно построить, в частности, за  $n_3$  подшагов типа (12). Далее на каждом  $k$ -м шаге сначала находятся касающиеся оценки  $\mathbf{P}_{P_{(i,\omega)}^{(0)+}[k]}^+(A[k] \mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[k-1] + B[k] \mathcal{R}[k])$  для соответствующих сечениям трубок сумм Минковского. Затем для каждого из построенных  $2n_1$  параллелепипедов  $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^{(0)+}[k]$  аналогично шагу  $k = 0$  строятся внешние оценки для пересечения этого параллелепипеда с одной из  $n_3$ -полос. В результате всего получается не более  $(2n_1)^2$  параллелепипедов. Затем они группируются по  $2n_1$  штук так, что для каждой пары индексов  $(j, v)$  перебираются всевозможные пары индексов  $(i, \omega)$  и находятся внешние касающиеся оценки для объединения параллелепипедов каждой группы — всего  $2n_1$  параллелепипедов, являющихся сечениями полиэдральных трубок  $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[\cdot]$  на шаге  $k$ . Дальше происходит переход к следующему шагу  $k + 1$ .

Таким образом, сравнительно просто можно построить  $2n_1$  полиэдральных трубок. Понятно, что полученные оценки могут оказаться довольно грубыми. Однако они могут быть в какой-то степени содержательными, а именно, справедливо

**Замечание 2.** Примем, что из условий группового движения (3)–(4) наиболее важными являются нижние ограничения (3) (условия нестолкновения), либо условия (4) вообще отсутствуют ( $\bar{\mu} = \infty$ ). За счет подходящего выбора матриц ориентации промежуточных оценок эти трубки  $\mathcal{P}_{(j,v)}^+[\cdot]$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_1$ ,  $v = 0, 1$ , можно построить так<sup>3</sup>, чтобы для каждой из них ее сечения  $\mathcal{P}_{(j,v)}^+[k]$  лежали в фиксированном полупространстве — одном из

<sup>2</sup>Здесь не исключается случай, что какие-то из множеств  $\mathcal{P}_{(i,\omega)}^+[k]$  могут быть пустыми.

<sup>3</sup> Этого можно добиться, в частности, если при построении оценок  $\mathcal{P}_{(i,\omega)(j,v)}^+[k]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_1$ ,  $\omega = 0, 1$ , при фиксированных индексах  $(j, v)$  за  $n_3 \geq 1$  подшагов типа (12) в последнюю очередь обрабатывать

тех, которые задают нижние групповые ограничения, т.е. чтобы точки из множеств  $\mathcal{P}_{(j,v)}^+[k]$  удовлетворяли (3).

Формально рассуждая, аналогично (13) можно построить внешние оценки для  $\mathcal{Z}[\cdot]$  в случае  $m > 2$  с использованием  $(2n_1)^J$  полиэдральных трубок (соответствующих объединениям из (10)). Обозначим через  $\mathcal{W}_h$  множества  $\mathcal{W}_h = \bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(i_\gamma, \omega_\gamma)}^\gamma$ , которые мы «занумеровали» с помощью векторов  $h = ((-1)^{\omega_1+1}i_1, (-1)^{\omega_2+1}i_2, \dots, (-1)^{\omega_J+1}i_J)^\top \in \mathbb{R}^J$ , где  $i_\gamma \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ ,  $\omega_\gamma \in \{0, 1\}$ ,  $\gamma = 1, 2, \dots, J$ .

**Предложение 3.** Пусть  $\mathcal{Z}[k]$  — множества достижимости системы (5)–(6) и  $m \geq 2$ . Пусть параллелепипедозначные трубки  $\mathcal{P}_h^+[\cdot]$  определены следующими рекуррентными соотношениями<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_h^+[0] &= \tilde{\mathcal{P}}_{P_h^+[0]}^+(\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{W}_h); \\ \mathcal{P}_h^{(0)+}[k] &= \mathcal{P}_{P_h^{(0)+}[k]}^+(A[k] \mathcal{P}_h^+[k-1] + B[k] \mathcal{R}[k]), \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ \mathcal{P}_{h, \tilde{h}}^+[k] &= \tilde{\mathcal{P}}_{P_{h, \tilde{h}}^+[k]}^+(\mathcal{P}_h^{(0)+}[k] \cap \mathcal{W}_{\tilde{h}}), \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ \mathcal{P}_{\tilde{h}}^+[k] &= \mathcal{P}_{P_{\tilde{h}}^+[k]}^+(\bigcup_h \mathcal{P}_{h, \tilde{h}}^+[k]), \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \tag{14}$$

при произвольных допустимых значениях параметров оценок (матриц ориентации)  $P_h^+[k], P_h^{(0)+}[k], P_{h, \tilde{h}}^+[k]$  на всех подшагах процедуры (14), где «векторные индексы»  $h = ((-1)^{\omega_1+1}i_1, (-1)^{\omega_2+1}i_2, \dots, (-1)^{\omega_J+1}i_J)^\top$  и  $\tilde{h} = ((-1)^{\tilde{\omega}_1+1}\tilde{i}_1, (-1)^{\tilde{\omega}_2+1}\tilde{i}_2, \dots, (-1)^{\tilde{\omega}_J+1}\tilde{i}_J)^\top$  пробегают (подобно (13)) всевозможные значения, получающиеся при  $i_\gamma \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ ,  $\omega_\gamma \in \{0, 1\}$ ,  $\gamma=1, 2, \dots, J$ , и при  $\tilde{i}_\gamma \in \{1, 2, \dots, n_1\}$ ,  $\tilde{\omega}_\gamma \in \{0, 1\}$ ,  $\gamma=1, 2, \dots, J$  соответственно, а символом  $\tilde{\mathcal{P}}_{P^+}^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{W})$  обозначена какая-либо внешняя оценка с матрицей ориентации  $P^+$  для пересечения параллелепипеда  $\mathcal{P}$  с множеством  $\mathcal{W}$ , являющимся пересечением нескольких гиперполос. Тогда  $\mathcal{Z}[k] \subseteq \bigcup_h \mathcal{P}_h^+[k]$ ,  $k=0, 1, \dots, N$ , т.е. объединение  $(2n_1)^J$  трубок  $\mathcal{P}_h^+[\cdot]$  дает внешние оценки для  $\mathcal{Z}[\cdot]$ .

**Замечание 3.** Множества  $\mathcal{W}_h$  образованы пересечением гиперполос, число которых равно  $m_{\mathcal{W}} = J \cdot n_3 = n_3 \cdot m(m-1)/2$ . Поэтому при увеличении числа подсистем  $m$  возникает сложность при вычислении оценок типа  $\tilde{\mathcal{P}}_{P^+}^+(\mathcal{P} \cap \mathcal{W}_h)$ . Если находить их последовательно за  $m_{\mathcal{W}}$  подшагов типа 12, то оценки, описанные в предложении 3, получатся грубее, чем в случае  $m = 2$ , за счет накопления закруглений при построении большего числа  $m_{\mathcal{W}}$  оценок типа 12. Кроме того, вообще говоря, не удастся (подобно замечанию 2) обеспечить принадлежность каждого из сечений полиэдральных трубок одному из множеств  $\bigcap_{\gamma=1}^J \mathcal{Y}_{(i_\gamma, \omega_\gamma)}^\gamma$ , задающих нижние ограничения 3.

## Заключение

Показано, что МД системы, состоящей из  $m$  линейных многошаговых управляемых объектов, при наличии условий группового движения могут быть невыпуклыми и несвязными, и дано представление трубки достижимости в виде системы ветвящихся трубок, где сечения ветвей являются выпуклыми политопами. Предложены алгоритмы построения некоторых

пересечение с гиперполосой, нормаль которой определяется индексом  $j$ , и матрицу ориентации  $P_{(i,\omega)(j,v)}^+[k]$  выбирать так, чтобы одна из граней оценки была ортогональна этой нормали, и матрицы ориентации  $P_{(j,v)}^+[k]$  тоже выбирать так, чтобы одна из граней оценки была ортогональна этой нормали.

<sup>4</sup>Здесь опять не исключается случай, что какие-то из множеств  $\mathcal{P}_{h^+}[k]$  могут быть пустыми.

внешних оценок МД на основе «элементарных» полиэдральных (параллелепипедозначных) оценок для результатов операций с параллелепипедами. Основное внимание уделено случаю  $m = 2$ . Результаты численного моделирования будут даны в другой публикации.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-02368а).*

## Литература

1. Гусев М.И. Внешние оценки множеств достижимости нелинейных управляемых систем // Автоматика и телемеханика. 2012. № 3. С. 39–51.
2. Костоусова Е.К. Параллельные вычисления при оценивании областей достижимости и информационных множеств линейных систем // Алгоритмы и программные средства параллельных вычислений. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. Вып. 3. С. 107–126.
3. Куржанский А.Б. Задача управления групповым движением. Общие соотношения // Докл. РАН. 2009. Т. 426, № 1. С. 20–25.
4. Черноушко Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.
5. Filippova T.F. Approximation techniques in impulsive control problems for the tubes of solutions of uncertain differential systems // Springer Proc. Mathematics and Statistics. 2013. Vol. 41. P. 385–396. DOI: 10.1007/978-1-4614-6393-1.
6. Kostousova E.K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations // Optimiz. Methods & Software. 1998. Vol. 9, № 14. P. 269–306. DOI:10.1080/10556789808805696.
7. Kurzhanski A.B., Vályi I. Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
8. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On synthesizing team target controls under obstacles and collision avoidance // J. Franklin Inst. 2010. Vol. 347, № 1. P. 130–145. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2009.11.002.
9. Kurzhanski A.B., Varaiya P. Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation. (Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85). Birkhäuser Basel, 2014. 445 p. DOI: 10.1007/978-3-319-10277-1.
10. Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory // IEEE Trans. on Automatic Control. 2006. Vol. 51, No. 3. P. 401–420. DOI: 10.1109/TAC.2005.864190.
11. Vicino A., Zappa G. Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty // IEEE Trans. Automat. Contr. 1996. Vol. 41, № 6. P. 774–785. DOI: 10.1109/9.506230.

Костюсова Елена Кирилловна, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник отдела оптимального управления, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН (Екатеринбург, Российская Федерация), kek@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 17 сентября 2015 г.

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Computational Mathematics and Software Engineering"*  
2016, vol. 5, no. 1, pp. 13–23

---

DOI: 10.14529/cmse160102

## ON STATE ESTIMATION FOR MULTI-AGENT MOTION: DISCRETE-TIME SYSTEMS

*E.K. Kostousova*, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics  
of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Ekaterinburg, Russian  
Federation

The reachability problem for linear discrete-time control systems which describe multi-agent motion is considered. Namely, we consider a finite set of subsystems with controls to be chosen under the condition that the trajectories of the subsystems are pairwise not very close to and not very far away from each other. Properties of reachable sets of such systems are described. Some algorithms for constructing external polyhedral (parallelepiped-valued) estimates for reachable sets are proposed.

*Keywords: reachable sets, discrete-time systems, multi-agent motion, polyhedral estimates.*

### FOR CITATION

Kostousova E.K. On State Estimation for Multi-agent Motion: Discrete-Time Systems. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 1. pp. 13–23. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160102.

### References

1. Gusev M.I. External estimates of the reachability sets of nonlinear controlled systems. Autom. Remote Control. 2012. vol. 73, no. 3. pp. 450–461. DOI: 10.1134/S0005117912030046.
2. Kostousova E.K. Parallelnye vychisleniya pri otsenivanii oblastey dostizhimosti i informatsionnykh mnozhestv lineinykh sistem [Parallel computations for estimating attainability domains and informational sets of linear systems]. *Algoritmy i programnye sredstva parallelnykh vychisleniy* [Algorithms and Software for Parallel Computations]. Ekaterinburg: UrO RAN. 1999. issue 3. pp. 107–126 (in Russian).
3. Kurzhanski A.B. The problem of control for multi-agent motion. Doklady Mathematics. 2009. vol. 79, no. 3. pp. 314–318. DOI: 10.1134/S1064562409030041.
4. Chernousko F.L. Estimation for Dynamic Systems. Boca Raton: CRC Press, 1994. 304 p.
5. Filippova T.F. Approximation techniques in impulsive control problems for the tubes of solutions of uncertain differential systems. Springer Proc. Mathematics and Statistics. 2013. vol. 41. pp. 385–396. DOI: 10.1007/978-1-4614-6393-1.

6. Kostousova E.K. State estimation for dynamic systems via parallelotopes: optimization and parallel computations. *Optimiz. Methods & Software*. 1998. vol. 9, no. 14. pp. 269–306. DOI:10.1080/10556789808805696.
7. Kurzhanski A.B., Vályi I. *Ellipsoidal Calculus for Estimation and Control*. Boston: Birkhäuser, 1997. 321 p.
8. Kurzhanski A.B., Varaiya P. On synthesizing team target controls under obstacles and collision avoidance. *J. Franklin Inst.* 2010. vol. 347, no. 1. pp. 130–145. DOI: 10.1016/j.jfranklin.2009.11.002.
9. Kurzhanski A.B., Varaiya P. *Dynamics and Control of Trajectory Tubes: Theory and Computation*. (Systems & Control: Foundations & Applications, Book 85). Birkhäuser Basel, 2014. 445 p. DOI: 10.1007/978-3-319-10277-1.
10. Olfati-Saber R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 2006. vol. 51, no. 3. pp. 401–420. DOI: 10.1109/TAC.2005.864190.
11. Vicino A., Zappa G. Sequential approximation of feasible parameter sets for identification with set membership uncertainty. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1996. vol. 41, no. 6. pp. 774–785. DOI: 10.1109/9.506230.

*Received September 17, 2015.*

# ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ МЕТОД ОБЪЕДИНЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ РАБОТЫ ПРОГРАММ ПО СБОРКЕ ГЕНОМА<sup>1</sup>

*К.В. Романенков, А.Н. Сальников, А.В. Алексеевский*

В данной работе проводится исследование в области применения многопроцессорных систем для задачи коррекции сборки генома. Существует большое количество алгоритмических подходов к проблеме сборки генома из набора коротких фрагментов, при этом результаты их работы на одних и тех же экспериментальных данных зачастую существенно разнятся. Вследствие большого объема данных необходима организация вычислений в модели распределенной памяти на вычислительном кластере. Авторами предложен алгоритм объединения результатов работ геномных сборщиков, основанный на построении распределенного взвешенного графа контигов. Предлагаемый подход использует комбинацию выводов программ сборки геномов, что позволяет уменьшить фрагментированность контигов в результирующем наборе. Последовательная версия алгоритма реализована на C/C++ и доступна по адресу: <https://bitbucket.org/kromanenkov/gar>.

*Ключевые слова:* биоинформатика, многопроцессорные системы, параллельные алгоритмы.

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Романенков К.В., Сальников А.Н., Алексеевский А.В. Параллельный метод объединения результатов работы программ по сборке генома // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 24–34. DOI: 10.14529/cmse160103.

## Введение

Современные высокотехнологичные автоматические методы расшифровки последовательностей ДНК (секвенирования) позволяют в течение короткого времени (несколько дней) и сравнительно недорого (несколько тысяч долларов) получить сотни миллиардов коротких последовательностей из четырех букв А, Т, G, С, полученных прочтением фрагментов входного образца ДНК одного или нескольких организмов.

Расшифровка индивидуальных геномов людей и множества видов организмов, от вирусов и бактерий до сельскохозяйственных и домашних животных, существенно ускоряет прогресс в персонифицированной медицине, биоинженерии и биотехнологии, теории эволюции и других областях биологии [1].

Технология секвенирования заключается в следующем: в геноме выбирается случайный фрагмент, а затем происходит считывание двух последовательностей с его концов, причем центральная часть фрагмента остается непрочитанной. Эти последовательности называются парными чтениями(ридами), причем длина непрочитанной части фрагмента известна только приблизительно. В зависимости от технологии можно получать парные чтения длиной 100–250 нуклеотидов.

В идеале результатом сборки генома должны быть последовательности хромосом изучаемого организма; в случае человека — 24. Однако на пути от десятков миллиардов последовательностей длины 100–250 до нескольких последовательностей, представляющих

<sup>1</sup>Статья рекомендована к публикации программным комитетом Международной суперкомпьютерной конференции «Параллельные вычислительные технологии — 2015».



полный геном, возникают серьезные технологические, алгоритмические и вычислительные проблемы [1]. Полностью преодолеть возникающие трудности для больших геномов не удастся или удастся с большим трудом. Так, последняя сборка *hg38* генома человека состоит из 735 «скэффолдов» — непрерывных последовательностей, — вместо 24-х в идеале. Число нерасшифрованных нуклеотидов оценивается в 160 млн. (расшифрованных — 3 млрд 209 млн 286 тыс 105) [2]. Показательно также, что среди геномов 1542 видов эукариот, заявленных в БД NCBI в разделе секвенированных геномов, лишь 14 отнесены к группе полностью секвенированных геномов [3].

В алгоритмах сборки геномов (сборки геномов из коротких ридов) должны учитываться такие факторы, как неравномерность покрытия (число чтений, содержащих тот или иной нуклеотид генома) геномов ридами, которые по технологии получаются из случайных фрагментов ДНК; возможность и частоту ошибок в ридов; возможность наличия химерных ридов, составленных из разных частей ДНК; наличие в геномах длинных повторов, которые могут приводить к невозможности восстановления полной последовательности даже теоретически.

Наиболее сложной является сборка генома *de novo*. Задача сборки при наличии образца, например, сборки генома индивидуального человека при наличии референсного генома (секвенированный, собранный и проаннотированный геном организма того же вида, к которому относится анализируемый образец) более простая. Предложены десятки алгоритмов сборки *de novo*. Большинство из них основаны на построении графа де Брюйна и нахождении Эйлера пути в нем. Однако из-за разных эвристик, заложенных на разных этапах сборки, результаты применения сборщиков существенно отличаются [4], см. также наши результаты далее в тексте. Важным обстоятельством, усложняющим сравнение алгоритмов, является то, что отсутствуют универсальные метрики оценки качества сборки. Причина заключается в том, что нет количественной оценки ошибок разного типа. Например, что лучше: большее число длинных контигов (однозначно расшифрованных непрерывных последовательностей) и скэффолдов (нескольких контигов, склеенных в единую последовательность с возможными пропусками или недостоверно определенными нуклеотидами между ними) либо уменьшение числа химер: контигов и скэффолдов, ошибочно склеенных из фрагментов разных хромосом?

Большой разрыв между желаемым результатом сборки *de novo* и получаемыми результатами, высокая актуальность создания более качественных сборщиков геномов для медицины и биологии ставят эту задачу в первый ряд актуальных вычислительных задач.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 описываются особенности задачи коррекции сборок и разбираются существующие программные средства для решения этой задачи. В разделе 2 содержится краткое описание используемых данных и сборщиков. Раздел 3 описывает предложенный параллельный метод объединения результатов работ геномных сборщиков. В разделе 4 приведены результаты вычислительного эксперимента. В заключении анализируется оправданность использования вычислительных кластеров и описываются направления будущих исследований.

## 1. Задача коррекции сборки

Сборки генома, построенные сборщиками на основе ридов длины 100–150 нуклеотидов фрагментированы и содержат ошибки. Обычная практика при решении задачи сборки генома заключается в запуске нескольких сборщиков с различными параметрами, а затем

выбору наилучшего варианта согласно некоторым соображениям. Однако недавние исследования показывают, что достаточно распространена ситуация, при которой одни сборщики показывают лучший результат по одному из статистических критериев в сравнении с другими программами, и уступают им же по другому критерию [5]. С большой уверенностью можно утверждать, что для каждого сборщика существуют фрагменты в геноме, с задачей сборки которых он справляется лучше остальных. В основном, это объясняется деталями реализации стратегии того или иного сборщика по разрешению «проблемных» участков в геноме, например, связанных с повторами.

Согласуясь с этим предположением, в последнее время были созданы программные средства, реализующие стратегию согласования для пары результатов работы геномных сборщиков. Обычно один набор контигов считается «ведущим», а второй «ведомым», задача согласования заключается в объединении контигов из пары наборов, при этом необходимо обнаружить и изолировать проблемные регионы. Цель подобной стратегии — уменьшение фрагментированности наборов контигов и увеличение средней длины последовательностей в объединении. Основные проблемы, возникающие при согласовании результатов различных геномных сборщиков, — это ошибочное склеивание контигов, соответствующих различным фрагментам референсной последовательности (генома образца) и появление дубликатов в сборке. Вторая проблема возникает из-за того, что большая часть собираемого генома дублируется в наборах контигов, поэтому необходимо отфильтровывать последовательности, которые полностью покрываются либо непосредственно контигами, либо их объединениями.

Одной из первых программ для объединения набора контигов от разных сборщиков стала Reconciliator [6]. В ней производится поиск участков, являющихся уникальными как для ведомой, так и для ведущей последовательности. На следующем этапе закрываются пропуски в контигах из первого набора с использованием последовательностей из второго набора. В случае наличия нескольких вариантов выбирается тот, который отвечает лучшему статистическому критерию. Похожий подход использует GAA [5], строящий граф соответствия между наборами контигов, используемый для объединения сборок, и ZORRO [7], который предвзято шаг объединения этапом фильтрации контигов, содержащих ошибки. Программа GAM-NGS [4] ищет в контигах блоки соответствия, которые зависят от количества ридов, картирующихся на сравниваемые последовательности — таким образом, не проводят процедуру выравнивания каждого контига с каждым. Исходя из информации, полученной на стадии картирования ридов, строится граф сборок, анализируя который, можно установить участки несоответствия между наборами контигов.

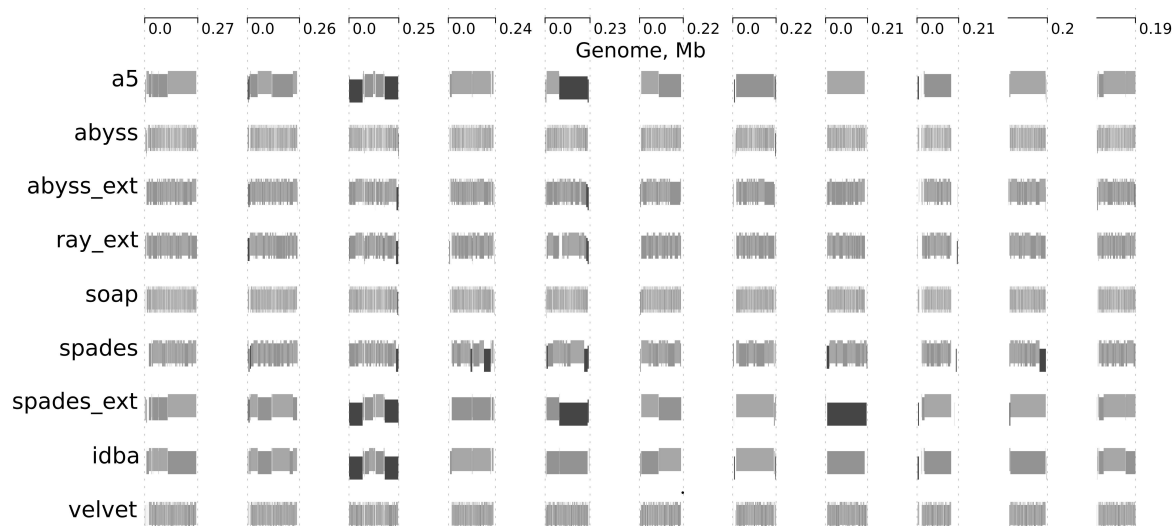
Процесс объединения результатов работ геномных сборщиков является ресурсоемкой задачей. Время работы программы Reconciliator на одном из входных наборов данных составляет 24 часа, потребление оперативной памяти при этом составляет больше 100 Гб [6]. Все описанные программные продукты являются последовательными, либо работают в контексте модели общей памяти, что ограничивает их масштабируемость.

Вышеперечисленные программы объединения результатов работы геномных сборщиков предназначены для сопоставления только двух наборов контигов. Описываемый метод способен объединять контиги, полученные от произвольного числа сборщиков.

## 2. Описание используемых данных и сборщиков

### 2.1. *Encephalitozoon cuniculi* fungus

Для тестирования предложенного метода был выбран геном гриба *Encephalitozoon cuniculi*, содержащий 11 хромосом, общая длина которых составляет около 2,5 миллионов нуклеотидов. Парные ряды длиной 100 символов, полученные в результате секвенирования генома данного организма, доступны на сайте Европейского биоинформатического института [8], референс, состоящий из 11 последовательностей хромосом, опубликован на сайте NCBI [9]. Из парных рядов нижеперечисленными сборщиками были получены последовательности контигов, которые и служили входными данными для описываемого метода. Наличие референсной последовательности для данного набора данных позволяет оценить корректность полученных сборок, поэтому параметры для запуска сборщиков подбирались таким образом, чтобы полученные ими результаты максимально соответствовали референсу. На рис. 1 показан пример картирования набора контигов, полученного от разных сборщиков на референсную последовательность, построенный с помощью программы QCAST [10].



**Рис. 1.** Сравнение контигов, полученных от различных сборщиков, и референсных последовательностей

На горизонтальной оси располагаются результаты картирования наборов контигов на 11 хромосом референсной последовательности. Вдоль вертикальной оси расположены наборы контигов, полученные от разных сборщиков или от одного сборщика, но с разными параметрами. Участки, выделенные темным цветом, соответствуют ошибкам сборки (например, перестановке участков генома местами или объединению участков генома, которые в референсной последовательности не следуют друг за другом). Выравнивание контига и референсной последовательности изображается на рисунке сплошным прямоугольником соответствующей длины; таким образом, если в результате работы сборщика получилось много коротких контигов, это выражается в сильной фрагментированности диаграммы выравнивания.

## 2.2. Используемые сборщики

Ниже перечислены геномные сборщики, результаты работы которых объединяет предложенный метод. Все они используют концепцию графа де Брюйна и фигурируют в научных работах последнего времени, посвященных сравнению качества работы геномных сборщиков [11].

*A5* — автоматически выбирает параметры сборки, внутри использует сборщик IDBA.

*ABYSS* — собирает геном в модели распределенной памяти, используя библиотеку MPI. Для определения участков перекрытий использует распределенную хеш-таблицу.

*IDBA* — итеративно изменяет параметры сборки, на каждой итерации дополняя риды контигами, полученными на предыдущей итерации.

*RAY* — может собирать геном в модели распределенной памяти, используя библиотеку MPI. Использует оригинальную эвристику для выявления повторов в геноме.

*SOAPdenovo* — использует разреженную хеш-таблицу для экономии оперативной памяти, что может приводить к ошибкам сборки. Для этого сборщика характерно относительно малое время работы.

*SPAdes* — использует различные параметры сборки для участков генома с различной глубиной покрытия.

*Velvet* — один из первых и самых распространенных сборщиков для коротких ридов. Необходимо вручную задавать большой набор параметров сборки.

## 3. Описание метода объединения

Основная идея алгоритма заключается в построении распределенного взвешенного графа контигов, используемого для этапа согласования последовательностей. Каждая вершина графа соответствует контигу, а ребро — ситуации концевое перекрытия контигов, то есть случаю, когда конец одной последовательности идентичен или практически идентичен началу другой последовательности (в данной работе последовательности считались перекрывающимися, если количество идентичных символов в выравнивании  $\geq 90\%$  от длины перекрытия). Также в вершине сохраняется информация о наборе, к которому принадлежал соответствующей ее контиг. Для поиска перекрытий выполняется попарное выравнивание контигов из каждой пары наборов. Выравнивание последовательностей производится программой MEGABLAST, которая является вариацией программы BLAST, отличающейся от нее более высокой скоростью работы и ориентацией на поиск участков сходства с малым числом неточных совпадений. В силу того, что каждый контиг будет многократно участвовать в выравнивании, все множества контигов предварительно индексируются.

Программная реализация выполнена на языке C/C++, для организации параллельных вычислений и пересылок данных между процессами используется библиотека MPI. Каждый MPI-процесс хранит в памяти часть вершин и ребер взвешенного графа контигов.

Общая схема предлагаемого метода выглядит следующим образом:

1. Считывание контигов из файлов, полученных в результате работы геномных сборщиков. Распределение контигов по процессам, сбор статистики: максимум, минимум, медиана длины контигов и т.д.
2. Каждый MPI-процесс для каждого своего контига производит выравнивание программой MEGABLAST со всем множеством контигов на всех процессорах. Цель парного выравнивания последовательностей — расположить символы последовательностей друг

под другом, вставляя специальные "пробельные" символы таким образом, чтобы наиболее похожие фрагменты одной последовательности выровнялись относительно аналогичных фрагментов другой последовательности. Помимо непосредственного расположения последовательностей программа MEGABLAST собирает статистику выравнивания: статистическая значимость выравнивания, количество "пробельных" символов, количество идентичных позиций в выравнивании и т.д. Эта информация сохраняется и будет использована позже при построении взвешенного графа контигов. Каждый процесс строит матрицу с результатами выравнивания. При этом каждый процесс запрашивает у остальных процессов последовательности контигов, а в ответ отправляет номера своих контигов и полученные им результаты выравнивания.

3. Построение распределенного взвешенного графа контигов. Вес ребра, соединяющего пару вершин, соответствующих контигам, определяется, исходя из результата парного выравнивания контигов, и характеризует «перспективность» объединения конкретной пары последовательностей. В формулу для расчета веса ребра входят статистическая значимость выравнивания, количество идентичных позиций в выравнивании, длины последовательностей и другие параметры со своими весовыми коэффициентами. На этапе объединения контигов предпочтение отдается ребрам с большим весом. Каждый процесс владеет информацией о распределении вершин и ребер графа по процессорам.
4. Кластеризация построенного графа с помощью LabelRank-подобного алгоритма на непересекающиеся области так, чтобы максимизировать вес внутри каждой области и минимизировать вес ребер между областями. Процесс разбиения графа позволяет уменьшить число перекрытий, получающихся в результате ошибки сборки или из-за наличия в геноме длинных повторов. Данный подход является масштабируемым, что достигается отказом от хранения графа контигов или матрицы попарного выравнивания в общей памяти. Если ребро рассматриваемого контига находится в памяти другого процесса, то ему отправляется сообщение типа точка-точка, ответом на которое будет служить вес ребра. Предполагается, что каждая область будет содержать максимальное число участков, соответствующих одному фрагменту генома. Это объясняется следующим образом: предположим, существуют два контига  $C_i$  и  $C_j$ , перекрывающиеся из-за наличия у них общего повтора. Если при этом в геноме  $C_i$  не располагается рядом с  $C_j$ , то  $C_i$  будет иметь малое число перекрытий с контигами, перекрывающимися с  $C_j$ , и не попадет в область, к которой будет отнесен  $C_j$ . В связи с этим уменьшается вероятность склеивания пары контигов, перекрывающихся благодаря тому, что они оба содержат участок повтора.
5. В каждой области, содержащей достаточное большое количество последовательностей (в данной работе такими считались области, содержащие 5 и более последовательностей), выполняется объединение контигов жадным алгоритмом, в итоговый результат попадают последовательности длиннее порогового значения.

На рис. 2 показан пример работы алгоритма для 3 наборов контигов. Следует отметить, что если один контиг целиком содержится в другом, то ребро, соответствующее этой паре контигов, не попадает в граф, что отражено в иллюстрации.

На ранних этапах исследования основной метод предваряла операция картирования ридов на наборы контигов с помощью сторонней программы и выделение в контигах участков мало покрытых короткими чтениями. Такие участки могут сигнализировать о потенциальных ошибках сборки, поэтому они разделялись с целью уменьшения числа последователь-

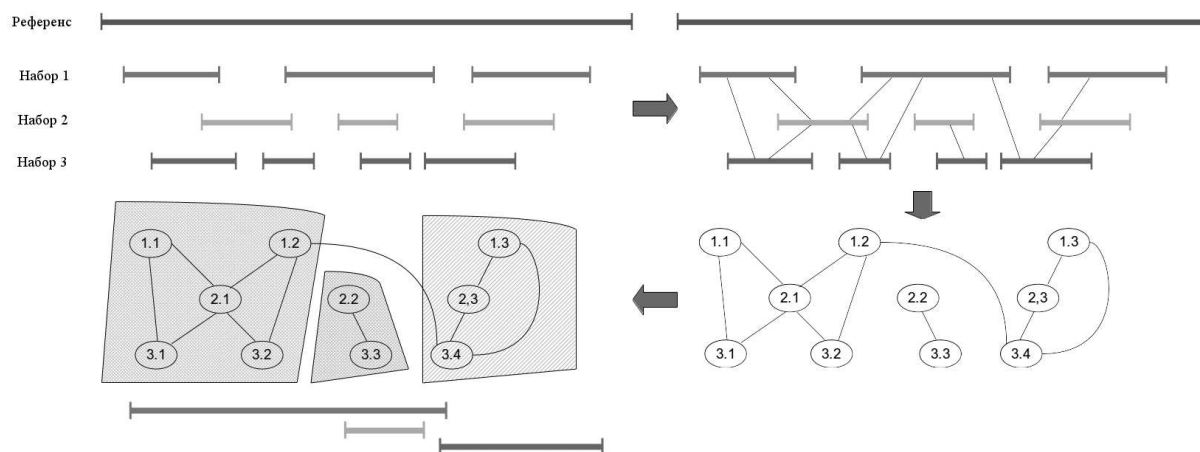


Рис. 2. Пример работы предложенного метода для 3 наборов контигов

ностей, содержащих участки, не следующих друг за другом в референсном геноме. Однако эксперименты показали, что эта операция не только не разделяла ошибочные последовательности, но и дробила корректно собранные контиги, в связи с чем из дальнейшего исследования этот этап был исключен.

Ввиду большой размерности матрицы попарного выравнивания (предположим, имеется 10 наборов по 10000 контигов, тогда необходимо  $(10 * 9 * 10^4 * 10^4) / 2$  структур для хранения результатов выравнивания; даже если размер структуры составит 1 байт, это потребует более 30 Гб памяти) она хранится в разреженном виде. Реализация разреженной матрицы и списков смежности графа выполнена с помощью хэш-таблицы.

#### 4. Вычислительный эксперимент

Тестирование предложенного метода проводилось на суперкомпьютере «Ломоносов». Вначале были получены наборы контигов от разных сборщиков, а затем был запущен процесс объединения последовательностей. В таблице представлены результаты работы метода, для оценки результата использованы следующие метрики: число ошибок сборки (перестановка участков генома местами; объединение участков генома, которые в референсной последовательности не следуют друг за другом), общее число контигов, N50 и длиннейший непрерывный участок (ДНУ), картирующийся на референс. Метрики числа ошибок сборки и длиннейшего непрерывного участка являются референс-зависимыми, для подсчета числа контигов и N50 референсная последовательность не требуется.

Метрика N50 определяет величину, при которой контиги длиннее значения этой величины составляют половину собранного генома, и считается стандартом сравнения геномных сборок в случае отсутствия референса. Для подсчета величины длиннейшего непрерывного участка сборки используется следующая схема: контиги выравниваются на референсный геном, при этом если контиг полностью не картируется на референсную последовательность (например, переставлены местами фрагменты контига или контиг содержит неверный кусок), то он разбивается на более мелкие участки, целиком картирующиеся на геном. Длина самого протяженного полученного участка и считается величиной ДНУ.

В работах, посвященных анализу качества геномныхборок, обычно считается, что более качественная сборка характеризуется меньшим числом контигов, меньшим числом

ошибок сборки, большим значением N50 и большим значением длиннейшего непрерывного участка.

Таблица

Результаты работы по объединению набора контигов

Сборщик	Ошибки сборки	Число контигов	N50	ДНУ
A5	14	16774	1401	199363
Abyss	10	30933	9076	75379
Ray	9	15087	10177	54559
SOAPdenovo	2	6340	1558	6989
Spades	8	42236	1883	199986
IDBA	9	1533	65715	199363
Velvet	3	3693	3344	17502
Предложенный метод	7	1944	50631	199363

Из таблицы видно, что в процессе объединения результатов часть контигов была отфильтрована, что объясняется либо их малой длиной, либо малым количеством перекрытий с другими последовательностями. В объединение попал контиг, содержащий длиннейший непрерывный участок из наборов A5 и IDBA, одновременно с этим значительно уменьшилось число контигов, что впрочем не привело к ощутимому увеличению числа ошибок.

## Заключение

Полученные результаты позволяют утверждать, что предложенный метод справился с основной задачей согласования геномных сборок: уменьшение фрагментации последовательностей и увеличение средней длины последовательности в объединении.

Авторы хотят отметить исключительную удачность решения использовать вычислительный кластер для объединения сборок. Это позволит в дальнейшем адаптировать предложенный метод для более длинных геномов, например генома человека, и большего числа сборщиков. В рамках дальнейшего исследования планируются следующие действия:

- 1) проверка работы предложенного подхода для объединения сборок геномов, размер которых составляет около 1 Гб;
- 2) изучение применимости графовых алгоритмов кластеризации для выделения областей графа, соответствующих контигам, полученных из одной хромосомы;
- 3) изучение возможности хранения контигов в сжатом виде в оперативной памяти (например, используя FM-индекс [12]) для экономии ОП и возможности работы с большими геномами;

*Работа частично поддержана грантом РФФ №14-50-00029.*

## Литература

1. Miller J.R., Koren S., Sutton G. Assembly algorithms for next-generation sequencing data // *Genomics*. 2010. Vol. 95, No. 6. P. 315–327. DOI: 10.1016/j.ygeno.2010.03.001.
2. NCBI, БД Assembly, геном человека. URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/assembly/883148> (дата обращения: 1.08.2015).
3. Метаинформация о геномах эукариотов на сайте NCBI. URL: [ftp://ftp.ncbi.nlm.nih.gov/genomes/GENOME\\_REPORTS/eukaryotes.txt](ftp://ftp.ncbi.nlm.nih.gov/genomes/GENOME_REPORTS/eukaryotes.txt) (дата обращения: 1.08.2015).
4. Vicedomini R., Vezzi F., Scalabrin S., Arvestad L., Policriti A. GAM-NGS: genomic assemblies merger for next generation sequencing // *BMC Bioinformatics*. 2013. Vol. 14(Suppl.7), No. 1. P. 1–18. DOI: 10.1186/1471-2105-14-S7-S6.
5. Yao G., Ye L., Gao H., Min P., Warren W.C., Weinstock G.M. Graph accordance of next-generation sequence assemblies // *Bioinformatics*. 2012. Vol. 28, No. 1. P. 13–16. DOI: 10.1093/bioinformatics/btr588.
6. Zimin A.V., Smith D.R., Sutton G., Yorke J.A. Assembly reconciliation // *Bioinformatics*. 2008. Vol. 24, No. 1. P. 42–45. DOI: 10.1093/bioinformatics/btm542.
7. Zorro – The masked assembler. URL: <http://lge.ibi.unicamp.br/zorro/> (дата обращения: 22.07.2015).
8. European Nucleotide Archive. URL: <http://www.ebi.ac.uk/ena/data/view/SRR122309> (дата обращения: 1.08.2015).
9. Encephalitozoon cuniculi GB-M1. URL: [http://www.ncbi.nlm.nih.gov/genome/39?genome\\_assembly\\_id=22671](http://www.ncbi.nlm.nih.gov/genome/39?genome_assembly_id=22671) (дата обращения: 1.08.2015).
10. Gurevich A., Saveliev V., Vyahhi N., Tesler G. QUASt: quality assessment tool for genome assemblies // *Bioinformatics*. 2013. Vol. 29, No. 8. P. 1072–1075. DOI: 10.1093/bioinformatics/btt086.
11. Koren S., Treangen T.J., Hill C.M., Pop M., Phillippy A.M. Automated ensemble assembly and validation of microbial genomes // *BMC Bioinformatics*. 2014. Vol. 15, No. 5. P. 126–134. DOI: 10.1186/1471-2105-15-126.
12. Simpson J.T., Durbin R. Efficient construction of an assembly string graph using the FM-index // *Bioinformatics*. 2010. Vol. 26, No. 12. P. 367–373. DOI: 10.1093/bioinformatics/btq217.

Романенков Кирилл Владимирович, аспирант кафедры суперкомпьютеров и квантовой информатики факультета Вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет (Москва, Российская Федерация), [kromanenkov2@yandex.ru](mailto:kromanenkov2@yandex.ru).

Сальников Алексей Николаевич, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник факультета Вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет (Москва, Российская Федерация), [salnikov@cs.msu.ru](mailto:salnikov@cs.msu.ru).

Алексеевский Андрей Владимирович, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Научно-исследовательский институт физико-химической биологии им. А.Н. Белозерского (Москва, Российская Федерация), [aba@belozersky.msu.ru](mailto:aba@belozersky.msu.ru).

*Поступила в редакцию 17 августа 2015 г.*



## PARALLEL MERGING METHOD TO INTEGRATE DIFFERENT GENOME ASSEMBLIES

**K.V. Romanenkov**, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

**A.N. Salnikov**, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

**A.V. Alexeevski**, A.N. Belozersky Institute Of Physico-Chemical Biology, Moscow, Russian Federation

In this paper research in the field of application multiprocessor systems for genome assemblies reconciliation has been carried out. A large number of algorithmic approaches aimed to solve the task of *de novo* assembly from short reads, however the results of their work on the same raw data often differ essentially. Due to the large data volume the computations in the distributed memory model on computational cluster are required. Authors develop merging algorithm to integrate different genome assemblies based on distributed weighted contig graph. The proposed method integrates a combination of draft assemblies reducing resulting contigs fragmentation. Sequential version of the algorithm is implemented in C/C++ and is available at <https://bitbucket.org/kromanenkov/gar>.

*Keywords: bioinformatics, multiprocessor systems, parallel algorithms.*

### FOR CITATION

Romanenkov K.V., Salnikov A.N., Alexeevski A.V. Parallel Merging Method to Integrate Different Genome Assemblies. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2016. vol. 5, no. 1. pp. 24–34. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160103.

### References

1. Miller J.R., Koren S., Sutton G. Assembly algorithms for next-generation sequencing data. *Genomics*. 2010. vol. 95, no. 6. pp. 315–327. DOI: 10.1016/j.ygeno.2010.03.001.
2. NCBI, Assembly database, human genome. URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/assembly/883148> (accessed: 1.08.2015).
3. The meta-information about the eukaryotes' genomes on NCBI site. URL: [ftp://ftp.ncbi.nlm.nih.gov/genomes/GENOME\\_REPORTS/eukaryotes.txt](ftp://ftp.ncbi.nlm.nih.gov/genomes/GENOME_REPORTS/eukaryotes.txt) (accessed: 1.08.2015).
4. Vicedomini R., Vezzi F., Scalabrin S., Arvestad L., Policriti A. GAM-NGS: genomic assemblies merger for next generation sequencing. *BMC Bioinformatics*. 2013. vol. 14(suppl.7), no. 1. pp. 1–18. DOI: 10.1186/1471-2105-14-S7-S6.
5. Yao G., Ye L., Gao H., Min P., Warren W.C., Weinstock G.M. Graph accordance of next-generation sequence assemblies. *Bioinformatics*. 2012. vol. 28, no. 1. pp. 13–16. DOI: 10.1093/bioinformatics/btr588.

6. Zimin V.A., Smith D.R., Sutton G., Yorke J.A. Assembly reconciliation. *Bioinformatics*. 2008. vol. 24, no. 1. pp. 42–45. DOI: 10.1093/bioinformatics/btm542.
7. Zorro – The masked assembler. URL: <http://lge.ibi.unicamp.br/zorro/> (accessed: 22.07.2015).
8. European Nucleotide Archive. URL: <http://www.ebi.ac.uk/ena/data/view/SRR122309> (accessed 1.08.2015).
9. *Encephalitozoon cuniculi* GB-M1. URL: [http://www.ncbi.nlm.nih.gov/genome/39?genome\\_assembly\\_id=22671](http://www.ncbi.nlm.nih.gov/genome/39?genome_assembly_id=22671) (accessed: 1.08.2015).
10. Gurevich A., Saveliev V., Vyahhi N., Tesler G. QUASt: quality assessment tool for genome assemblies. *Bioinformatics*. 2013. vol. 29, no. 8. pp. 1072–1075. DOI: 10.1093/bioinformatics/btt086.
11. Koren S., Treangen T.J., Hill C.M., Pop M., Phillippy A.M. Automated ensemble assembly and validation of microbial genomes. *BMC Bioinformatics*. 2014. vol. 15, no. 5. pp. 126–134. DOI: 10.1186/1471-2105-15-126.
12. Simpson J.T., Durbin R. Efficient construction of an assembly string graph using the FM-index. *Bioinformatics*. 2010. vol. 26, no. 12. pp. 367–373. DOI: 10.1093/bioinformatics/btq217.

*Received August 17, 2015.*

# О РЕШЕНИИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ ЭТОГО МЕТОДА

*В.П. Танана, А.И. Сидикова*

Рассматривается одномерное интегральное уравнение Фредгольма I рода с замкнутым ядром, имеющее единственное в пространстве  $W_2^1[a, b]$  решение. Для решения данного уравнения используется метод регуляризации А.Н. Тихонова первого порядка. Этот метод позволяет свести данное уравнение к вариационной задаче, решая которую приходим к интегродифференциальному уравнению второго порядка. Для решения этого уравнения использован метод конечноразностной аппроксимации, который позволяет свести исходную задачу к системе алгебраических уравнений.

В работе приведена оценка погрешности, предложенного алгоритма, которая учитывает погрешность конечноразностной аппроксимации уравнения и позволяет увязать ее с параметром регуляризации и погрешностью исходных данных.

Этот алгоритм использован для решения задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости.

*Ключевые слова:* регуляризация, метод невязки, модуль непрерывности, оценка погрешности, некорректная задача.

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Танана В.П., Сидикова А.И. О решении методом регуляризации А.Н. Тихонова одной обратной задачи физики твердого тела и оценка погрешности этого метода // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 35–46. DOI: 10.14529/cmse160104.

## Введение

Многочисленные практически важные задачи приводят к некорректно поставленным задачам, как, например, уравнениям Фредгольма первого рода. При численном решении некорректных задач возникает проблема дискретизации исходной задачи, то есть замены непрерывной математической модели некоторым ее конечномерным аналогом. Наиболее употребительным способом дискретизации является конечноразностный, при котором нахождение приближенного решения обычно сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений.

В данной работе рассмотрен метод регуляризации А.Н. Тихонова [1] для решения одной обратной задачи физики твердого тела [2]. Используемый в работе конечноразностный вариант метода регуляризации при решении данной задачи подробно описан в работе [3], но в ней отсутствует обоснование данного алгоритма. В частности, нет увязки параметров дискретизации с исходными данными задачи, а также значение параметра регуляризации никак не зависит от погрешности дискретизации. В [3] отсутствует оценка погрешности предложенного алгоритма.

В данной работе даны ответы на все указанные вопросы. Для этой цели использована теория, развитая в работе [4] для интегральных уравнений Фредгольма первого рода. На ее основе получена оценка погрешности в интегральном операторе, вызванная его дис-

кретизацией. Значение параметра  $\alpha$ , определенного из принципа невязки [5], в методе регуляризации увязано не только с погрешностью исходных данных, но и с погрешностью дискретизации.

Использование данного подхода проиллюстрировано на примере задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости. Исследование возможности выявления тонкой структуры, в первую очередь, количества, положения и величины пиков функции и разработка для этого эффективных, т.е. требующих минимальной априорной информации и оптимальных по точности методов решения некорректно поставленных задач, имеет важное теоретическое и практическое значение, не ограничивающееся рамками рассматриваемой обратной задачи.

В разделе 1 рассматривается одномерное интегральное уравнение Фредгольма I рода с замкнутым ядром, имеющее единственное в пространстве  $W_2^1[a, b]$  решение. В разделе 2,3 исследован регуляризирующий алгоритм приближенного решения интегрального уравнения первого рода, включающий конечномерную аппроксимацию исходной задачи. Получена оценка погрешности этого алгоритма, использующего дискретизацию интегрального уравнения первого рода по двум переменным. В разделе 4 данный подход проиллюстрирован на примере задачи определения фононного спектра кристалла по его теплоемкости.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s, t)u(s)ds = f(t), \quad c \leq t < d, \quad (1)$$

где  $P(s, t) \in C([a, b] \times [c, d))$ ,  $d$ — может быть  $\infty$ ,  $f(t) \in L_2[c, d)$  и ядро  $P(s, t)$  оператора  $A$  замкнуто.

Предположим, что при  $f(t) = f_0(t)$  существует точное решение  $u_0(s)$  уравнения (1), которое принадлежит множеству  $M_r$ , где

$$M_r = \left\{ u(s) : u(s), u'(s) \in L_2[a, b], u(a) = 0, \int_a^b [u'(s)]^2 ds \leq r^2 \right\}, \quad (2)$$

а  $u'(s)$ — производная  $u(s)$  по  $s$ .

Из замкнутости ядра  $P(s, t)$  следует единственность решения  $u_0(s)$  уравнения (1).

Пусть точное значение  $f_0(t)$  нам неизвестно, а вместо него даны  $f_\delta(t) \in L_2[c, d)$  и  $\delta > 0$  такие, что

$$\|f_\delta(t) - f_0(t)\| \leq \delta.$$

Требуется по  $f_\delta(t)$ ,  $\delta$  и  $M_r$  определить приближенное решение  $u_\delta(s)$  и оценить его отклонение от точного решения  $u_0(s)$  в метрике пространства  $L_2[a, b]$ .

Сделаем некоторые преобразования уравнения (1). Для этого введем оператор  $B$ , отображающий пространство  $L_2[a, b]$  в  $L_2[a, b]$ , формулой

$$u(s) = Bv(s) = \int_a^s v(\xi)d\xi, \quad v(s), Bv(s) \in L_2[a, b]. \quad (3)$$

Оператор  $C$  зададим следующим образом:

$$Cv(s) = ABv(s); \quad v(s) \in L_2[a, b], Cv(s) \in L_2[c, d). \quad (4)$$

Из (3) и (4) следует, что

$$Cv(s) = \int_a^b K(s, t)v(s)ds, \quad (5)$$

где

$$K(s, t) = \int_b^s P(\xi, t)d\xi. \quad (6)$$

Для численного решения уравнения (1) аппроксимируем оператор  $C$  конечномерным оператором  $C_n$ .

Для определения оператора  $C_n$  разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  равных частей и введем функции  $\bar{K}_i(t)$  и  $K_n(s, t)$  формулами

$$\bar{K}_i(t) = K(\bar{s}_i, t), \quad (7)$$

где  $\bar{s}_i = \frac{s_i + s_{i+1}}{2}$ ,  $s_{i+1} = a + \frac{(i+1)(b-a)}{n}$ ,  $s_i = a + \frac{i(b-a)}{n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ , и

$$K_n(s, t) = \bar{K}_i(t); \quad s_i \leq s < s_{i+1}, \quad t \in [c, d], \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (8)$$

Используя (8), определим конечномерный оператор  $C_n$  формулой

$$C_nv(s) = \int_a^b K_n(s, t)v(s)ds; \quad t \in [c, d], \quad (9)$$

где  $C_n$  отображает пространство  $L_2[a, b]$  в  $L_2[c, d]$ .

Теперь оценим величину  $\|C_n - C\|$ .

Для этого введем функцию  $N(t)$  формулой

$$N(t) = \max_{a \leq s \leq b} |P(s, t)|, \quad t \in [c, d]. \quad (10)$$

Так как  $P(s, t) \in C([a, b] \times [c, d])$ , то из (10) следует, что

$$N(t) \in C[c, d].$$

Дополнительно предположим, что

$$N(t) \in L_2[c, d].$$

Используя функцию  $N(t)$ , определенную (10), перейдем к оценке  $\|C_n - C\|$ .

**Лемма 1.** Пусть  $h = \frac{b-a}{n}$ , а операторы  $C$  и  $C_n$  определены формулами (5) и (9). Тогда справедлива оценка

$$\|C_n - C\| \leq h\sqrt{b-a}\|N(t)\|_{L_2}.$$

*Доказательство.* Так как из (5) и (9) следует, что

$$Cv(s) - C_nv(s) = \int_a^b (K(s, t) - K_n(s, t))v(s)ds,$$

а

$$\|C_n - C\|^2 \leq \sup \left\{ \int_c^d \left[ \int_a^b |K_n(s, t) - K(s, t)| |v(s)| ds \right]^2 dt : \|v\| \leq 1 \right\},$$

то, учитывая (7), (8), (10) и то, что

$$\int_a^b |K_n(s, t) - K(s, t)| |v(s)| ds \leq \int_a^b |K(s, t) - K(\bar{s}_i, t)| |v(s)| ds \leq h \cdot N(t) \int_a^b |v(s)| ds,$$

$$\|C_n - C\|^2 \leq h^2 \int_c^d N^2(t) \left[ \int_a^b |v(s)| ds \right]^2 dt. \quad (11)$$

Из того, что  $\|v(s)\| \leq 1$ , а  $\int_a^b |v(s)| ds \leq \sqrt{b-a} \|v(s)\|$ , учитывая (11), получим

$$\|C_n - C\| \leq \sqrt{b-a} \|N(t)\|_{L_2} h.$$

Тем самым лемма доказана.  $\square$

В дальнейшем величину  $h\sqrt{b-a} \|N(t)\|_{L_2}$  будем обозначать через  $\eta_n$ .

## 2. Метод невязки

Введем конечномерное подпространство  $X_n$  пространства  $L_2[a, b]$ , состоящее из функций, постоянных на промежутках  $[s_i, s_{i+1})$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

Через  $Y_n$  обозначим подпространство пространства  $L_2[c, d]$ , определяемое формулой

$$Y_n = C_n X_n.$$

Через  $f_\delta^n(t)$  обозначим функцию пространства  $Y_n$ , определяемую формулой

$$f_\delta^n(t) = pr(f_\delta; Y_n),$$

где  $pr(f_\delta; Y_n)$  метрическая проекция в пространстве  $L_2[c, d]$  функции  $f_\delta(t)$  на  $Y_n$ .

Для решения уравнения (1) воспользуемся конечномерным вариантом метода регуляризации А.Н. Тихонова [1]

$$\inf \left\{ \|C_n v(s) - f_\delta^n(t)\|^2 + \alpha \int_a^b v^2(s) ds : v(s) \in X_n \right\}, \quad \alpha > 0. \quad (12)$$

Известно, что задача (12) имеет единственное решение  $v_{\delta n}^\alpha(s)$ . Значение параметра регуляризации  $\alpha$  в решение  $v_{\delta n}^\alpha(s)$  задачи (12) выберем из принципа невязки [5].

$$\|C_n v_{\delta n}^\alpha(s) - f_\delta^n(t)\| = \delta + r\eta_n, \quad (13)$$

Известно, что при условии

$$\|f_\delta^n(t)\| > r\eta_n + \delta$$

существует единственное решение  $\alpha(\delta, n)$  уравнения (13).

Если решение  $v_{\delta n}^{\alpha(\delta, n)}(s)$  задачи (12), (13) обозначим через  $v_{\delta n}(s)$ , то приближенное решение  $u_{\delta n}(s)$  уравнения (1) будет иметь вид

$$u_{\delta n}(s) = Bv_{\delta n}(s).$$

Для сведения задачи (12) к системе линейных алгебраических уравнений, в пространстве  $X_n$  введем ортонормированный базис  $\{\varphi_i(s)\}$  формулой

$$\varphi_i(s) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{b-a}}; & s_i \leq s < s_{i+1}; \\ 0; & s \notin [s_i, s_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases}$$

Используя этот базис, определим изометричный оператор  $J_x$ , отображающий  $R^n$  на  $X_n$ , формулой

$$J_x[\bar{x}](s) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \varphi_i(s), \quad \bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (14)$$

Используя оператор  $J_x$  для замены переменных в задаче (12), сведем ее к следующей

$$\inf\{\|C_n J_x[J_x^{-1}v(s)] - f_{\delta}^n(t)\|_{Y_n}^2 + \alpha\|J_x^{-1}[v(s)]\|_{R^n}^2 : J_x^{-1}[v(s)] \in R^n\}, \quad (15)$$

где  $J_x^{-1}$  оператор, обратный оператору  $J_x$ .

Задача (15) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений

$$h \sum_{i=0}^{n-1} b_{ij} v_i + \alpha v_j = q_j; \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (16)$$

где  $b_{ij} = \int_c^d \bar{K}_i(t) \bar{K}_j(t) dt$ ,  $q_j = \sqrt{h} \int_c^d \bar{K}_j(t) f_{\delta}^n(t) dt$ .

**Теорема 1.** Пусть  $v_{\delta n}^{\alpha(\delta, n)}(s)$  и  $(v_i^{\alpha})$  решение задач (12) и (16) соответственно.

Тогда эти решения связаны соотношением

$$v_{\delta n}^{\alpha(\delta, n)}(s) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i^{\alpha} \varphi_i(s). \quad (17)$$

Доказательство этой теоремы приведено в [4].

Решение системы (16) обозначим через  $\bar{v}^{\alpha} = (v_0^{\alpha}, v_1^{\alpha}, \dots, v_{n-1}^{\alpha})$ .

Для выбора параметра регуляризации уравнение (13) сведем к следующему

$$\left\{ \int_a^b \left[ \sqrt{h} \sum_{i=0}^{n-1} \bar{K}_i(t) v_i^{\alpha} - f_{\delta}^n(t) \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = r\eta_n + \delta. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) обозначим через  $\alpha(\delta, n)$ . Тогда решение задачи (16), (18) обозначим через  $\bar{v}^{\alpha(\delta, n)}$ .

**Теорема 2.** Пусть оператор  $J_x$  определен формулой (14),  $v_{\delta n}(s)$  — решение задачи (12), (13), а  $\bar{v}^{\alpha(\delta, n)}$  — решение системы (16), (18). Тогда эти решения связаны соотношением

$$v_{\delta n}(s) = J_x[\bar{v}^{\alpha(\delta, n)}](s).$$

Методика доказательства этой теоремы приведена в [4].

### 3. Оценка погрешности приближенного решения $u_{\delta n}(s)$

Для оценки погрешности введем функцию

$$\omega(\tau, r) = \sup\{\|u(s)\| : u(s) = Bv(s), \|v(s)\| \leq r, \|Au(s)\| \leq \tau\}, \quad \tau, r > 0.$$

Из теоремы, сформулированной в [6], следует

**Теорема 3.** Пусть  $u_{\delta n}(s)$  приближенное решение уравнения (1), а  $u_0(s)$  — его точное решение. Тогда

$$\|u_{\delta n}(s) - u_0(s)\| \leq 2\omega(r\eta_n + \delta, r). \quad (19)$$

### 4. Численное решение задачи определения фононного спектра кристалла

Связь энергетического спектра бозе-системы с ее теплоемкостью, зависящей от температуры, описывается интегральным уравнением первого рода

$$Au(s) = \int_a^b P(s, t)u(t)ds = \frac{f(t)}{t}; \quad 0 \leq t < \infty, \quad b > a > 0, \quad (20)$$

где  $P(s, t) = \frac{s^2}{2t^3 \operatorname{sh}^2\left(\frac{s}{2t}\right)}$ ,  $u(s) \in L_2[a, b]$ ,  $\frac{f(t)}{t} \in L_2[0, \infty)$ ,  $u(s)$  — спектральная

плотность кристалла, а  $f(t)$  — его теплоемкость, зависящая от температуры [2].

Предположим, что при  $f(t) = f_0(t)$  существует точное решение  $u_0(s)$  уравнения (20), которое принадлежит множеству  $M_r$ , где

$$M_r = \left\{ u(s) : u(s), u'(s) \in L_2[a, b], u(a) = 0, \int_a^b [u'(s)]^2 ds \leq r^2 \right\},$$

$r$  известное число,  $u'(s)$  — производная от функции  $u(s)$  по  $s$ .

Пусть точное значение  $f_0(t)$  нам неизвестно, а вместо него даны  $f_\delta(t)$  и  $\delta > 0$  такие, что  $\frac{f_\delta(t)}{t} \in L_2[0, \infty)$ , а

$$\left\| \frac{f_\delta(t)}{t} - \frac{f_0(t)}{t} \right\|_{L_2} \leq \delta.$$

Требуется по  $f_\delta(t)$ ,  $\delta$  и  $M_r$  определить приближенное решение  $u_\delta(s)$  и оценить его отклонение от точного решения  $u_0(s)$  в метрике пространства  $L_2[a, b]$ .

Заметим, что единственность решения уравнения (20) доказана в [7].

Введем оператор  $B$ , отображающий пространство  $L_2[a, b]$  в  $L_2[a, b]$ , формулой

$$u(s) = Bv(s) = \int_a^s v(\xi)d\xi, \quad v(s), Bv(s) \in L_2[a, b]$$



и оператор  $C$

$$Cv(s) = ABv(s); \quad v(s) \in L_2[a, b], Cv(s) \in L_2[0, \infty).$$

Из (3) и (6) следует, что

$$Cv(s) = \int_a^b K(s, t)v(s)ds, \quad \text{где } K(s, t) = \int_b^s P(\xi, t)d\xi.$$

Теперь, для замены оператора  $C$  конечномерным оператором  $C_n$ , воспользуемся конструкцией, описанной формулами (7)–(9). Тогда

$$C_nv(s) = \int_a^b K_n(s, t)v(s)ds; \quad t \in [0, \infty),$$

где  $K_n(s, t)$  определена формулой (8) и  $C_n$  отображает пространство  $L_2[a, b]$  в  $L_2[0, \infty)$ .

После этого перейдем к оценке погрешности дискретизации, то есть оценим величину  $\|C_n - C\|$ .

Из леммы 1 следует, что

$$\|C_n - C\| \leq \sqrt{b-a} \|N(t)\|_{L_2} h, \tag{21}$$

где  $h = \frac{b-a}{n}$ , а  $N(t)$ , следуя (10), определяется формулой

$$N(t) = \max_{a \leq s \leq b} |P(s, t)|, \quad t \in [0, \infty). \tag{22}$$

Из (20) и (22) следует, что

$$N(t) \leq \frac{b^2}{2t^3 \operatorname{sh}^2\left(\frac{a}{2t}\right)}. \tag{23}$$

Таким образом, из (23) следует, что при  $t \rightarrow \infty$

$$\frac{b^4}{4t^6 \operatorname{sh}^4\left(\frac{a}{2t}\right)} \cong \left(\frac{b}{\sqrt{2}a}\right)^4 \frac{1}{t^2}, \tag{24}$$

а при  $t \rightarrow 0$

$$\frac{b^4}{4t^6 \operatorname{sh}^4\left(\frac{a}{2t}\right)} \rightarrow 0. \tag{25}$$

Из (24) и (25) следует, что

$$\frac{b^2}{2t^3 \operatorname{sh}^2\left(\frac{a}{2t}\right)} \in L_2[0, \infty), \tag{26}$$

а, следовательно, и  $N(t) \in L_2[0, \infty)$ .

Из (21), (23) и (26) следует, что

$$\|C_n - C\| \leq \sqrt{b-a} \frac{b^2}{2} \left[ \int_0^\infty \frac{dt}{t^6 \operatorname{sh}^4\left(\frac{a}{2t}\right)} \right]^{\frac{1}{2}} h = \eta_m. \quad (27)$$

Для решения уравнения (20) используем конечномерный вариант метода регуляризации А.Н. Тихонова [1]

$$\inf \left\{ \left\| C_n v(s) - \frac{f_\delta(t)}{t} \right\|_{L_2}^2 + \alpha \int_a^b [v(s)]^2 ds \quad : \quad v(s) \in X_n \right\}, \quad \alpha > 0. \quad (28)$$

Обозначим через  $f_\delta^n(t)$  функцию пространства  $Y_n$ , определяемую формулой

$$f_\delta^n(t) = pr \left( \frac{f_\delta(t)}{t}; Y_n \right),$$

где  $Y_n$  определено в разделе 2, а  $pr \left( \frac{f_\delta(t)}{t}; Y_n \right)$  — метрическая проекция функции  $\frac{f_\delta(t)}{t}$  на  $Y_n$ .

Известно, что задача (28) имеет единственное решение  $v_{\delta n}^\alpha(s)$ . Значение параметра регуляризации  $\alpha$  в решении  $v_{\delta n}^\alpha(s)$  выберем из принципа невязки [5]

$$\left\| C_n v_{\delta n}^\alpha(s) - f_\delta^n(t) \right\| = \delta + r\eta_m. \quad (29)$$

При условии

$$\|f_\delta^n(t)\|_{L_2} > r\eta_m + \delta$$

уравнение (29) имеет единственное решение  $\alpha(\delta, n)$ .

Если решение  $v_{\delta n}^{\alpha(\delta, n)}(s)$  задачи (28), (29) обозначим через  $v_{\delta n}(s)$ , то приближенное решение  $u_{\delta n}(s)$  уравнения (20) имеет вид

$$u_{\delta n}(s) = Bv_{\delta n}(s).$$

Для сведения задачи (27) к системе линейных алгебраических уравнений воспользуемся изометричным оператором  $J_x$ , отображающим  $R^n$  на  $X_n$  формулой

$$J_x[\bar{x}](s) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \varphi_i(s), \quad \bar{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}),$$

где  $\{\varphi_i(s)\}$  — ортонормированный базис пространства  $X_n$ , введенный в разделе 2.

Используя оператор  $J_x$ , сведем задачу (27) к следующей

$$\inf \{ \|C_n J_x [J_x^{-1} v(s)] - f_\delta^n(t)\|^2 + \alpha \|J_x^{-1} [v(s)]\|_{R^n}^2 \quad : \quad J_x^{-1} [v(s)] \in R^n \}, \quad (30)$$

где  $J_x^{-1}$  оператор, обратный оператору  $J_x$ .

Задача (30) эквивалентна системе линейных алгебраических уравнений (16)

$$h \sum_{i=0}^{n-1} b_{ij} v_i + \alpha v_j = q_j; \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (31)$$

где  $b_{ij} = \int_0^\infty \overline{K}_i(t)\overline{K}_j(t)dt$ , а  $q_j = \sqrt{h} \int_0^\infty \overline{K}_j(t)f_\delta^n(t)dt$ .

Решение системы (31) обозначим через  $(v_i^\alpha)$ , а следуя теореме 1, решение задач (27) и (31) связаны соотношением

$$v_{\delta n}^\alpha(s) = \sum_{i=0}^{n-1} v_i^\alpha \varphi_i(s).$$

Для выбора параметра  $\alpha$  в решение  $\overline{v}^\alpha$  системы (31) используем уравнение (29), которое в дискретном варианте перейдет в уравнение (18)

$$\left\{ \int_0^\infty \left[ \sqrt{h} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{K}_i(t)v_i^\alpha - f_\delta^n(t) \right]^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} = r\eta_n + \delta.$$

Решение системы уравнений (31) и (18) обозначим через  $\overline{v}^{\alpha(\delta,n)}$ .

Из теоремы 2 будет следовать, что решение задачи (27), (29) имеет вид

$$v_{\delta n}(s) = J_x[\overline{v}^{\alpha(\delta,n)}](s).$$

Используя формулу (20), получим приближенное решение  $u_{\delta n}(s)$  уравнения (17)

$$u_{\delta n}(s) = Bv_{\delta n}(s).$$

Из соотношения (19) следует оценка уклонения приближенного решения  $u_{\delta n}(s)$  уравнения (27) от его точного решения  $u_0(s)$  в метрике пространства  $L_2[a, b]$

$$\|u_{\delta n}(s) - u_0(s)\| \leq 2\omega(r\eta_n + \delta, r). \quad (32)$$

В работе [8] доказано, что для уравнения (27) на множестве  $M_r$ , определенном формулой (2), для модуля непрерывности  $\omega(\sigma, r)$  справедлива оценка

$$\omega(\sigma, r) \leq r \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \ln^2 \left( \frac{r}{4\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

Из (32) и (33) получим окончательную оценку

$$\|u_{\delta n}(s) - u_0(s)\| \leq 2r \left[ 1 + \frac{1}{\pi} \ln^2 \left( \frac{r}{4(r\eta_n + \delta)} \right) \right]^{-\frac{1}{2}}.$$

## Заключение

Фундаментальная научная проблема связана с обоснованием новых численных методов. При численном решении обратных задач одним из важнейших показателей используемого метода является его точность и, как следствие, наилучшая информативность приближенного решения. С возрастанием объема экспериментальной информации и улучшением ее качества (повышением точности наблюдений) для интерпретации эксперимента необходимо применять новые более полные математические модели и решать обратные задачи в рамках этих моделей новыми методами. Работа направлена на решение фундаментальной проблемы, связанной с исследованием точности этих методов, применимых для решения обратных задач математической физики в новых постановках, а также на разработку новых оптимальных и оптимальных по порядку методов и их программную реализацию.

В данной работе усилены результаты работы [8] за счет учета погрешности дискретизации интегрального уравнения. Показано, что для применения численных методов не требуется значительных преобразований физической модели. Это позволяет учитывать априорную информацию при решении задачи. Разработанный метод использован для численного решения одной обратной задачи физики твердого тела. Главная трудность этих задач заключается в том, что они, с одной стороны, являются некорректными, а с другой — имеют решение сложного вида.

## Литература

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963. Т. 151, № 3. С. 501–504.
2. Лифшиц И.М. Об определении энергетического спектра бозе-системы по ее теплоемкости // Журн. эксперимент. и теор. физики. 1959. Т. 26, № 5. С. 551–556.
3. Иверонова В.И., Тихонов А.Н., Заикин П.Н., Звягина А.П. Определение фононного спектра кристаллов по теплоемкости // Физика твердого тела. 1966. Т. 8, № 12. С. 3459–3462.
4. Танана В.П., Сидикова А.И. Об оценке погрешности регуляризирующего алгоритма, основанного на обобщенном принципе невязки, при решении интегральных уравнений // Журн. вычисл. методы и програм. 2015. Т. 16, № 1. С. 1–9.
5. Морозов В.А. О регуляризации некорректно поставленных задач и выборе параметра регуляризации // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1966. Т. 6, № 1. С. 170–175.
6. Иванов В.К., Королюк Т.И. Об оценке погрешности при решении линейных некорректно поставленных задач // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9, № 1. С. 30–41.
7. Танана В.П., Бояршинов В.В. О единственности решения обратной задачи определения фононных спектров кристалла // Деп. в ВИНТИ. 1987. № 892-В87.
8. Танана В.П., Ерыгина А.А. Оценка погрешности метода регуляризации А.Н. Тихонова при решении одной обратной задачи физики твердого тела // Сиб. журн. индустр. матем. 2014. Т. 17, № 2. С. 125–136.

Танана Виталий Павлович, д.ф.-м.н., зав. кафедрой вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), tvpa@susu.ac.ru

Сидикова Анна Ивановна, к.ф.-м.н., доцент кафедры вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), sidikovaai@susu.ru

*Поступила в редакцию 10 сентября 2015 г.*

ON SOLUTION OF SOLID STATE PHYSICS INVERSE  
PROBLEM BY MEANS OF A. N. TIKHONOV’S  
REGULARIZATION METHOD AND ESTIMATION  
OF THE ERROR OF THIS METHOD

*V.P. Tanana*, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

*A.I. Sidikova*, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The paper considers one-dimensional Fredholm integral equation of the first kind with a closed core. It is known that the equation has a unique solution in the space  $W_2^1[a, b]$ . We use Tikhonov’s regularization method of the first-order to solve the equation. The method allows us to reduce the equation to a variational problem. Solving the variational problem we get integro-differential equation of second order. We apply the finite-difference approximation method to reduce the original problem to a system of algebraic equations. regularization parameter.

We obtain an error estimate for the proposed algorithm taking into account the error of finite-difference approximation and state the relation between the approximation with the error and the regularization parameter and the error of the initial data.

This algorithm is used to solve the problem of determining the phonon spectrum of the crystal given its heat capacity.

*Keywords: regularization, the method of residuals, the modulus of continuity, error estimation, ill-posed problem.*

FOR CITATION

Tanana V.P., Sidikova A.I. On Solution of Solid State Physics Inverse Problem by Means of A. N. Tikhonov’s Regularization Method and Estimation of the Error of this Method. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering.* 2016. vol. 5, no. 1. pp. 35–46. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160104.

References

1. Tihonov A.N. O reshenii nekorektno postavlenykh zadach i metode regulyarizacii [Solution of Incorrectly Formulated Problems and the Regularized Method]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Doklady Mathematics]. 1963. vol. 151, no. 3. pp. 501–504. (in Russian)
2. Lifshis I.M. Ob opredelenii energeticheskogo spectra boze-sistemy po teployomkosti [On determining the energy spectrum of the Bose system in her heat]. *Gurnal eksperimental’noi i teoreticheskoi fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics]. 1959. vol. 26, no. 5. pp. 551–556. (in Russian)
3. Iveronova V.I., Tihonov A. N., Zaikin P.N., Zvyagina A.P. Opredelenie fononnogo spectra kristallov po teployomkosti [The determination of the phonon spectrum of crystals on the heat capacity]. *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State]. 1966. vol. 8, no. 12. pp. 3459–3462. (in Russian)

4. Tanana V.P., Sidikova A.I. Ob ocenke pogreshnosti regularizuyshogo algoritma, osnovannogo na obobshennom principe nevyazki, pri reshenii integral'nyh uravnenii [An Error Estimate of a Regularizing Algorithm Based of the Generalized Residual Principle when Solving Integral Equations]. *Jurnal vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Numerical Methods and Programming]. 2015. vol. 16, no. 1. pp. 1–9. (in Russian)
5. Morozov V.A. O regularizacii nekorrektno postavlennykh zadach i vybere parametra regularizacii [On the regularization of ill-posed problems and the choice of the regularization parameter]. *Jurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoy fiziki* [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1966. vol. 6, no. 1. pp. 170–175. (in Russian)
6. Ivanov V. K., Korolyuk T.I. Ob ocenke pogreshnosti pri reshenii lineinykh nekorrektno postavlennykh zadach [Error Estimates for Solutions of Incorrectly Posed Linear Problems]. *Jurnal vychislitel'noi matematiki i matematicheskoy fiziki* [USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 1969. vol. 9, no. 1. pp. 30–41. (in Russian)
7. Tanana V.P., Boyarshinov V.V. [On the uniqueness of the solution of the inverse problem of determining the phonon spectra of the crystal]. *Deponirovano v VINITI* [Deposited in VINITI]. 1987. no. 892-V87. (in Russian)
8. Tanana V.P., Erygina A.A. Ocenka pogreshnosti metoda regularizacii A.N. Tikhonova pri reshenii odnoi obratnoi zadachi fiziki tverdogo tela [An error estimate for the regularization method of A.N. Tikhonov for solving an inverse problem of solid state physics]. *Sibirskii jurnal industrial'noi matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics]. 2014. vol. 17, no. 2. pp. 125–136. (in Russian)

*Received September 10, 2015.*

# ТОЧНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВТОРОГО И ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКОВ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ

*А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, М.В. Якобовский*

В работе рассмотрены схемы второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации для решения задачи диффузии-конвекции. Для модельной начально-краевой задачи, в случае когда функции правой части и начального условия представимы конечными суммами рядов Фурье по тригонометрическому базису, исследована точность разностных схем. Установлено, что точность численного решения зависит от количества узлов приходящихся на половину длины волны, соответствующей наиболее высокочастотной гармонике в конечной сумме ряда Фурье, необходимой для описания поведения расчетных объектов. Получены зависимости погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности от количества узлов. Выполнено сопоставление результатов расчета двумерной задачи диффузии-конвекции и задачи Пуассона на основе схем второго и четвертого порядков точности. В работе обоснована целесообразность перехода к схемам повышенного порядка точности при решении прикладных задач и из полученных оценок нетрудно получить численные значения выигрышей во времени счета при использовании схем повышенного порядка точности.

*Ключевые слова:* точность, разностные схемы, уравнение диффузии-конвекции, погрешность аппроксимации.

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Якобовский М.В. Точность численного решения уравнения диффузии-конвекции на основе разностных схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 47–62. DOI: 10.14529/cmse160105.

## Введение

Работа посвящена изучению дискретных аналогов операторов конвективного и диффузионного переноса второго и четвертого порядков точности. Основной целью данной работы является исследование точности разностных схем, аппроксимирующих операторы конвективного и диффузионного переноса, в зависимости от количества узлов, необходимых для описания объекта изучения. В соответствии с поставленной целью решены следующие задачи: выполнена оценка решения при переходе к сеточным функциям; для схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации выполнены оценки погрешности в зависимости от количества узлов; выполнено сопоставление результатов расчета двумерной задачи диффузии-конвекции и задачи Пуассона на основе схем второго и четвертого порядков точности. В работе обоснована целесообразность перехода к схемам повышенного порядка точности при решении прикладных задач. Из полученных оценок нетрудно получить численные значения выигрышей во времени счета при использовании схем повышенного порядка точности.

Настоящая работа является логическим продолжением работы [1], в которой описана построенная библиотека итерационных методов, предназначенных для решения сеточных уравнений с самосопряженными и несамосопряженными операторами при помощи схем по-

вышенного порядка точности, учитывающими заполненности ячеек на многопроцессорной вычислительной системе. Предложенные схемы были разработаны для решения задачи восстановления рельефа дна акватории на основе гидрографической информации [2], а также применены при разработке программного комплекса, предназначенного для расчета трехмерных полей скоростей течений в мелководных водоемах [3].

## 1. Аналитическое решение уравнения диффузии

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для неоднородного уравнения теплопроводности вида

$$u_t' = ku_{xx}'' + f, 0 < x < l, 0 < t < T, \quad (1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u(0, t) = 0, u(l, t) = 0. \quad (2)$$

В отношении функций  $u(x, t)$  и  $f(x, t)$  будем предполагать их представимость в виде рядов Фурье по тригонометрическому базису:

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(u)}(t) \sin(\omega mx), f(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)}(t) \sin(\omega mx), \quad (3)$$

где  $\omega = \pi/l$ ,  $C_m^{(f)} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\omega mx) dx$ ,  $C_m^{(u)} = \frac{2}{l} \int_0^l u(x) \sin(\omega mx) dx$ .

Наряду с задачей (1) – (3), которую будем называть «точной» непрерывной задачей, рассмотрим первую начально-краевую задачу с «усеченной» правой частью

$$f^{(N)}(x, t) = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(f)}(t) \sin(\omega mx), \quad (4)$$

и «усеченными» начальными условиями

$$u_0^{(N)}(x, t) = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(0) \sin(\omega mx), \quad (5)$$

для задачи вида

$$(u^{(N)})_t' = k(u^{(N)})_{xx}'' + f^{(N)}, 0 < x < l, 0 < t < T, \quad (6)$$

$$u^{(N)}(x, 0) = u_0^{(N)}(x), u^{(N)}(0, t) = u^{(N)}(l, t) = 0. \quad (7)$$

Следует отметить, что такая постановка возникает, например, в случае табличного способа задания функции  $f$  и  $u_0$  ряды будут ограничены  $N - 1$  гармониками т.к. для восстановления непрерывной функции применяется интерполяционный тригонометрический полином [4], где  $N$  — количество дискретных значений функции. Оценим «близость» функций  $u(x, t)$  и  $u^{(N)}(x, t)$  — соответственно решения «точной» и «усеченной» задачи, введя функции

$$w^{(N)}(x, t) \equiv u(x, t) - u^{(N)}(x, t), g^{(N)}(x, t) \equiv f(x, t) - f^{(N)}(x, t), v_0^{(N)}(x) \equiv u_0(x) - u_0^{(N)}(x) \quad (8)$$

имеем вспомогательную задачу

$$(w^{(N)})_t' = k(w^{(N)})_{xx}'' + g^{(N)}, 0 < x < l, 0 < t < T, \quad (9)$$



$$w^{(N)}(x, 0) = v_0^{(N)}(x), w^{(N)}(0, t) = w^{(N)}(l, t) = 0. \quad (10)$$

Для решения задачи (9) – (10) справедлива оценка в гильбертовом пространстве  $\mathcal{L}_\infty$  для любого  $t > 0$  [5]:

$$\|w^{(N)}(x, t)\|_\infty \leq \|v_0^{(N)}(x)\|_\infty + \int_0^t \|g^{(N)}(x, \theta)\|_\infty d\theta. \quad (11)$$

Известно, что для класса функций периода  $2\pi$ , имеющих производную порядка  $\alpha$ , удовлетворяющий неравенству  $|\varphi^{(\alpha)}(x)| \leq K$ , имеет место оценка остаточного члена ряда (3) для любого натурального  $\alpha$  [6]:

$$\sup_{0 \leq x \leq l} \left| \varphi(x) - \sum_{m=1}^{N-1} C^{(\varphi)} \sin(mx) \right| = \frac{4K \ln N}{\pi^2 N^\alpha} + O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right). \quad (12)$$

Учитывая оценку (12), а также соотношения (9) – (10), из неравенства (11) получим оценку для любого  $t > 0$

$$\|w^{(N)}(x/\omega, t)\|_\infty \leq 4 \frac{K_1/N^2 + TK_2 \ln N}{\pi^2 N^{\alpha-2}} + O\left(\frac{1}{N^{\alpha-2}}\right), \quad (13)$$

$$K_1 = \max_{0 \leq x \leq l} |u_0^{(\alpha)}(x/\omega)|, K_2 = \max_{0 \leq x \leq l} |f^{(\alpha-2)}(x/\omega, t)|.$$

Оценка (13) гарантирует сходимость решения «усеченной» задачи к решению точной задачи при  $N \rightarrow \infty$  при достаточно гладких входных данных в смысле выполнения неравенства (12), при  $\alpha \geq 3$ . В дальнейшем  $u(x, t)$  предполагается принадлежащей классу  $C^{(4)} [0 \leq x \leq l]$  в случае разностной схемы с погрешностью решения  $O(h^2 + \tau^\beta)$  (см п. 3) и классу  $C^{(6)} [0 \leq x \leq l]$  в случае схемы с погрешностью  $O(h^4 + \tau^\beta)$  (см п. 4), где  $\beta$  зависит от веса схемы. Для остальных функций входящих в постановку исходной задачи (1) – (3) также предполагается необходимая гладкость.

Функции  $u^{(N)}$  и  $f^{(N)}$  при подстановке в (1) приводят к соотношению:

$$\left( \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)} \sin(\omega mx) \right)'_t = k \left( \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)} \sin(\omega mx) \right)''_{xx} + \sum_{n=1}^{N-1} C_n^{(f)} \sin(\omega mx).$$

Меняя очередность операции дифференцирования и суммирования ряда получим:

$$\sum_{m=1}^{N-1} \left( C_m^{(u)}(t) \right)'_t \sin(\omega mx) = \sum_{m=1}^{N-1} k C_m^{(u)} (-\omega^2 m^2 \sin(\omega mx)) + \sum_{n=1}^{N-1} C_n^{(f)} \sin(\omega mx).$$

Принимая во внимание линейную независимость функций  $\sin(\omega mx)$ , получим:

$$\left( C_m^{(u)}(t) \right)'_t = -k\omega^2 m^2 C_m^{(u)} + C_m^{(f)}. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) примет вид:

$$C_m^{(u)}(t) = \left( C_{m,0}^{(u)} - \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2} \right) e^{-k\omega^2 m^2 t} + \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2}.$$

После проделанных преобразований и вычислений, с учетом заданных начальных и граничных условий, будет найдена искомая функция:

$$u = \sum_{m=1}^{N-1} \left( \left( C_{m,0}^{(u)} - \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2} \right) e^{-k\omega^2 m^2 t} + \frac{C_m^{(f)}}{k\omega^2 m^2} \right) \sin(\omega m x). \quad (15)$$

## 2. Точность численного решение уравнения диффузии на основе разностных схем второго порядка погрешности аппроксимации

Для численного решения задачи (1) покроем расчетную область равномерной сеткой:  $w_{h,\tau} = \{t^n = n\tau, x_i = ih; n = \overline{0..N_t}, i = \overline{0..N_x}; N_t\tau = T, N_x h = l\}$ , где  $\tau$  — шаг по времени,  $h$  — шаг по пространству,  $N_t$  — число шагов по времени,  $N_x$  — число узлов по пространственной координате.

Аппроксимация уравнения (1) примет вид [7]:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = k \frac{u_{i+1}^{n+\sigma} - 2u_i^{n+\sigma} + u_{i-1}^{n+\sigma}}{h^2} + f_i, \quad (16)$$

где  $c_i^{n+\sigma} = \sigma c_i^{n+1} + (1 - \sigma) c_i^n$ ,  $\sigma \in [0, 1]$  — вес схемы [8].

Будем использовать представления (4), (5) функций  $u$  и  $f$  при решении задачи (16)

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{m=1}^{N-1} \left( C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n) \right) \sin(\omega m x_i)}{\tau} = \\ & = k \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t^{n+\sigma}) \frac{(\sin(\omega m x_{i+1}) - 2\sin(\omega m x_i) + \sin(\omega m x_{i-1})))}{h^2} + \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(f)} \sin(\omega m x). \end{aligned}$$

Преобразуем полученное выражение и, принимая во внимание линейную независимость функций  $\sin(\omega n x)$ , получим:

$$\frac{C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n)}{\tau} = k \frac{2(\cos(\omega m h) - 1)}{h^2} C_m^{(u)}(t^{n+\sigma}) + C_m^{(f)}. \quad (17)$$

**Лемма 1.** При выполнении оценок (12) аппроксимации задачи (1) – (2) разностными схемами (16) для каждой гармоники функции решения  $u$  скорость диффузионного обмена  $k$  меньше реальных значений и отличаются на величину  $\alpha_1 = 1 - 2(1 - \cos(\omega m h)) / (\omega m h)^2$ .

**Доказательство.** Из (6) при  $\tau \rightarrow 0$  следует:

$$\left( C_m^{(u)}(t) \right)'_t = -k \left( \frac{2(\cos(\omega m h) - 1)}{\omega^2 m^2 h^2} \right) \omega^2 m^2 C_m^{(u)}(t^{n+\sigma}) + C_m^{(f)}.$$

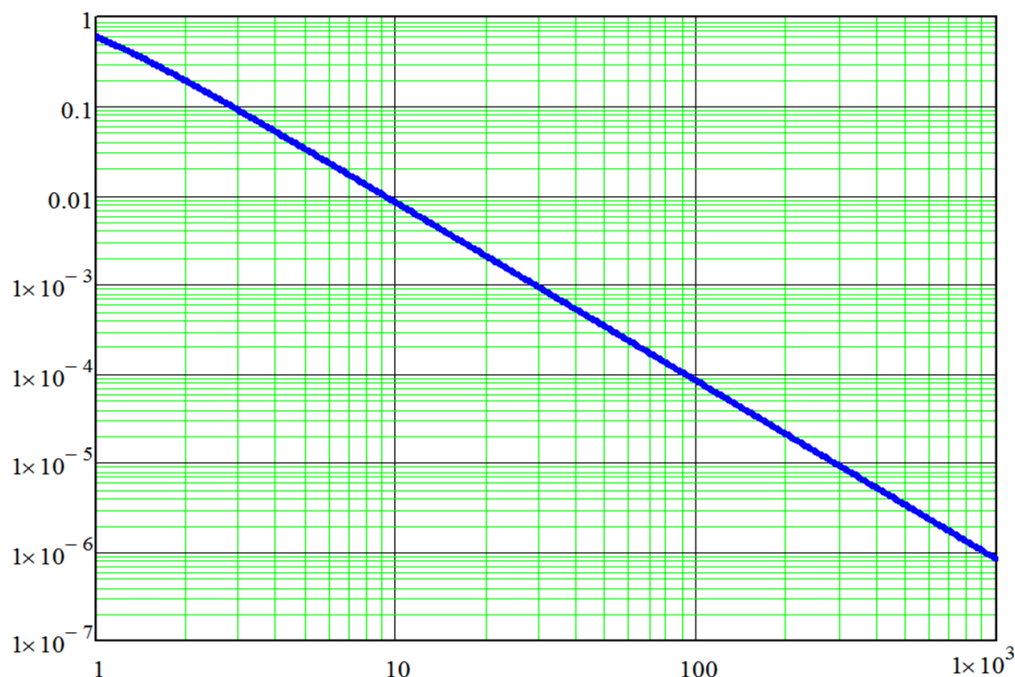
В силу (14) решение, полученное на основе схемы (5) соответствует решению уравнения  $u'_t = k^* u''_{xx} + f$ ,  $k^* = k(1 - \alpha_1)$ ,  $\alpha_1 = 1 - 2(1 - \cos(\omega m h)) / (\omega m h)^2$ . Лемма доказана.

Рассмотрим величину  $\alpha_1 = 1 - 2(1 - \cos(\omega m h)) / (\omega m h)^2$ :

$$\alpha_1 = 1 - \frac{2(1 - \cos(\omega m h))}{\omega^2 m^2 h^2} = 1 - \frac{2 \left( 1 - \frac{(\omega m h)^2}{2} + \frac{(\omega m h)^4}{24} + O(h^6) - 1 \right)}{-\omega^2 m^2 h^2} = \frac{(\omega m h)^2}{12} + O(h^4).$$

**Замечание 1.** Имеет место оценка  $\omega th < \pi$ . Также следует отметить, что величина  $r = \pi / (\omega th)$  описывает количество узлов, приходящихся на половину периода волны (на описание объекта). Из полученной оценки видно, что точность численного решения зависит от количества узлов приходящихся на половину периода волны.

На рис. 1 приведен график функции  $\alpha_1(r) = 1 - 2(1 - \cos(\pi/r)) / (\pi/r)^2$ , описывающей зависимость погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта.



**Рис. 1.** График зависимости погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта

Аналитическое выражение соответствующее численному решению запишется:

$$u = \sum_{m=1}^{N-1} \left( C_{m,0}^{(u)} \right) e^{-k(1-\alpha_1(N/m))\omega^2 m^2 t} \sin(\omega m x).$$

**Замечание 2.** При описании диффузионных слагаемых разностными схемами погрешность аппроксимации в наихудшем случае задании функции источников (в виде точечных источников  $r=2$ ) будет составлять 18,9%.

### 3. Точность численного решение уравнения диффузии на основе разностных схем четвертого порядка погрешности аппроксимации

Рассмотрим случай разностной аппроксимации схемами повышенного (четвертого) порядка точности [9]:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = k \frac{-u_{i+2}^{n+\sigma} + 16u_{i+1}^{n+\sigma} - 30u_i^{n+\sigma} + 16u_{i-1}^{n+\sigma} - u_{i-2}^{n+\sigma}}{12h^2} + f_i. \quad (18)$$

Будем использовать представления (2) функций  $u$  и  $f$  при решении задачи (18):

$$\frac{\sum_{m=1}^{\infty} \left( C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n) \right) \sin(\omega m x_i)}{\tau} =$$

$$= k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m^{(u)}(t^{n+\sigma})}{h^2} \left( -\sin(\omega m x_{i+2}) + 16 \sin(\omega m x_{i+1}) - 30 \sin(\omega m x_i) + \right.$$

$$\left. + 16 \sin(\omega m x_{i-1}) - \sin(\omega m x_{i-2}) \right) + \sum_{m=1}^{\infty} C_m^{(f)} \sin(\omega m x).$$

Преобразуя полученное выражение и принимая во внимание линейную независимость функций  $\sin(\omega n x)$ , получим:

$$\frac{C_m^{(u)}(t^{n+1}) - C_m^{(u)}(t^n)}{\tau} = k \frac{-2 \cos(2\omega m h) + 32 \cos(\omega m h) - 30}{12h^2} C_m^{(u)}(t^{n+\sigma}) + C_m^{(f)}. \quad (19)$$

**Лемма 2.** В условиях выполнения оценок (12) при решении задачи (1) разностными схемами (18) для каждой гармонике функции решения  $u$  скорость диффузионного обмена  $k$  меньше реальных значений и отличаются на величину  $\alpha_2 = 1 - (15 - 16 \cos(\omega m h) + \cos(2\omega m h)) / 6(\omega m h)^2$ .

**Доказательство.** Аналогично лемме 1.

Рассмотрим величину  $\alpha_2 = 1 - (15 - 16 \cos(\omega m h) + \cos(2\omega m h)) / 6(\omega m h)^2$ :

$$\alpha_2 = 1 - (15 - 16 \cos(\omega m h) + \cos(2\omega m h)) / 6(\omega m h)^2 = (\omega m h)^4 / 90 + O(h^6).$$

Функция, описывающая зависимость погрешности аппроксимации диффузионных операторов разностными схемами четвертого порядка точности от количества узлов на структуру примет вид  $\alpha_2(r) = 1 - (15 - 16 \cos(\pi/r) + \cos(2\pi/r)) / 6(\pi/r)^2$ .

На рис. 2 приведены графики функций, описывающие зависимости погрешности аппроксимации диффузионных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности от количества узлов.

**Замечание 3.** При описании диффузионных слагаемых разностными схемами погрешность аппроксимации может составлять для данных слагаемых в наихудшем случае задании функции источников 5,4%.

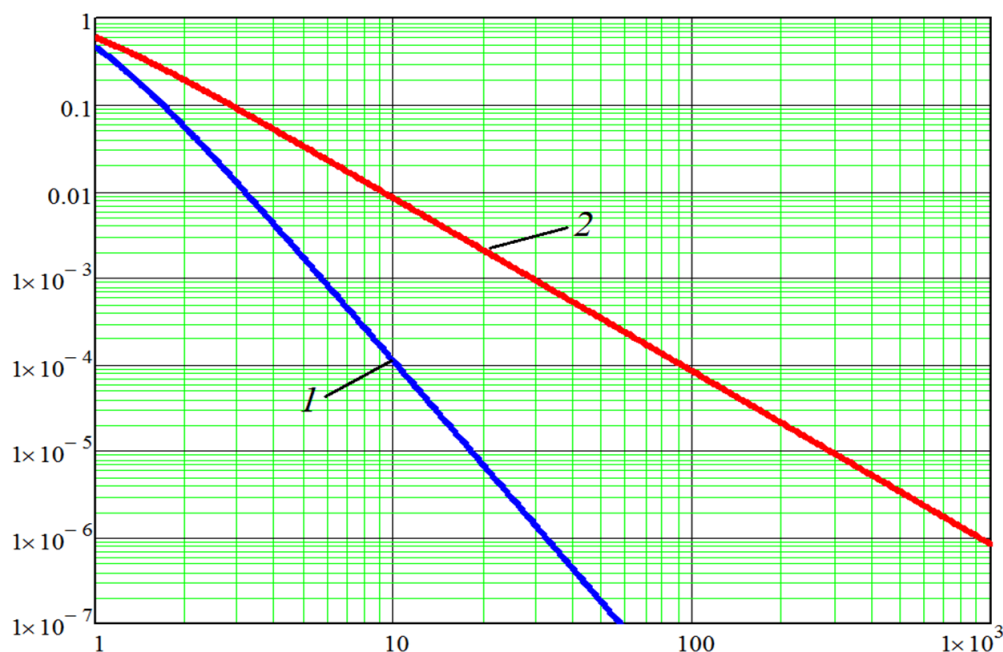
## 4. Погрешность аппроксимации операторов конвективного переноса

Рассмотрим краевую задачу диффузии-конвекции с начальными и граничными условиями [10, 11], т.е. найдем аналитическое решение уравнения

$$u'_t + v u'_x = k u''_{xx}, 0 < x < l, t > 0, \quad (20)$$

удовлетворяющее начальному условию  $u(x, 0) = u_0(x)$  и граничным условиям  $u(0, t) = 0$ ,  $u(l, t) = 0$ ,  $t > 0$ .

Для решения задачи (20) выполнить переход в подвижную систему координат  $y = x - vt$  при этом решение задачи сводится к решению уравнения диффузии:  $u'_t = k u''_{yy}$  аналитическое решение которого описано выше.



**Рис. 2.** График зависимости погрешности аппроксимации операторов диффузионного переноса разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта: 1 — схемы четвертого порядка точности, 2 — второго

Рассмотрим разностную производную оператора конвективного переноса  $u'_x$  второго порядка точности. Используем представления (12) функции  $u$ :

$$\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t) \frac{(\sin(\omega m x_{i+1}) - \sin(\omega m x_{i-1}))}{2h} = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t) \frac{\sin(\omega m h)}{h} \cos(\omega m x).$$

Непрерывная производная с учетом представления (12) примет вид:

$$u'_x = \sum_{m=1}^{N-1} C_m^{(u)}(t) \omega m \cos(\omega m x).$$

Таким образом, функция, описывающая зависимость погрешности аппроксимации конвективных операторов разностными схемами от количества узлов на структуру примет вид:  $\alpha_3(r) = 1 - \sin(\pi/r) / (\pi/r)$ .

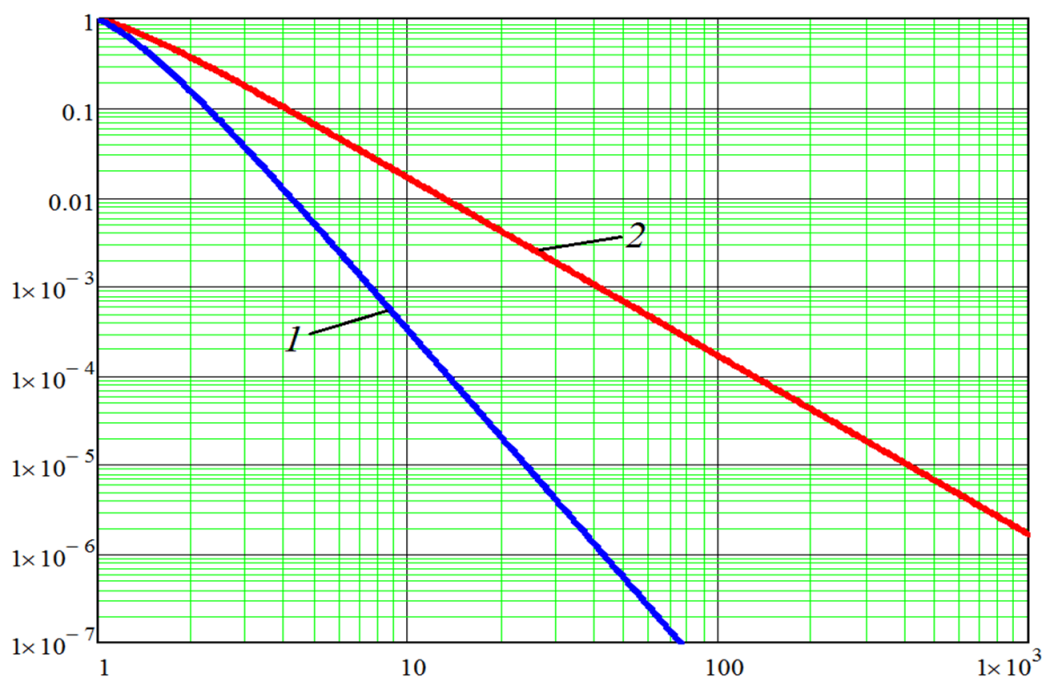
Для схемы четвертого порядка точности

$$u'_x \simeq \frac{-u_{i+2} + 8u_{i+1} - 8u_{i-1} + u_{i-2}}{12h}$$

оператора конвективного переноса не трудно получить функцию, описывающую зависимость погрешность аппроксимации данного оператора от количества узлов, приходящихся на половину периода волны  $\alpha_4(r) = 1 - (8 \sin(\pi/r) - \sin(2\pi/r)) / (6\pi/r)$ .

На рис. 3 приведены графики функций, описывающие зависимости погрешности аппроксимации конвективных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности от количества узлов.

**Замечание 4.** При описании конвективных слагаемых разностными схемами второго и четвертого порядков точности погрешность аппроксимации может составлять в наихудшем случае задания функции источников 36,3% и 15,1% соответственно.



**Рис. 3.** График зависимости погрешности аппроксимации операторов конвективного переноса разностными схемами от количества узлов, используемых для описания объекта: 1 — схемы четвертого порядка точности, 2 — второго

## 5. Сопоставление результатов расчета двумерной задачи диффузии-конвекции на основе схем второго и четвертого порядков точности

Моделирование производилось на сетке размерами  $100 \times 100$ , расчетных узлов, при этом параметры задавались следующим образом: размеры расчетной области  $lx=100$  м,  $ly=100$  м, временной интервал равен  $10$  с, горизонтальная составляющая равна  $4$  м/с, вертикальная —  $3$  м/с, коэффициент турбулентного обмена равен  $2$  м<sup>2</sup>/с. При решении задачи двумерной диффузии-конвекции начальное распределение задавалось функцией:

$$C(x, y) = \begin{cases} \sin(\pi(x-10)) \cos(\pi(y-10)), & \{x, y\} \in D, \quad D : \{x \in [10, 20], y \in [10, 20]\}, \\ 0, & \{x, y\} \notin D. \end{cases}$$

На рис. 4 приведено начальное распределение для задачи диффузии-конвекции и поле концентраций через заданный интервал времени.

**Замечание 5.** В случае решения задачи переноса на основе разностных методов не совсем уместно говорить о точности решения исходной задачи, т.к. погрешности аппроксимации влияют на скорость конвективного переноса и даже не большие отклонения в положении решения могут приводить к большим значениям погрешности.

За расчетный интервал времени вещества переносятся на  $50$  м. При использовании разностных методов полученные значения скорости конвективного переноса меньше реальной скорости распространения при этом отклонение положения центра области концентрации веществ для данной задачи составило  $38,04$  мкм.

На рис. 5 приведены значения спектра поля концентрации через заданный интервал времени для аналитического и численного решения задачи диффузии-конвекции.

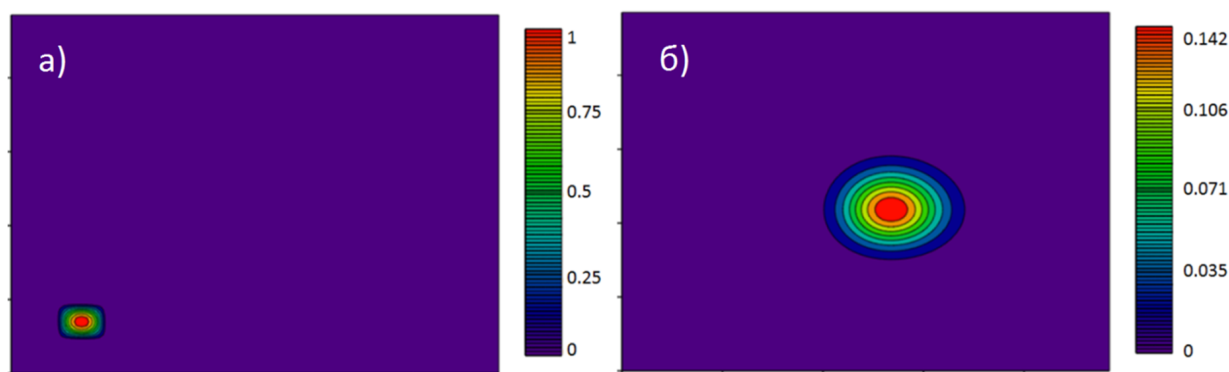


Рис. 4. Значение концентрации в начальный и конечный моменты времени

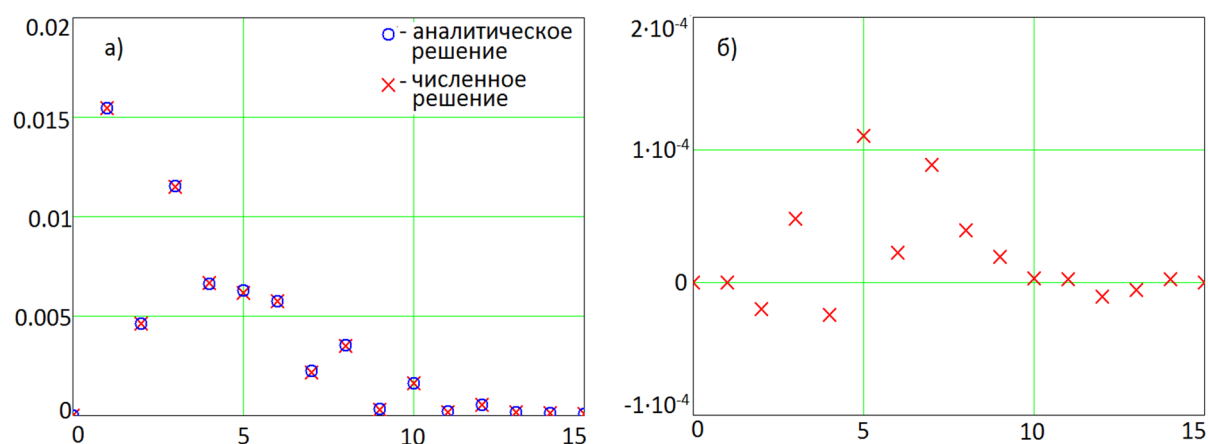


Рис. 5. Значение спектра поля концентрации через заданный интервал времени (а), разность между значениями спектра, найденные аналитическим путем и численно (б)

В табл. 1 приведены значения погрешностей, зависящих от времени, для задачи диффузии-конвекции схемами второго порядка точности.

Таблица 1

Зависимость погрешности от времени для задачи диффузии-конвекции

Время	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Максимальное значение решения	0,681	0,488	0,376	0,305	0,256	0,221	0,194	0,173	0,156	0,142
Погрешность	2,4%	2,5%	2,1%	1,7%	1,4%	1,1%	0,97%	0,83%	0,72%	0,64%
Относительная погрешность	3,52%	5,12%	5,58%	5,57%	5,47%	5%	4,98%	4,8%	4,61%	4,51%

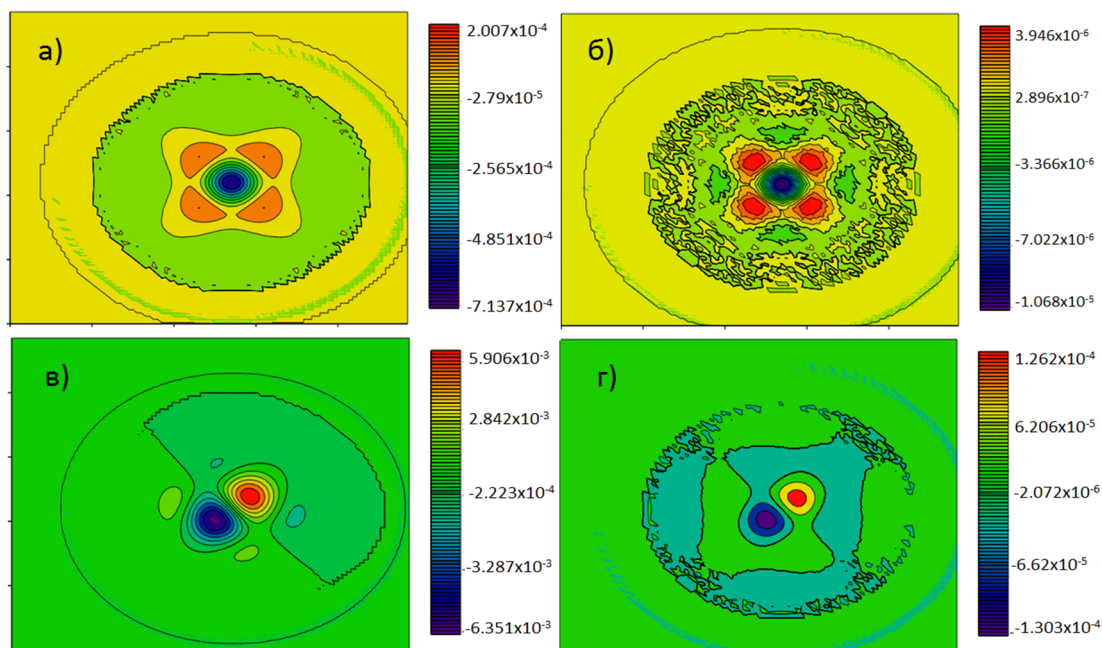
В табл. 2 приведены значения погрешностей расчета задачи диффузии-конвекции на различных расчетных сетках схемами второго порядка точности,

На рис. 6 приведено поле, описывающее погрешность вычислений, полученное как разность между аналитическим и численным решением для задачи диффузии-конвекции.

Таблица 2

Погрешность расчета задачи диффузии-конвекции на различных сетках

Размер сетки	100 x 100	200 x 200	400 x 400	800 x 800
Значение погрешности	0,6351%	0,1596%	0,04037%	0,01059%
Относительная погрешность	4,507%	1,124%	0,284%	0,075%



**Рис. 6.** Поля, полученные как разность между аналитическими и численными решениями для задачи диффузии-конвекции: сверху — задача диффузии, снизу — задача диффузии-конвекции (слева схемы второго порядка точности, справа — четвертого)

Исходя из результатов расчета погрешности расчета задачи диффузии-конвекции, приведенных в табл. 1, можно утверждать, что используемые схемы не только теоретически, но и практически имеют второй порядок точности.

В рассмотренной модельной задаче диффузии-конвекции область, где задано начальное распределение концентрации веществ отличных от нуля, покрывается 9 узлами по каждому из пространственных направлений. Из сопоставления результатов численных экспериментов на основе схем второго и четвертого порядков точности (рис. 6) следует, что для задачи диффузии удалось повысить точность в  $66,7$  раз, а для задачи диффузии-конвекции в  $48,7$  раз. Результаты расчетов, приведенные на рис. 6, согласуются с теоретическими суждениями, и таким образом, при использовании разностных методов, скорости конвективного и диффузионного переносов меньше реальных скоростей данных процессов.

## 6. Сопоставление результатов расчета двумерной задачи Пуассона на основе схем второго и четвертого порядков точности

Рассмотрим уравнение Пуассона [12]



$$\Delta u = -f, 0 < x < l_x, 0 < y < l_y,$$

удовлетворяющее граничным условиям  $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0, t > 0$ .

Аналитическое решение данной задачи примет вид:

$$u = \sum_{m_x=1}^{N-1} \sum_{m_y=1}^{N-1} \left( \frac{C_{m_x m_y}^{(f)}}{\omega^2 (m_x^2 + m_y^2)} \right) \sin(\omega m_x x) \sin(\omega m_y y),$$

$$f = \sum_{m_x=1}^{N-1} \sum_{m_y=1}^{N-1} C_{m_x m_y}^{(f)} \sin(\omega m_x x) \sin(\omega m_y y).$$

Численные расчеты данной задачи производились на сетке размерами  $100 \times 100$ , расчетных узлов, при этом: размеры расчетной области  $l_x=100$  м,  $l_y=100$  м, правая часть задавалась функцией:

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin(\pi(x - 45)) \cos(\pi(y - 45)), & \{x, y\} \in D, \quad D : \{x \in [45, 55], y \in [45, 55]\}, \\ 0, & \{x, y\} \notin D. \end{cases}$$

Аналитическое выражение соответствующее численному решению запишется:

$$u = \sum_{m_x=1}^{N-1} \sum_{m_y=1}^{N-1} \left( \frac{C_{m_x m_y}^{(f)}}{\omega^2 (m_x^2 (1 - f_1(N/m_x)) + m_y^2 (1 - f_1(N/m_y)))} \right) \sin(\omega m_x x) \sin(\omega m_y y).$$

На рис. 7 приведены значения спектра поля концентрации через заданный интервал времени для аналитического и численного решения задачи Пуассона.



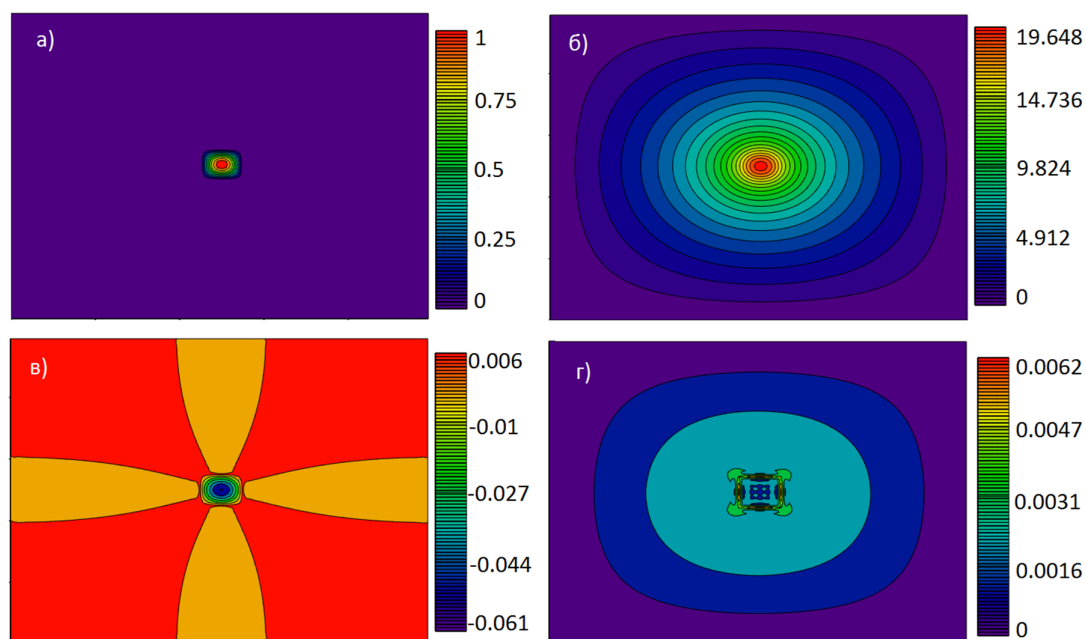
**Рис. 7.** Значение спектра поля концентрации через заданный интервал времени (а), разность между значениями спектра, найденные аналитическим путем и численно (б)

На рис. 8 представлена функция правой части (а), численное решение поставленной задачи (б) и поля, полученные как разность между аналитическим и численным решением для схем второго (в) и четвертого порядков точности (г).

Следует сказать, что для двумерной задачи Пуассона схемы четвертого порядка точности для данной модельной задачи в 10 раз точнее, чем второго.

## Заключение

В общем случае при решении прикладных задач нельзя утверждать, что повышение порядка погрешности аппроксимации гарантирует увеличение точности расчета. Из сопостав-



**Рис. 8.** Функция правой части (а), численное решение поставленной задачи (б) и поля, полученные как разность между аналитическим и численным решением для схем второго (в) и четвертого порядков точности (г)

ления результатов численных экспериментов на основе схем второго и четвертого порядков точности следует, что для задачи диффузии удалось повысить точность в  $66,7$  раз, а для задачи диффузии-конвекции в  $48,7$  раз, для задачи Пуассона удалось повысить точность — в  $10$  раз. В дальнейшем планируется внедрение разработанных схем в программные комплексы, предназначенные для расчета задач биологической кинетики на многопроцессорной вычислительной системе [13, 14]. Выполнение данных работ соответствует выполняемым в последнее время научно-образовательным программам по развитию суперкомпьютерного образования в стране [15–17].

*Работа выполнена при частичной поддержке Задания №2014/174 в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России.*

## Литература

1. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Семенякина А.А., Никитина А.В. Параллельная реализация задач транспорта веществ и восстановления донной поверхности на основе схем повышенного порядка точности // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16, № 2. С. 256–267.
2. Чистяков А.Е., Семенякина А.А. Применение методов интерполяции для восстановления донной поверхности // Известия ЮФУ. Технические науки. 2013. № 4. С 21–28.
3. Сухинов А.И., Чистяков А.Е. Параллельная реализация трехмерной модели гидродинамики мелководных водоемов на супервычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2012. Т. 13, № 1. С. 290–297.
4. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. Изд-во: Лаборатория базовых знаний, 2003.

5. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
6. Пинкевич В.Т. О порядке остаточного члена ряда Фурье функций, дифференцируемых в смысле Вейля // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1940. Т. 4, № 6. С. 521–528.
7. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989.
8. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Шишня А.В. Оценка погрешности решения уравнения диффузии на основе схем с весами // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 11. С. 53–64. DOI: 10.1134/S2070048214030120.
9. Жалнин Р.В., Змитренко Н.В., Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, № 10. С. 61–66.
10. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов // Математическое моделирование. 2013. Т. 25, № 12. С. 65–82. DOI: 10.1134/S2070048214040097.
11. Сухинов А.И., Чистяков А.Е., Проценко Е.А. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2014. Т. 15, № 4. С. 610–620.
12. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988.
13. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е., Семенов И.С. Математическое моделирование условий формирования заморозов в мелководных водоемах на многопроцессорной вычислительной системе // Вычислительные методы и программирование. 2013. Т. 14, № 1. С. 103–112.
14. Сухинов А.И., Никитина А.В., Чистяков А.Е. Моделирование сценария биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 9. С. 3–21.
15. Антонов А.С., Артемьева И.Л., Бухановский А.В., Воеводин В.В., Гергель В.П., Демкин В.П., Коньков К.А., Крукиер Л.А., Попова Н.Н., Соколинский Л.Б., Сухинов А.И. Проект «Суперкомпьютерное образование»: 2012 год // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2013. Т. 1, № 1. С. 12–16.
16. Воеводин В.В., Гергель В.П., Соколинский Л.Б., Демкин В.П., Попова Н.Н., Бухановский А.В. Развитие системы суперкомпьютерного образования в России: текущие результаты и перспективы // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. Т. 4, № 1. С. 268–274.
17. Антонов А.С., Артемьева И.Л., Бухановский А.В., Воеводин В.В., Гергель В.П., Демкин В.П., Коньков К.А., Крукиер Л.А., Попова Н.Н., Соколинский Л.Б., Сухинов А.И. Проект «Суперкомпьютерное образование»: 2012 год // Научный сервис в сети Интернет: поиск новых решений. Труды Международной суперкомпьютерной конференции. Москва, 2012. С. 4–8.

Сухинов Александр Иванович, д.ф.-м.н., декан факультета физики, математики, информатики, Таганрогский институт имени А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета (РИНХ) (Таганрог, Российская Федерация), sukhinov@gmail.com

Чистяков Александр Евгеньевич, к.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник, Научно-исследовательский институт многопроцессорных вычислительных систем им. А.В. Каляева Южного федерального университета (Таганрог, Российская Федерация), cheese\_05@mail.ru

Якобовский Михаил Владимирович, д.ф.-м.н., заведующий сектором «Программное обеспечение вычислительных систем и сетей», Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Российская Федерация), lira@imamod.ru

*Поступила в редакцию 3 сентября 2015 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University*  
*Series "Computational Mathematics and Software Engineering"*  
*2016, vol. 5, no. 1, pp. 47–62*

---

DOI: 10.14529/cmse160105

## ACCURACY OF THE NUMERICAL SOLUTION OF THE EQUATIONS OF DIFFUSION-CONVECTION USING THE DIFFERENCE SCHEMES OF SECOND AND FOURTH ORDER APPROXIMATION ERROR

*A.I. Sukhinov*, Taganrog Institute of A.P. Chekhov (branch) of the Rostov State University of Economics (RINH), Taganrog, Russian Federation

*A.E. Chistakov*, Scientific Research Institute of Multiprocessing Computing Systems of A.V. Kalyaeva Southern Federal University, Taganrog, Russian Federation

*M.V. Iakobovskii*, Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russian Federation

The paper deals with the scheme of the second and fourth order approximation error for solving convection-diffusion problems. To model initial boundary value problem in the case when the functions of the right and the initial condition can be represented by finite sums of Fourier series in the trigonometric basis, we investigated the accuracy of difference schemes. It was found that the accuracy of the numerical solution depends on the number of units attributable to half the wavelength corresponding to the most high frequency harmonics in the final sum of the Fourier series, necessary to describe the behavior of calculated objects. The dependence of the diffusion approximation error terms difference schemes of second and fourth order of accuracy of the number of nodes. The comparison of the calculation results of two-dimensional convection-diffusion problems and tasks of the Poisson-based schemes of the second and fourth order accuracy. In the expediency of transition to a scheme of high accuracy for solving applied problems of the estimates and is easy to obtain the numerical values of the gain in computation time by using schemes of higher order accuracy.

*Keywords: accuracy difference schemes, convection-diffusion equation, approximation error.*

### FOR CITATION

Sukhinov A.I., Chistakov A.E., Iakobovskii M.V. Accuracy of the Numerical Solution of the Equations of Diffusion-Convection Using the Difference Schemes of Second and Fourth Order Approximation Error. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 1. pp. 47–62. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160105.

## References

1. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Semenyakina A.A., Nikitina A.V. Parallel'naya realizatsiya zadach transporta veshchestv i vosstanovleniya donnoy poverkhnosti na osnove skhem povyshennogo poryadka tochnosti [Parallel implementation of the tasks of transport agents and the bottom surface of the restoration on the basis of schemes of increased order of accuracy]. *Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye* [Computational Methods and Programming]. 2015. vol. 16. no. 2. pp. 256–267. (in Russian)
2. Chistyakov A.E., Semenyakina A.A. Primeneniye metodov interpolyatsii dlya vosstanovleniya donnoy poverkhnosti [Use of interpolation methods for recovery bottom surface]. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskie nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences]. 2013. no. 4. pp. 21–28. (in Russian)
3. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E. Parallel'naya realizatsiya trekhmernoy modeli gidrodinamiki melkovodnykh vodoyemov na supervychislitel'noy sisteme [Parallel implementation of a three-dimensional hydrodynamic model of shallow water basins on supercomputing systems]. *Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye* [Computational Methods and Programming]. 2012. vol. 13. no. 1. pp. 290–297. (in Russian)
4. Boaster N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Publishing house: Lab basic knowledge, 2003. (in Russian)
5. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A. *Lineynyye i kvazilineynyye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Ural'tseva N.N. Linear and quasi-linear parabolic equation]. M.: Nauka, 1967. 736 p. (in Russian)
6. Pinkevich V.T. O poryadke ostatochnogo chlena ryada Fur'ye funktsiy, differentsiruyemykh v smysle Weyl'ya [On the order of the remainder term of the Fourier series of functions differentiable in the sense of Weyl'ya]. *Math. USSR Academy of Sciences . Ser . Mat.* 1940. vol. 4. no. 6. pp. 521–528.
7. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [The theory of difference schemes]. M.: Nauka, 1989. (in Russian)
8. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Shishenya A.V. Error estimate for diffusion equations solved by schemes with weights. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2014. vol. 6. no. 3. pp. 324–331. DOI: 10.1134/S2070048214030120.
9. Zhalnin R.V., Zmitrenko N.V., Ladonkina M.E., Tishkin V.F. Chislennoye modelirovaniye razvitiya neustoychivosti Rikhtmayyera - Meshkova s ispol'zovaniyem skhem vysokogo poryadka tochnosti [Numerical simulation of Richtmyer - Meshkov using schemes of high order of accuracy]. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical Simulation]. 2007. vol. 19. no. 10. pp. 61–66. (in Russian)
10. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs. *Mathematical Models and Computer Simulations.* 2014. vol. 6. no. 4. pp. 351–363. DOI: 10.1134/S2070048214040097.
11. Sukhinov A.I., Chistyakov A.E., Protsenko E.A. Matematicheskoye modelirovaniye transporta nanosov v pribrezhnykh vodnykh sistemakh na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme [Mathematical modeling of sediment transport in coastal water systems to multiprocessor computer system]. *Vychislitel'nyye metody i programmirovaniye* [Computational Methods and Programming]. 2014. vol. 15. no. 4. pp. 610–620. (in Russian)

12. Vladimirov V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 1988. (in Russian)
13. Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Chistyakov A.E., Semenov I.S. Matematicheskoe modelirovaniye usloviy formirovaniya zamorov v melkovodnykh vodoemakh na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme [Mathematical modeling of the formation of Zamora in shallow waters on a multiprocessor computer system]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Computational methods and programming]. 2013. vol. 14. no. 1. pp. 103-112. (in Russian)
14. Sukhinov A.I., Nikitina A.V., Chistyakov A.E. Modelirovaniye stsenariya biologicheskoy reabilitatsii Azovskogo morya [Numerical simulation of biological remediation Azov Sea]. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical Simulation]. 2012. vol. 24. no. 9. pp. 3–21. (in Russian)
15. Antonov A.S., Artemyev I.L., Boukhanovsky A.V. etc. Proyeckt «Superkomp'yuternoye obrazovaniye» 2012 god [The project «Supercomputer Education»: 2012]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo* [Bulletin of the Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky]. 2013. vol. 1. no. 1. pp. 12–16. (in Russian)
16. Voevodin V.V., Gergel V.P., Sokolinskii L.B. etc. Razvitiye sistemy superkomp'yuternogo obrazovaniya v Rossii: tekushchiye rezul'taty i perspektivy [Development of Supercomputer Education in Russia: current results and prospects]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo* [Bulletin of the Nizhny Novgorod University of N.I. Lobachevsky]. 2012. vol. 4. no. 1. pp. 268–274. (in Russian)
17. Antonov A.S., Artemyev I.L., Boukhanovsky A.V. and etc. Proyeckt «Superkomp'yuternoye obrazovaniye» 2012 god [The project «Supercomputer Education»: 2012]. *Nauchnyy servis v seti Internet: poisk novykh resheniy Trudy Mezhdunarodnoy superkomp'yuternoy konferentsii* [Scientific service on the Internet: the search for new solutions Proceedings of the International Supercomputer Conference]. Moscow, 2012. pp. 4–8. (in Russian)

*Received September 3, 2015.*

# АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ НА ОСНОВЕ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ

*В.И. Ухоботов, Е.С. Михайлова*

В предлагаемой работе рассматривается простейший механизм поведения коллектива как совокупность индивидуумов, каждый из которых, принимая решения по фиксированному вопросу, руководствуется как личным отношением к рассматриваемой проблеме, так и оценкой отношения других членов коллектива к данному вопросу. Например, индивидуум может решать: заниматься ли ему данным родом деятельности, вступать ли в данную общественную организацию, участвовать ли в данном мероприятии, голосовать ли за данное предложение и т.д. Во всех этих случаях индивидууму предстоит решить в сущности одну проблему: перейти ему в некоторое данное состояние или нет. Личное отношение каждого индивидуума к рассматриваемой проблеме и оценка им отношения других членов коллектива к данному вопросу носят неточный, расплывчатый характер. В статье принят подход, когда эта неточность рассматривается в рамках теории нечетких множеств и операций с ними. Исследуется поведение некоторых типов коллективов.

*Ключевые слова:* нечеткое множество, коллектив, лидер.

## ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Ухоботов В.И., Михайлова Е.С. Анализ механизма коллективного поведения на основе нечеткой логики // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 63–68. DOI: 10.14529/cmse160106.

## Введение

Для целого класса экономических и социальных задач информация о присутствующих в них параметрах и переменных носит нечеткий характер. Поэтому для их описания используются нечеткие множества. Получаемое нечеткое решение для таких задач дает возможность изначально учитывать неполноту и неточность исходных данных. Нужно отметить, что с момента публикации Л.А.Заде своей работы по нечетким множествам [1] вышло большое количество работ, в которых рассматривались математические модели исследуемых явлений из разных областей знаний в рамках теории нечетких множеств (см., например, [2–9]). Целью работы является исследование поведения коллектива индивидуумов, каждый из которых может перейти или нет в заданное состояние, при этом он руководствуется как личным отношением, так и проведенной им оценкой отношений других членов коллектива.

Статья состоит из двух частей. В первой части производится описание математической модели. Во второй части проводится анализ поведения коллектива в случае наличия или отсутствия в нем лидера.

## 1. Описание модели

Считаем, что перед каждым  $j$ -м индивидуумом,  $j = \overline{1, N}$  стоит вопрос — перейти ему в некоторое состояние или нет [10]. Из газет, радио, из результатов опросов общественного мнения и из других источников информации у него складывается убеждение о доле  $\delta_j \in [0, 1]$  членов коллектива, без него самого, которые готовы перейти в рассматриваемое состояние.

Допустим, что имеется  $K$  источников информации о переходе в заданное состояние, каждый из которых воздействует на каждого  $j$ -го индивидуума. Назовем источник информации «хорошим» для  $j$ -го индивидуума, если он убеждает его перейти в заданное состояние.

Обозначим через  $K_j$  число «хороших» для  $j$ -го индивидуума источников информации. Тогда в качестве числовой меры готовности  $j$ -го индивидуума перейти в заданное состояние можно принять величину

$$p_j = \frac{K_j}{K}. \quad (1)$$

**Замечание 1.** Поскольку один и тот же источник информации может быть «хорошим» для нескольких индивидуумов, то, вообще говоря,

$$\sum_{j=1}^N p_j = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^N K_j \neq 1.$$

Каждый  $j$ -й индивидуум оценивает число других индивидуумов, готовых перейти в заданное состояние. Число «хороших» для всех индивидуумов без  $j$ -го источников информации равно

$$\sum_{i \neq j} K_i = K_1 + \dots + K_{j-1} + K_{j+1} + \dots + K_N,$$

а общее число всех источников информации для них равно  $(N - 1)K$ . Поэтому в качестве меры  $q_j \in [0, 1]$  доли членов коллектива без  $j$ -го, которые готовы перейти в рассматриваемое состояние, можно принять величину

$$q_j = \frac{1}{(N - 1)K} \sum_{i \neq j} K_i = \frac{1}{N - 1} \sum_{i \neq j} p_i, j = \overline{1, N} \quad (2)$$

В качестве меры доли числа всех индивидуумов, готовых перейти в заданное состояние, можно принять число

$$m = \frac{1}{NK} \sum_{i=1}^N K_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i. \quad (3)$$

В зависимости от субъективного отношения  $j$ -го индивидуума к вопросу о переходе его в заданное состояние тот или иной источник информации может или нет убеждать его переходить в заданное состояние. Считаем, что субъективное отношение  $j$ -го индивидуума характеризуется числом  $a_j \in [0, 1], j = \overline{1, N}$ .

Обозначим через  $x_j$  —  $j$ -го индивидуума и рассмотрим нечеткие множества [9]

$$A = (x_1|a_1), \dots, (x_N|a_N), Q = (x_1|q_1), \dots, (x_N|q_N), P = (x_1|p_1), \dots, (x_N|p_N).$$

Нечеткое множество  $A$  характеризует готовность индивидуумов принять пропаганду за счет их субъективного отношения к вопросу о переходе в заданное состояние; нечеткое множество  $Q$  определяется зависимостью индивидуумов от поведения оставшихся членов; нечеткое множество  $P$  характеризует готовность индивидуумов перейти в заданное состояние.



Нечеткое множество  $P$  зависит от нечетких множеств  $A$  и  $Q$ . Эту зависимость зададим в виде объединения

$$P = A \vee Q.$$

Эта зависимость означает, что [9]

$$p_j = \max(a_j; q_j), j = \overline{1, N} \quad (4)$$

## 2. Анализ модели

Из формул (3) и (4) получим, что

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(a_i; q_i). \quad (5)$$

Далее из формул (2) и (3) следует, что

$$q_j = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N p_i - \frac{1}{N-1} p_j = \frac{N}{N-1} m - \frac{1}{N-1} p_j$$

Подставим сюда формулу (4). Получим

$$q_j = \frac{N}{N-1} m - \frac{1}{N-1} \max(a_j; q_j), j = \overline{1, N} \quad (6)$$

**Случай абсолютно зависимого коллектива.** Это значит, что  $a_j = 0, j = \overline{1, N}$ . Тогда из (5) и (6) получим, что

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N q_i,$$

$$q_j = \frac{N}{N-1} m - \frac{1}{N-1} q_j, j = \overline{1, N}$$

Отсюда следует, что  $q_j = m, j = \overline{1, N}$ , а число  $m$  может принимать любое значение на отрезке  $[0, 1]$ .

Рассмотренный случай характеризует полную зависимость индивидуумов от внешнего воздействия. Такой коллектив абсолютно неориентирован и его состояние не определено до тех пор, пока не появится лидер.

**Случай одного лидера в абсолютно зависимом коллективе.**

Это значит, что, например,  $a_1 = 1$ , а все остальные  $a_j = 0, j = \overline{2, N}$ . Тогда из формул (5) и (6) получим, что

$$m = \frac{1}{N} \left( 1 + \sum_{i=2}^N q_i \right),$$

$$q_1 = \frac{N}{N-1} m - \frac{1}{N-1},$$

$$q_j = \frac{N}{N-1} m - \frac{1}{N-1} q_j, j = \overline{2, N}.$$

Отсюда следует, что  $m = 1$  и  $q_i = 1, i = \overline{1, N}$ .

Таким образом, абсолютно зависимый коллектив является абсолютно управляемым. Лидер может привести его в нужное состояние.

Рассмотрим случай, когда в абсолютно зависимом коллективе ( $a_j = 0, j = \overline{3, N}$ ), наряду с лидером ( $a_1 = 1$ ) имеется еще индивидуум, у которого  $0 < a_2 \leq 1$ . Тогда из (5) и (6) получим, что

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{N} \left( 1 + \max(a_2; q_2) + \sum_{i=3}^N q_i \right), \\ q_2 &= \frac{N}{N-1} m - \frac{1}{N-1} \max(a_2; q_2), \\ q_j &= \frac{N}{N-1} m - \frac{1}{N-1} q_j, j = \overline{3, N}. \end{aligned} \tag{7}$$

Отсюда следует, что  $q_j = m, j = \overline{3, N}$  и

$$m = \frac{1}{2} (1 + \max(a_2; q_2)). \tag{8}$$

**Случай 1.** Пусть  $q_2 \leq a_2$ . Тогда из (7) и (8) получим, что

$$\begin{aligned} m &= \frac{1 + a_2}{2}; \\ q_2 &= \frac{N}{2(N-1)} (1 + a_2) - \frac{1}{N-1} a_2 = \frac{N + (N-2)a_2}{2(N-1)} \end{aligned}$$

Поэтому рассматриваемый случай  $q_2 \leq a_2$  возможен, если

$$N + (N-2)a_2 \leq 2(N-1)a_2 \Leftrightarrow a_2 = 1.$$

Следовательно,  $m = 1$ .

**Случай 2.** Пусть  $a_2 < q_2$ . Тогда из (7) и (8) имеем, что  $q_2 = m$  и  $m = 1$ .

## Заключение

В работе построена и рассмотрена простейшая модель коллективного поведения на основании нечеткой логики. Выделен случай абсолютно зависимого коллектива, который характеризуется полной зависимостью от внешнего воздействия. Также рассмотрен случай одного лидера в абсолютно зависимом коллективе. Показано, что в абсолютно зависимом коллективе доля числа всех индивидуумов, готовых перейти в заданное состояние, равняется единице.

С использованием результатов, полученных в данной работе, планируется рассмотреть случаи, когда коллектив содержит более двух лидеров.

## Литература

1. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.
2. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях. Тюмень: Изд-во Тюмен. гос. ун-та, 2002. 265 с.

3. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.
4. Кудинов Ю.И. Нечеткие модели вывода в экспертных системах // Техническая кибернетика. 1997. № 5. С. 13–29
5. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. 208 с.
6. Танака Х., Цукияма Г., Асаи К. Модель нечеткой системы, основанной на логической структуре // Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения. Пер. с англ. / Под редакцией Р.Р. Ягера. М.: Радио и связь, 1986. С. 186–199.
7. Тэрано Т. Прикладные нечеткие системы. М.: Мир, 1993. 368 с.
8. Cox E. Fuzzy Modeling and Genetic Algorithms for Data Mining and Exploration. Morgan Kaufmann Pub., 2005. 540 p.
9. Ухоботов В.И. Избранные главы теории нечетких множеств: учебное пособие. Челябинск: Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. 245 с.
10. Краснощеков П.С. Некоторые результаты математического моделирования одного механизма коллективного поведения. Социология. 4М. № 3-4. 1993. С. 65–83.

Ухоботов Виктор Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), [ukh@csu.ru](mailto:ukh@csu.ru)

Михайлова Екатерина Сергеевна, аспирант, кафедра теории управления и оптимизации, Челябинский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), [mihailova.katherine@gmail.com](mailto:mihailova.katherine@gmail.com)

*Поступила в редакцию 7 июля 2015 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series “Computational Mathematics and Software Engineering”  
2016, vol. 5, no. 1, pp. 63–68*

---

DOI: 10.14529/cmse160106

## THE ANALYSIS OF THE MECHANISM OF COLLECTIVE BEHAVIOUR BASED ON FUZZY LOGIC

*V.I. Ukhobotov*, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation  
*E.S. Mihailova*, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russian Federation

In this paper an elementary mechanism of collective behaviour has been examined. This collective is considered as number of persons. Each member of the group makes a certain decision based on his own relation and the relations of other members. For instance, whether to engage in certain activity, whether to join to public organisation, whether to participate in the arrangements, to vote affirmatively etc. These cases can be united into one: the person should decide whether to go into certain state. Personal opinion of each member of the group and opinions of other members according to the problem can be inaccurate or fuzzy. In this paper this fuzziness is considered according the theory of fuzzy sets and modeling. The behaviour of several types of collectives is researched.

*Keywords: fuzzy set, collective behaviour, leader.*

## FOR CITATION

Ukhobotov V.I., Mihailova E.S. The Analysis of the Mechanism of Collective Behaviour Based on Fuzzy Logic. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 1. pp. 63–68. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160106.

## References

1. Zadeh L.A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. New York, American Elsevier Publishing Company, 1973. 161 p.
2. Altunin A.E., Semuhin M. B. *Modeli i algoritmy prinyatiya reshenii v nechetkikh usloviyakh* [Models and Algorithms in Decision Making in Fuzzy Conditions]. Tyumen, Publishing of the Tyumen State University, 2002. 265 p. (in Russian)
3. Kaufmann A. *Vvedenie v teoriyu nechetkikh mnozhestv* [Introducing to the fuzzy sets theory]. Moscow, Radio i svyaz, 1982. 432 p. (in Russian)
4. Kudinov Yu.I. Nechetkie modeli vyvoda v ekspertnykh sistemakh [Fuzzy Models of Output in Expert Systems]. *Tekhnicheskaya kibernetika* [The engineering cybernetics]. 1997. no 5. pp. 75–83. (in Russian)
5. Orlovskii S.A. *Problemy pinyatiya reshenii pri nechetkoi ishodnoi informatsii* [The Problems of Decision Making in a Basic Fuzzy Information]. Moscow, Nauka, Gl. red. phys.-math. lit., 1981. 208 p. (in Russian)
6. Tanaka H., Uejima S., Asai K. Linear Regression Analysis with Fuzzy Model. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. 1982. vol. 12. pp. 903–907.
7. Terano T. Applied Fuzzy Systems. Academic Press, 1989. 314 p.
8. Cox E. Fuzzy Modeling and Genetic Algorithms for Data Mining and Exploration. Morgan Kaufmann Pub., 2005. 540 p.
9. Ukhobotov V.I. *Izbrannye glavy teorii nechetkix mnozhestv: uchebnoe posobie* [The Selected Chapters of the Theory of Fuzzy Sets: study guide]. Chelyabinsk, Publishing of Chelyabinsk State University, 2011. 245 p. (in Russian)
10. Krasnoschekov P.S. *Nekotorye resul'taty matematicheskogo modelirovaniya odnogo mekhanizma kollektivnogo povedeniya* [Some results of mathematical modeling of one mechanism of collective behaviour]. Sociology, 1993. no 3-4. pp. 65–83. (in Russian)

*Received July 7, 2015.*

## О ПОСТРОЕНИИ РЕЙТИНГА УСТОЙЧИВОГО РАЗВИТИЯ ПРЕДПРИЯТИЙ МЕТОДОМ СОБСТВЕННЫХ СОСТОЯНИЙ

*В.В. Мокеев, М.С. Нелюбина*

В статье рассматривается решение задачи построения рейтинга устойчивого развития предприятий, методом собственных состояний. В основе методология формирования рейтинга лежит построение модели устойчивого развития предприятия, которая описывает эталонную деятельность предприятия, отвечающую требованиям устойчивого развития. Для построения рейтинга устойчивого развития предприятий предлагается использовать комплексный индикатор устойчивости, который получается путем сравнения фактической и эталонной деятельности предприятий. Оценка эффективности предлагаемой методологии демонстрируется на примере построения рейтинга нефтегазовых предприятий.

*Ключевые слова:* устойчивое развитие предприятия, анализ главных компонент, метод собственных состояний, модель устойчивого развития.

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Мокеев В.В., Нелюбина М.С. О построении рейтинга устойчивого развития предприятий методом собственных состояний // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 69–84. DOI: 10.14529/cmse160107.

### Введение

В настоящее время, каждое крупное предприятие сталкивается с проблемами, которые затрагивают различные аспекты деятельности: социальные, экологические, производственные, финансовые. Поиск решений, направленных на установление устойчивого развития является одной из основных задач каждого предприятия.

Несмотря на то, что понятие устойчивости предприятия является ключевым и общеупотребительным, существует достаточно большое число определений понятия устойчивости предприятия. Под устойчивым развитием подразумевается процесс, при котором все стороны деятельности предприятия функционируют стабильно и при этом взаимодействуют друг с другом, тем самым обеспечивая высокий уровень производительности и качества предприятия.

Общепринятого метода анализа устойчивого развития так же не существует, в различных работах предлагают разные методы оценки устойчивого развития предприятия. Среди методов оценки устойчивости предприятий можно выделить следующие группы методов: 1) методы, основанные на использовании теории устойчивости [1–2], 2) методы расчета интегрального показателя устойчивости [3–5], 3) методы прогнозирования риска банкротства [6–7]. Первая группа методов основывается на расчете и интерпретации математических показателей устойчивости (устойчивость по Ляпунову). Вторая группа методов основывается на расчетах интегральных показателей, которые объединяют оценки разных аспектов деятельности предприятия (производственной, финансовой, маркетинговой и др.). В рамках второй группы можно выделить методы анализа финансово-экономической устойчивости [5]. Аспекты финансовой и экономической устойчивости являются важнейшими характеристиками устойчивости предприятия. Третья

группа методов основывается на количественных и на качественных методах исследования факторов, предотвращающих потерю устойчивости предприятий, и используется для оценки риска банкротства предприятий.

Большинство методов, используемых для оценки устойчивости предприятия, базируется на анализе абсолютных и относительных показателей. Комплексный показатель устойчивости представляет среднее геометрическое частных показателей (финансовой, экономической, маркетинговой деятельности и т.п.) устойчивости, а каждый частный показатель вычисляется через относительные показатели. Модели для прогнозирования риска банкротства строятся, как правило, на основе регрессионного анализа.

Широкое распространение в последние годы получил метод главных компонент. Вместе с множественной регрессией метод главных компонент применяется для прогнозирования энергопотребления, анализа финансовой состоятельности предприятий, прогнозирования объемов продаж [8–11]. Метод собственных состояний является развитием метода главных компонент [12–18]. Суть метода главных компонент заключается в том, что поведение социально-экономической системы описывается суммой собственных состояний, каждое из которых можно анализировать независимо от других. В рамках этой модели показатели социально-экономической системы изменяются пропорционально весовым коэффициентам собственного состояния и их значения зависят от одного фактора. Теоретический базис метода собственных состояний излагается в работах [12–13].

В настоящее время метод собственных состояний используется при анализе таких сложных систем, как компания (предприятие), город, регион. В работе [13] метод собственных состояний используется для оценки эффективности работы энергосбытовых предприятий. В результате получены коэффициенты эффективности филиалов, а также показаны источники их неэффективной деятельности. В работе [14] задача анализа финансовой устойчивости компании решается с помощью метода собственных состояний. Деятельность предприятия представляется в виде набора различных процессов, одни из которых обладают финансовой устойчивостью, другие наоборот, дестабилизируют работы предприятия. Основной задачей управления финансовой устойчивостью является ограничение влияние дестабилизирующих процессов. Для решения задачи формируется модель, которая использует только собственные состояния, удовлетворяющие условиям финансовой устойчивости компании. В работе [15] метод собственных состояний используется для интерпретации бизнес-процессов предприятия и их анализа в зависимости от целевых установок и параметров производственной деятельности. Инвестиционная привлекательность региона исследуется методом собственных состояний в работе [16], а в работе [17] предлагается методика оценки устойчивого развития регионов РФ, апробация которой на тестируемой группе регионов позволила определить их параметры приближенности к траектории устойчивого развития. В работе [18] исследуется эффективность процессов развития города, которая базируется на методе собственных состояний.

Целью настоящей работы является решение задачи сравнительного анализа устойчивого развития предприятий. Статья организована следующим образом. В разделе 1 описана методология построения рейтинга устойчивого развития предприятий, которая использует метод собственных состояний для построения модели устойчивого развития. В разделе 2 эффективность методологии демонстрируется на примере сравнительного анализа устойчивости развития предприятий нефтегазовой отрасли. В заключении из-

ложены возможные пути дальнейшего развития предложенной методологии.

## 1. Методология построения рейтинга устойчивого развития предприятий

Состояние предприятия в любой момент времени описывается значениями некоторого показателя деятельности предприятий. Если отложить на осях прямоугольной системы координат в  $n$ -мерном пространстве значения переменных  $x_i$ , то состояние системы будет описываться в этом пространстве некоторой точкой. Рассматривая значения показателей как координаты точки в  $m$ -мерном пространстве можно геометрически представить соответствующее состояние предприятия посредством этой точки в пространстве. Такую точку часто называют фазовой точкой, а пространство — фазовым пространством предприятия. Изменение состояния системы со временем изображается как движение фазовой точки по некоторой линии (так называемой фазовой траектории).

Траектория устойчивого развития предприятия будет состоять из состояний, удовлетворяющих требованиям устойчивого развития предприятия. Траектории устойчивого развития предприятий в пространстве состояний можно рассматривать как целевые траектории, к которым должны стремиться фактические состояния предприятий для обеспечения их устойчивого развития. Отклонения реальных траекторий развития предприятия от целевых траекторий можно интерпретировать как меру неустойчивости развития предприятия и использовать для оценки устойчивости предприятия.

Методология построения модели экономической устойчивости предприятия включает следующие шаги:

1. Формирование набора показателей, описывающих развитие предприятий. Показатели должны описывать как финансовые, так и производственные, экологические процессы. Все показатели должны быть нормализованы. Нормализация включает устранение ошибок, пропущенных данных, а также выравнивание диапазонов изменения показателей (т.е. показатели должны меняться в одном диапазоне чисел, например, от 0 до 1000). В дальнейшем набор исходных показателей будем рассматривать как выборку случайных величин с законом распределения близким к нормальному.

2. Формулировку требований экономической устойчивости предприятия, представляющие либо ограничения на изменения ряда показателей либо набор индикаторов устойчивости с их нормативными значениями. Чаще всего в систему индикаторов экономической устойчивости включают: коэффициенты ликвидности и платежеспособности, финансовой устойчивости, деловой активности, рентабельности. Выбор коэффициентов устойчивости зависит от аспекта оценки экономической устойчивости, сферы деятельности и размера предприятия.

3. Вычисление собственных состояний предприятия. Весовые коэффициенты собственных состояний определяются по собственным векторам либо выборочной ковариационной матрицы, либо матрицы выборочных начальных вторых моментов набора показателей. При вычислении выборочной ковариационной матрицы используется центрированный набор показателей. В качестве центра распределения используются среднеарифметические значения показателей. При вычислении матрицы выборочных начальных вторых моментов используется исходный набор показателей без центрирования.

Собственные векторы матриц вычисляются методом Хаусхолдера [19]. Каждый собственный вектор имеют ту же размерность, что и вектор состояния экономической системы, и коэффициенты собственного вектора интерпретируются как весовые коэффициенты показателей собственного состояния. Таким образом, каждый собственный вектор описывает собственное состояние предприятие, которое характеризует определенную тенденцию развития предприятия. Все выделенные собственные состояния являются независимыми (первое свойство собственных состояний [18]), т.е. развитие одной тенденции (собственного состояний) не влияет на развитие других тенденций (собственных состояний). Поэтому, удаление одних собственных состояний не приведет к изменению других собственных состояний. В рамках каждой тенденции (собственного состояния) показатели меняются пропорционально весовым коэффициентам собственного состояния (второе свойство собственных состояний [18]).

4. Построение модели устойчивого развития из собственных состояний, полученных на предыдущем шаге. В процессе построения модели выполняется проверка соответствия собственных состояний требованиям устойчивого развития предприятия.

Если требования представлены в виде ограничений на изменения ряда показателей, то проверяется соответствие изменений исходных показателей, в рамках каждого собственного состояния, требованиям экономической устойчивости предприятия, используя второе свойство собственных состояний.

Если требования устойчивого развития представлены в виде индикаторов устойчивости с их нормативных значений, то для каждого собственного состояния вычисляются значения индикаторов. Пусть индикатор устойчивости представляет отношение показателей  $x_i$  и  $x_j$ . В рамках  $h$ -го собственного состояния, значения этих показателей определяются по формулам  $x_{ki}^h = V_{hi}z_{kh}$  и  $x_{kj}^h = V_{hj}z_{kh}$ , где  $V_{hi}$  — коэффициент  $h$ -го собственного состояния  $i$ -го показателя,  $z_{kh}$  — главная компонента  $h$ -го собственного состояния для  $k$ -го наблюдения. Тогда коэффициент устойчивости процесса, описываемого  $h$ -м собственным состоянием, вычисляется  $K_h = V_{hi}z_{kh} / V_{hj}z_{kh} = V_{hi} / V_{hj}$ . Таким образом, показатель устойчивости  $h$ -го собственного состояния равен отношению весовых коэффициентов  $x_i$  и  $x_j$  переменных. Сравнивая значение показателя с его нормативным значением, принимается решение о выборе собственного состояния для модели устойчивого развития.

Выбранные собственные состояния используются для формирования модели экономической устойчивости компании (эталонной модели). Полученная модель является идеализацией реальной деятельности и служит эталоном для исследуемого предприятия с точки зрения устойчивости его развития.

Модель устойчивого развития использует для определения координат траектории устойчивого развития предприятий.

$$x_{ki}^{et} = \bar{x}_i + \sum_{f=1}^p V_{hi} z_{kh} , \quad (1)$$

где  $h = l(f)$ ,  $l(\dots)$  — список номеров собственных состояний,  $p$  — число собственных состояний, используемых для построения модели.

5. Для оценки устойчивости развития предприятий предлагается использовать комплексные индикаторы устойчивости предприятия. Значения комплексные индикаторов



устойчивости определяются путем сравнения фактических и эталонных значений показателей с использованием метода штрафных функций. Эталонные значения показателей вычисляются с помощью модели устойчивого развития предприятия по формуле (1).

Значение штрафных функций зависит от типа показателей (затратные и результатные).

Если величина затратного показателя превышает величину эталонных значений этого показателя на заданный уровень, то такое превышение считается признаком неэффективности и измеряется штрафной функцией, равной:

$$f_{kj} = \left| (x_{kj} - x_{kj}^{et}) / x_{kj} \right| - \varepsilon_{доп}, \quad (2)$$

где  $j$  — индекс показателя,  $k$  — номер наблюдений,  $\varepsilon_{доп}$  — допустимые отклонения.

Если величина результатного показателя ниже величины эталонных значений этого показателя на заданный уровень, то такой результат также считается признаком неэффективности и измеряется штрафной функцией, вычисляемой по формуле (2).

Таким образом, основной задачей управления предприятием является своевременное выявление отклонений, дестабилизирующих деятельность и определение возможных угроз, исследование источников и причин их возникновения и их ликвидация, с целью поддержания экономической устойчивости компании.

Комплексный индикатор устойчивости предприятия может быть получен по формуле:

$$I_y = 1 - \bar{f}_k, \quad (3)$$

где  $\bar{f}_k$  — среднеквадратическое значение штрафных функций показателей, которое определяется по формуле:

$$\bar{f}_k = \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{j=1}^r f_{kj}^2}. \quad (4)$$

В формуле (4)  $f_{kj}$  — обозначает значение штрафной функции  $j$ -го показателя для  $k$ -го наблюдения,  $r$  — число показателей, используемых для построения комплексного индикатора устойчивости.

## 2. Сравнительный анализ устойчивого развития предприятий нефтегазовой отрасли

Развитие нефтегазовой отрасли в России является одним из основных показателей экономического роста. Тем не менее, за последние годы в отрасли наблюдается возникновение определенных проблем, связанных с добычей сырья, зависимостью сырьевого сектора от мировых цен и сложностью в составлении прогнозов, изысканием резервов и так далее. В связи с этим, появляется необходимость поиска путей, направленных на установление устойчивого развития предприятий нефтегазовой отрасли.

Исследуется устойчивость нефтегазовых компаний: Башнефть, Газпром, Лукойл, Роснефть, Славнефть, Сурганефтегаз, Татнефть. Состояние нефтегазовых компаний определяется финансовыми и производственными показателями за период 2011–2013 гг. В группу финансовых показателей входят: Внеоборотные активы, Основные средства, Оборотные активы, Запасы, Собственный капитал, Нераспределенная прибыль, Долгосрочные обязательства, Краткосрочные обязательства, Выручка от реализации, Чистые активы, Прибыль до налогообложения, Чистая прибыль, Прибыль от продаж. Группу

производственных показателей составляют: Добыча нефти, Добыча газа, Переработка нефти, Численность персонала. Исходя из имеющегося набора показателей, устойчивость нефтегазовой компании будем определять в аспекте финансово-экономической устойчивости, т.е. как сбалансированное состояние технико-экономических ресурсов, которое обеспечивает нормальную рентабельность производства по добыче нефти в текущий период времени и необходимые условия для осуществления деятельности нефтегазовой компании с хорошим уровнем финансовой устойчивости.

В работе [3] предлагается методика оценки экономической устойчивости, которая строится на вычислении обобщенных показателей финансовой, рыночной, организационной, производственной, технико-технологической, социальной, экологической устойчивости. Обобщенный показатель финансовой устойчивости вычисляется по формуле

$$\Phi_y = \sqrt[9]{K_{ТЛ}K_{ФЗ}K_{П}K_{ФН}K_{ФР}K_{М}K_{ПА}M_{СК}K_{ОСС}}, \quad (5)$$

где  $K_{ТЛ}$  — коэффициент текущей ликвидности,  $K_{ФЗ}$  — коэффициент финансовой зависимости;  $K_{П}$  — коэффициент покрытия процентов,  $K_{ФН}$  — коэффициент автономии,  $K_{ФР}$  — коэффициент финансового рычага,  $K_{М}$  — коэффициент маневренности,  $K_{ПА}$  — коэффициент постоянного актива,  $M_{СК}$  — мультипликатор собственного капитала,  $K_{ОСС}$  — коэффициент обеспечения собственными средствами.

На рис. 1 представлена диаграмма, показывающая изменение обобщенного показателя финансовой устойчивости предприятий по годам.

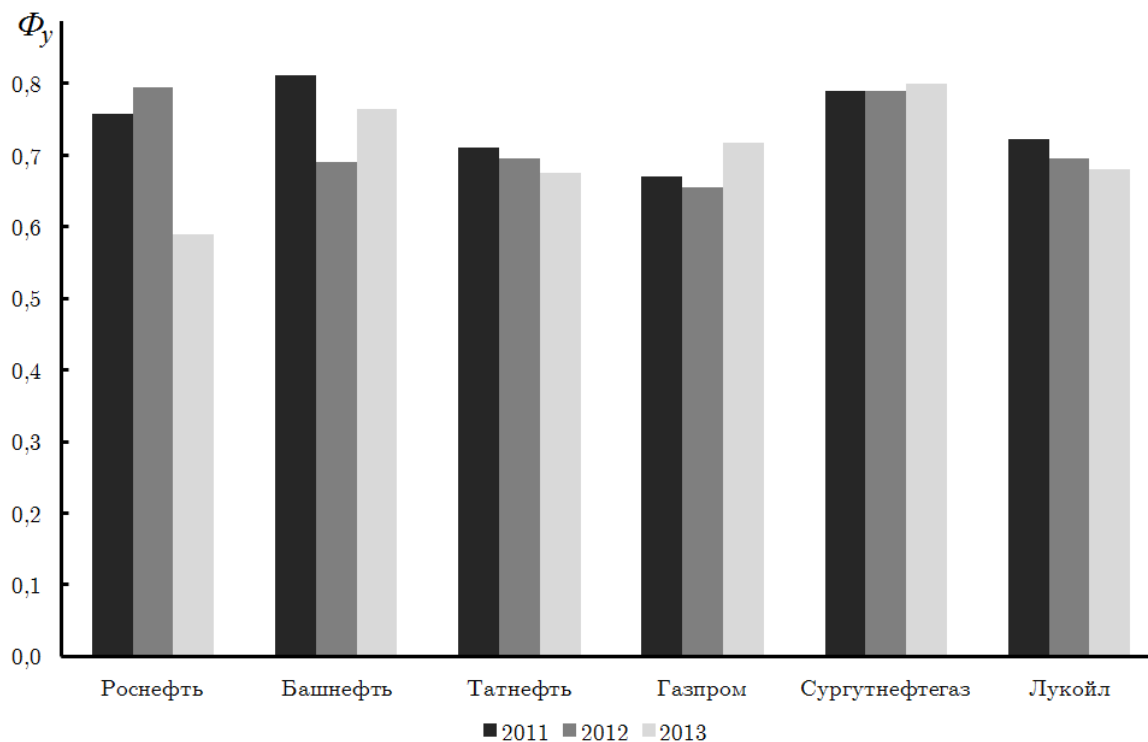


Рис. 1. Обобщенный показатель финансовой устойчивости нефтегазовых предприятий в 2011, 2012 и 2013 гг.

Как видно из рисунка, для предприятий Башнефть и Сургутнефтегаз обобщенный показатель финансовой устойчивости имеет относительно высокие значения. Для предприятия Роснефть обобщенный показатель финансовой устойчивости меняется в широком диапазоне, в 2013 году показатель снижается, это связано с большим увеличением долгосрочных и краткосрочных обязательств. Предприятия Лукойл, Татнефть и Газпром показывают хорошую финансовую устойчивость. Для предприятия Славнефть обобщенный показатель финансовой устойчивости не вычислялся из-за отрицательных значений коэффициента маневренности.

Построим рейтинг финансовой устойчивости нефтегазовых компаний с использованием методологии сравнительного анализа устойчивости предприятий. При построении модели финансово-экономической устойчивости будем использовать следующие коэффициенты финансовой и экономической устойчивости (табл. 1).

Таблица 1

Коэффициенты финансовой и экономической устойчивости и их нормативные значения

Коэффициенты	Сокращение	Нормативное значение
Коэффициент независимости	К <sub>ФН</sub>	Больше 0,5
Коэффициент обеспеченности собственными оборотными средствами	К <sub>ОСС</sub>	Больше 0,1
Коэффициент маневренности	К <sub>М</sub>	От 0,5 до 0,8
Коэффициент финансового рычага	К <sub>ФР</sub>	Меньше 1
Коэффициент текущей ликвидности	К <sub>ТЛ</sub>	Больше 2
Рентабельность собственного капитала	Р <sub>СК</sub>	Больше 0,2

В табл. 2 представлены коэффициенты финансовой и экономической устойчивости фактической деятельности предприятий. Как видно из табл. 2 коэффициенты финансовой и экономической устойчивости обладают достаточно высокой изменчивостью, что связано с воздействием как внешних, так и внутренних факторов.

Построим модель деятельности предприятия, коэффициенты финансовой и экономической устойчивости которой лежат в заданных диапазонах. Модель строится из собственных состояний, вычисленных по матрице выборочных начальных вторых моментов (данные не центрируются). На коэффициенты финансовой и экономической устойчивости собственных состояний накладываются следующие ограничения:  $K_{ФН} > 0,2$ ;  $K_{ОСС} > 0,4$ ;  $K_{М} > 0,8$   $K_{ФР} > 0,5$ ;  $K_{ТЛ} > 1,2$ ;  $R_{СК} > 0,2$ .

Коэффициенты первых шести собственных состояний представлены в табл. 3. В рамках первого собственного состояния, описывается деятельность предприятий, при которой добыча нефти и газа растет, так на каждые 10 тыс. тонн переработанной нефти добывается 300 тыс. кубометров газа и 70 тыс. тонн нефти, при этом предприятия получают выручку в размере 380 млн. рублей и 240 млн. рублей прибыли от продаж. Все остальные собственные состояния описывают процессы, при которых добыча нефти и газа может, как уменьшаться, так и увеличиваться. В рамках второго собственного со-

стояния увеличение добычи нефти на 60 тыс. тонн приводит к уменьшению добычи газа на 560 тыс. кубометров, и наоборот уменьшение добычи нефти на 60 тыс. тонн приводит к увеличению добычи газа на 560 тыс. кубометров. При росте добычи нефти, процесс приносит прибыль в размере 200 млн. рублей, а при падении добычи нефти — убыток в том же размере.

Таблица 2

Коэффициенты экономической устойчивости фактической деятельности предприятий

Предприятия	Период	К <sub>ФН</sub>	К <sub>ОСС</sub>	К <sub>М</sub>	К <sub>ФР</sub>	К <sub>ТЛ</sub>	R <sub>СК</sub>
Башнефть	2011	0,52	0,46	0,28	0,93	1,86	0,29
	2012	0,53	0,29	0,14	0,87	1,40	0,30
	2013	0,58	0,53	0,23	0,89	1,19	0,27
Газпром	2011	0,71	0,42	0,12	0,40	1,71	0,02
	2012	0,71	0,38	0,11	0,41	1,62	0,02
	2013	0,72	0,51	0,15	0,39	2,06	0,02
Лукойл	2011	0,74	0,53	0,18	0,35	2,12	0,19
	2012	0,75	0,49	0,16	0,33	1,95	0,18
	2013	0,72	0,44	0,13	0,39	1,79	0,13
Роснефть	2011	0,61	0,47	0,19	0,65	1,89	0,20
	2012	0,58	0,52	0,21	0,71	2,09	0,20
	2013	0,43	0,13	0,06	1,37	1,05	0,20
Славнефть	2011	0,60	-0,49	-0,08	0,71	0,59	0,04
	2012	0,56	-0,11	-0,03	0,78	0,90	0,20
	2013	0,57	-0,37	-0,11	0,76	0,73	0,14
Сургнефтегаз	2011	0,88	0,82	0,28	0,13	5,57	0,21
	2012	0,88	0,82	0,25	0,14	5,60	0,13
	2013	0,86	0,82	0,26	0,16	5,52	0,17
Татнефть	2011	0,64	0,41	0,16	0,58	1,66	0,19
	2012	0,71	0,45	0,14	0,41	1,83	0,19
	2013	0,75	0,45	0,14	0,34	1,83	0,17

В табл. 4 содержатся значения коэффициентов финансовой и экономической устойчивости предприятий, вычисленных для первых шести собственных состояний. Анализ полученных результатов показывает, что первое, третье и шестое собственные состояния характеризуют рентабельные процессы. Однако второе и шестое собственные состояния описывают процессы, которые недостаточно обеспечены собственными средствами, необходимыми для финансирования операционной деятельности и для погашения краткосрочных обязательств. Кроме того, эти собственные состояния характеризуются низки-

ми значениями коэффициента текущей ликвидности. Таким образом, только первое собственное состояние соответствует условиям финансово-экономической устойчивости предприятия. Поэтому, при построении модель финансово-экономической устойчивости предприятий используется только первое собственное состояние. Модель финансово-экономической устойчивости описывает деятельность предприятия, которую в дальнейшем будем называть эталонной.

Таблица 3

## Коэффициенты собственных состояний

Показатели	Номер собственных состояний					
	1	2	3	4	5	6
Добыча нефти	0,07	0,06	-0,03	0,11	-0,09	-0,07
Добыча газа	0,30	-0,56	-0,48	-0,12	-0,45	0,25
Переработка нефти	0,10	0,05	0,15	0,08	-0,10	0,12
Численность персонала	0,10	0,08	0,00	0,10	-0,10	-0,08
Внеоборотные активы	0,18	-0,29	-0,10	-0,01	0,22	-0,37
Основные средства	0,30	-0,27	0,40	0,10	-0,06	0,35
Оборотные активы	0,48	0,39	0,02	-0,35	0,03	0,28
Запасы	0,13	0,15	-0,21	0,70	0,27	0,29
Собственный капитал	0,15	-0,24	-0,09	-0,001	0,20	-0,33
Нераспределенная прибыль	0,10	-0,16	-0,04	0,02	0,23	-0,32
Долгосрочные обязательства	0,25	0,19	-0,14	-0,38	0,36	-0,02
Краткосрочные обязательства	0,21	0,17	-0,14	-0,21	0,10	0,04
Выручка от реализации	0,38	-0,25	0,60	0,08	0,14	-0,10
Чистые активы	0,21	-0,06	-0,33	0,19	0,39	0,13
Прибыль до налогообложения	0,28	0,24	-0,06	0,30	-0,26	-0,20
Чистая прибыль	0,21	0,19	-0,01	0,10	-0,34	-0,30
Прибыль от продаж	0,24	0,20	-0,06	0,08	-0,24	-0,34

В связи с тем, что эталонная модель является однофакторной, коэффициенты финансовой и экономической устойчивости эталонной деятельности предприятий совпадают с коэффициентами финансовой и экономической устойчивости первого собственного состояния. Таким образом, например, коэффициент независимости эталонной деятельности любого предприятия за любой период (2011–2013 г.) будет одинаковым и равен 0,23.

Для формирования рейтинга предприятий вычисляется комплексный индикатор устойчивости по формуле (3). При формировании рейтинга по признаку финансовой устойчивости комплексный индикатор вычисляется с использованием финансовых показателей, которые делятся на две группы: 1) затратные (Оборотные активы, Долгосрочные обязательства, Краткосрочные обязательства) 2) результатные (Внеоборотные ак-

тивы, Собственный капитал, Выручка от реализации, Прибыль до налогообложения, Чистая прибыль, Прибыль от продаж). Величина допустимых отклонений устанавливается равной 10 %.

Таблица 4

Коэффициенты финансовой и экономической устойчивости собственных состояний

Коэффициент	Номер собственного состояния					
	1	2	3	4	5	6
$K_{\Phi H}$	0,23	-2,53	1,15	0,001	0,81	3,58
$K_{OCC}$	0,46	0,60	-5,55	1,06	13,12	0,08
$K_M$	1,51	-0,95	1,37	300,19	1,65	-0,07
$K_{\Phi P}$	3,10	-1,46	3,01	472,28	2,24	-0,04
$K_{TЛ}$	1,91	2,08	-0,17	0,93	0,07	-12,03
$R_{CK}$	1,89	-0,99	0,63	-239,51	-1,30	0,63

На рис. 2 представлена диаграмма со столбцами, которая показывает изменение комплексных индикаторов финансовой устойчивости нефтегазовых предприятий за 2013, 2012 и 2011 годы.

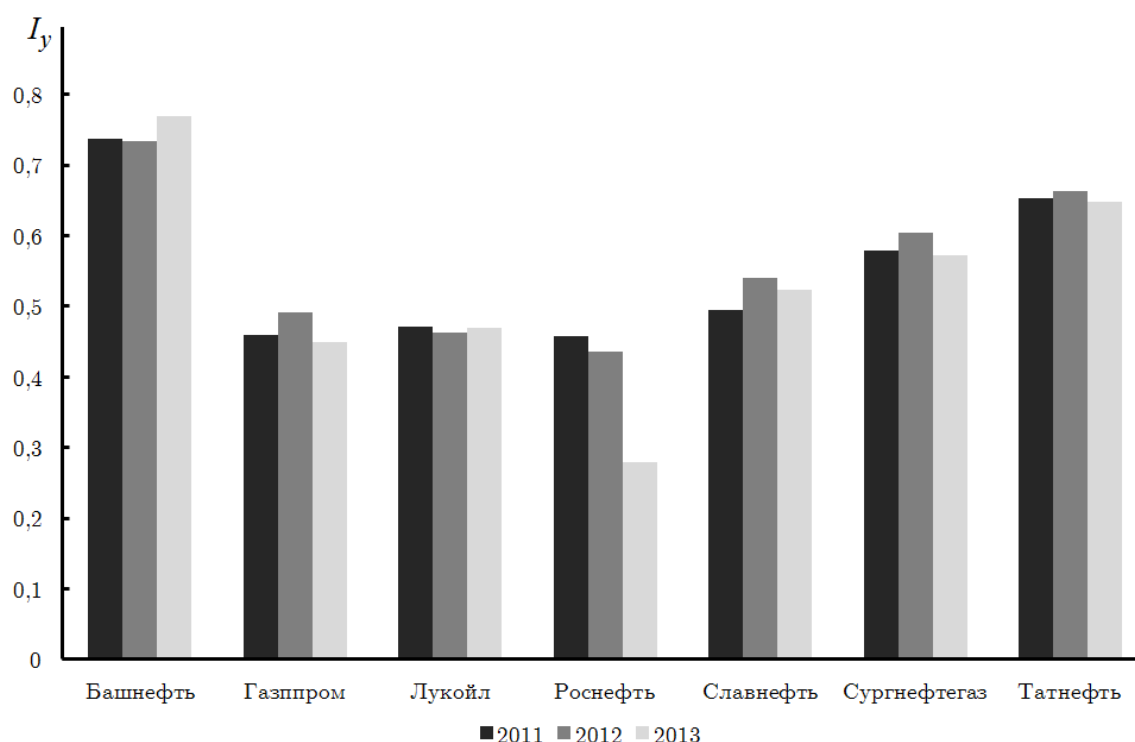


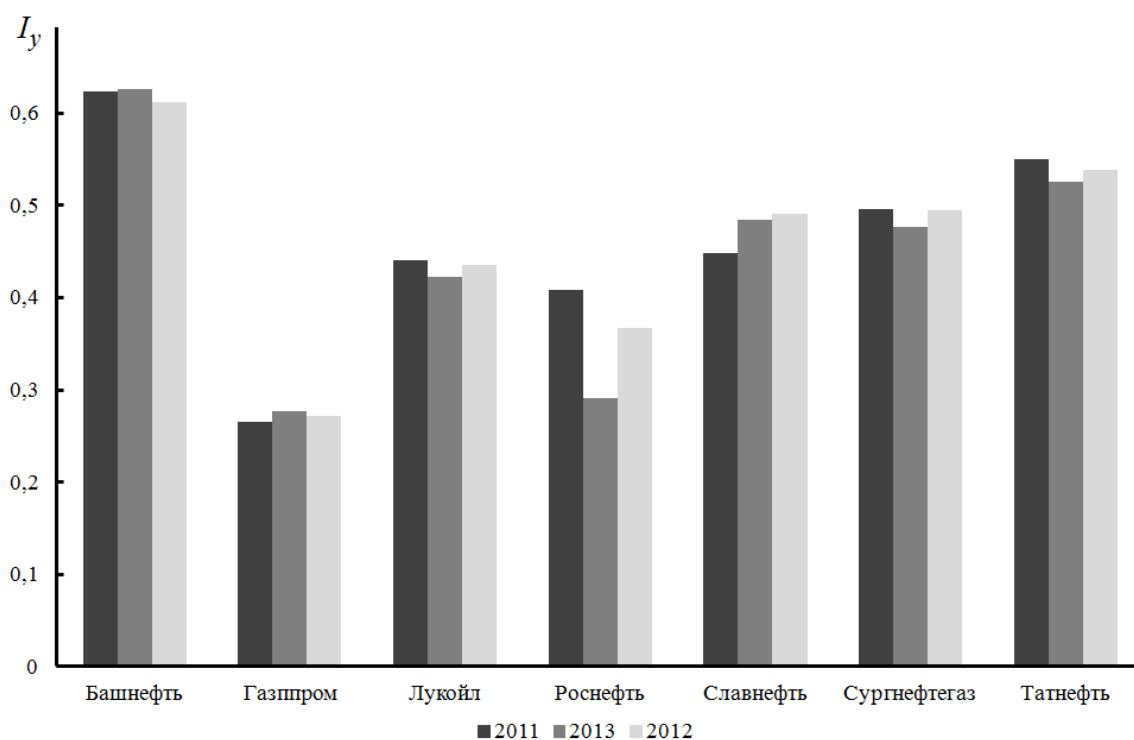
Рис. 2. Комплексный индикатор финансово-экономической устойчивости нефтегазовых предприятий в 2011, 2012 и 2013 гг.

Как видно из рисунка, самый высокий рейтинг имеют предприятия Башнефть и Татнефть, самый низкий рейтинг имеет предприятие Роснефть. Полученные результаты

хорошо согласуются с рейтингом, на основе обобщенного показателя финансовой устойчивости (рис. 1).

Предлагаемая методика позволяет оценить рейтинг предприятия не только в финансовом аспекте. Для построения рейтинга предприятия в финансово-экономическом аспекте предлагается использовать комплексный индикатор, построенный на базе финансовых и производственных показателей. Показатели делятся на две группы: 1) затратные (Оборотные активы, Долгосрочные обязательства, Краткосрочные обязательства, Среднесписочная численность работников, Запасы) 2) результатные (Добыча нефти, Добыча газа, Переработка нефти, Основные средства, Собственный капитал, Нераспределенная прибыль, Выручка от реализации, Прибыль до налогообложения, Чистая прибыль, Прибыль от продаж). Величина допустимых отклонений устанавливается равной 10 %.

На рис. 3 представлена диаграмма со столбцами, которая показывает изменение комплексных индикаторов финансово-экономической устойчивости нефтегазовых предприятий за 2013, 2012 и 2011 годах. Из диаграммы видно, что предприятие Башнефть имеет самый высокий рейтинг за три года. Предприятия Татнефть, Сургутнефтегаз, Славнефть и Лукойл имеют хорошую устойчивость, их показатели по трем годам стабильны и в нашем рейтинге они занимают 2, 3, 4 и 5 позиции. Предприятия Газпром, Роснефть имеют самый низкий рейтинг.



**Рис. 3.** Комплексный показатель финансово-экономической устойчивости нефтегазовых предприятий в 2011, 2012 и 2013 гг.

## Заключение

Рассмотрена задача построения рейтинга устойчивого развития предприятий. Предложена методология построения рейтинга предприятий, в основе которой лежит построение модели устойчивого развития предприятия. Для построения модели устойчивого

чивого развития предприятий используется метод собственных состояний. Выбор собственных состояний при построении модели устойчивости осуществляется по коэффициентам финансовой и экономической устойчивости. Комплексный индикатор устойчивости развития предприятий вычисляется с помощью метода штрафных функций и используется для построения рейтинга предприятий. Эффективность методологии демонстрируется на примере построения рейтинга устойчивого развития нефтегазовых компаний. В дальнейшем работа будет направлена на учет межклассовых и внутриклассовых различий предприятий при построении модели устойчивого развития предприятий. Предварительно предприятия группируются в классы по размеру собственного капитала, по объему производства продукции или численности персонала.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 14-01-00054).*

## **Литература**

1. Зиганшин Г.З., Камашева Ю.Л. Теория моделирования и управления экономическими процессами. Казань: Казанский государственный энергетический институт, 1999. 184 с.
2. Зубанов Н.В., Пестриков С.В. Анализ устойчивости функционирования экономических систем относительно поставленных целей. Самара: Издательство Самарского государственного технического университета, 1999. 133 с.
3. Горшенина Е.В., Хомяченкова Н.А. Мониторинг устойчивого развития промышленного предприятия // Российское предпринимательство. 2011. № 1–2. С. 63–69.
4. Омельченко И.Н., Саврасов А.Б. Построение интегрального показателя оценки организационно-экономической устойчивости деятельности компании // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2005. № 1. С. 74–80.
5. Шеремет А.Д., Негашев Е.В. Методика финансового анализа деятельности коммерческих организаций. М.: ИНФРА-М, 2004. 237 с.
6. Altman E.I. Financial Ratios. Discriminate analysis, and the prediction of corporate bankruptcy // Journal of Finance. 1968. Vol. 23, No. 4. P. 589–609.
7. Давыдова Г.В., Беликов А.Ю. Методика количественной оценки риска банкротства предприятий // Управление риском. 1999. № 3. С. 13–20.
8. Мокеев В.В., Плужников В.Г. Анализ главных компонент как средство повышения эффективности управленческих решений в предпринимательских структурах // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Экономика и менеджмент. 2011. Т. 41(258), № 20. С. 149–154.
9. Мокеев В.В., Соломахо К.Л. Технология принятия управленческих решений в предпринимательских структурах на основе регрессионных моделей // Управление инвестициями. 2011. № 4. С. 26–33.
10. Глухих И. Ю. Разработка моделей экспресс анализа финансовой состоятельности организаций на базе методов многомерного регрессионного анализа // Управленческое консультирование. 2011. № 3. С. 185–195.
11. Мокеев В.В. Решение проблемы собственных значений в задачах многофакторного анализа экономических систем // Экономика и математические методы. 2010. № 4. С. 82–90.



12. Мокеев В.В., Воробьев Д.А. Анализ эффективности процессов в социально-экономических системах методом собственных состояний // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2014. Т. 14, № 2. С. 31–40.
13. Mokeyev V.V. On enterprise performance evaluation based on the method of eigenstates // Automatic Documentation and Mathematical Linguistics. 2014. Vol. 48, No 5. P. 235–245. DOI: 10.3103/S0005105514050021.
14. Мокеев В.В., Бунова Е.В., Крепак Н.А. Анализ экономической устойчивости динамической системы на основе метода собственных состояний // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2014. Т. 14, № 4. С. 116–125.
15. Шикина С.А., Плужников В.Г. К вопросу об анализе параметров бизнес процессов производства методом собственных состояний на примере промышленного предприятия // Управление экономическими системами. 2014. № 10(70). С. 56–64.
16. Буслаева О.С. Использование метода собственных состояний для оценки инвестиционной привлекательности региона // Проблемы современной экономики. 2014. № 3. С. 6–24.
17. Карпушкина А.В., Воронина С.В. Устойчивое развитие региона: теоретические и методические аспекты // Управление экономическими системами. 2014. № 10. С. 9–16.
18. Mokeyev V.V., Vorobiev D.A. Analysis of socio-economic system processes performance with the help of eigenstate models // Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. 2015. Vol. 8, No. 1. P. 47–56. DOI: 10.14529/mmp150105.
19. Parlett B.N. The symmetric eigenvalue problem. NJ, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1980. 382 p.

Мокеев Владимир Викторович — д.т.н., заведующий кафедрой информационных систем, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), mokeyev@mail.ru

Нелюбина Мария Сергеевна — магистрант кафедры информационных систем, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), manuk94@mail.ru

*Поступила в редакцию 23 июля 2015 г.*

## ON DETERMINING OF RATING OF SUSTAINED ENTERPRISE DEVELOPMENT BY EIGENSTATE METHOD

*V.V. Mokeyev*, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

*M.S. Nelyubina*, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The paper considers a problem of determination of rating of sustained enterprise development by means of eigenstate method. Such a rating is based on a model of sustained enterprise development, which describes reference activity of the enterprise, satisfying the requirements of sustainable development. To determine the rating of sustained enterprise development a complex stability indicator is proposed, which is obtained by comparison actual and reference activity of the enterprise. The assessment of efficiency of the proposed methodology is demonstrated on the example of ranking of oil and gas enterprises.

*Keywords:* sustainable development of enterprise, principal component analysis, eigenstate method, sustainable development model.

### FOR CITATION

Mokeyev V.V., Nelyubina M.S. On Determining of Rating of Sustained Enterprise Development by Eigenstate Method. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2016. vol. 5, no. 1. pp. 69–84. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160107.

### References

1. Ziganshin G.Z., Kamasheva J.L. *Teoriya modelirovaniya i upravleniya ekonomicheskimi protsessami* [Theory of modeling and management of economic processes]. Kazan, Publishing Kazan State Power institute, 1999. 184 p. (in Russian)
2. Zubanov N.V., Pestrikov S.V. *Analiz ustoychivosti funktsionirovaniya ekonomicheskikh sistem otnositel'no postavlennykh tseley* [Analysis of the sustainability of the economic systems with respect to the goals]. Samara, Publishing Samara State Technical University, 1999. 133 p. (in Russian)
3. Gorshenina E.V., Homichenkova N.A. Monitoring ustoychivogo razvitiya promyshlennogo predpriyatiya [Monitoring of sustainable development of industrial enterprises]. *Rossiyskoe predprinimatel'stvo* [Russian Entrepreneurship]. 2011. no. 1–2. pp. 63–69. (in Russian)
4. Omelchenko I.N., Savrasov A.B. Postroenie integral'nogo pokazatelya otsenki organizatsionno-ekonomicheskoy ustoychivosti deyatelnosti kompanii [Construction of the integral index of evaluation of organizational and economic sustainability of the company]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroenie* [News of higher educational institutions. Mechanical Engineering]. 2005. no. 1. pp. 74–80. (in Russian)

5. Sheremet A.D., Negashev E.V. *Metodika finansovogo analiza deyatel'nosti kommercheskikh organizatsiy* [Methods of financial analysis of commercial organizations]. Moscow, INFRA-M, 2004. 237 p. (in Russian)
6. Altman E.I. Financial Ratios. Discriminate analysis, and the prediction of corporate bankruptcy. *Journal of Finance*. 1968. vol. 23, no. 4. pp. 589–609.
7. Davydova G.V., Belikov A.Ju. Metodika kolichestvennoy otsenki riska bankrotstva predpriyatiy [Methods of quantitative risk assessment bankruptcy]. *Upravlenie riskom* [Risk Management]. 1999. no. 3. pp. 13–20. (in Russian)
8. Mokeev V.V., Pluzhnikov V.G. Analiz glavnykh komponent kak sredstvo povysheniya effektivnosti upravlencheskikh resheniy v predprinimatel'skikh strukturakh [Principal component analysis as a means of improving the efficiency of administrative decisions in enterprise structures]. *Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Ekonomika i menedzhment* [Bulletin of South Ural State University. Series: Economics and Management]. 2011. vol. 41 (258), no. 20. pp. 149–154. (in Russian)
9. Mokeev V.V., Solomaho K.L. Tekhnologiya prinyatiya upravlencheskikh resheniy v predprinimatel'skikh strukturakh na osnove regressionnykh modeley [Technology management decision-making in the enterprise structures on the basis of regression models]. *Upravlenie investitsiyami* [Investment Management]. 2011. no. 4. pp. 26–33. (in Russian)
10. Gluhii I. Razrabotka modelej jekspress analiza finansovoy sostojatel'nosti organizacij na baze metodov mnogomernogo regressionnogo analiza [Development of models of rapid analysis of the financial viability of the organizations on the basis of multivariate regression analysis]. *Upravlencheskoe konsul'tirovanie* [Management Consulting]. 2011. no. 3. pp. 185–195. (in Russian)
11. Mokeev V.V. Reshenie problemy sobstvennykh znachenij v zadachah mnogofaktornogo analiza jekonomicheskikh sistem [Solving the problem of eigenvalues in problems of multivariate analysis of economic systems]. *Ekonomika i matematicheskie metody* [Economics and Mathematical Methods]. 2010. no. 4. pp. 82–90. (in Russian)
12. Mokeev V.V., Vorobiev D.A. Analiz jeffektivnosti processov v social'no-jekonomicheskikh sistemah metodom sobstvennykh sostojanij [Analysis of the effectiveness of processes in social and economic systems by eigensatate method]. *Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Komp'juternye tehnologii, upravlenie, radiojelektronika* [Bulletin of South Ural State University. Series: Computer technology, management, electronics]. 2014. vol. 14, no. 2. pp. 31–40. (in Russian)
13. Mokeev V.V. On enterprise performance evaluation based on the method of eigenstates. *Automatic Documentation and Mathematical Linguistics*. 2014. vol. 48, no 5. pp. 235–245. DOI: 10.3103/S0005105514050021.
14. Mokeev V.V., Bunova E.V., Krepak N.A. Analiz jekonomicheskoy ustojchivosti dinamicheskoy sistemy na osnove metoda sobstvennykh sostojanij [Analysis of the economic stability of a dynamical system on the basis of their own states.]. *Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Komp'juternye tehnologii, upravlenie, radiojelektronika* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer technology, management, electronics]. 2014. vol. 14, no. 4. pp. 116–125. (in Russian)
15. Shikina S.A., Pluzhnikov V.G. K voprosu ob analize parametrov biznes protsessov proizvodstva metodom sobstvennykh sostoyanij na primere promyshlennogo predpriyatiya [On the question of analyzing the parameters of the business processes of production by

- its own conditions on the example of the industrial enterprise]. *Upravlenie ekonomicheskimi sistemami* [Management of economic systems]. 2014. no. 10(70). pp. 56–64. (in Russian)
16. Buslaeva O.S. Ispol'zovanie metoda sobstvennykh sostoyaniy dlya otsenki investitsionnoy privlekatel'nosti regiona [The use of their own states for assessing the investment attractiveness of the region]. *Problemy sovremennoy ekonomiki* [Problems of modern economy]. 2014. no. 3. p. 6–24. (in Russian)
  17. Karpushkina A.V., Voronina S.V. Ustojchivoe razvitie regiona: teoreticheskie i metodicheskie aspekty [Sustainable development of the region: theoretical and methodological aspects]. *Upravlenie ekonomicheskimi sistemami* [Management of economic systems]. 2014. no. 10. pp. 9–16. (in Russian)
  18. Mokeyev V.V., Vorobiev D.A. Analysis of socio-economic system processes performance with the help of eigenstate models. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modeling, Programming and Computer Software. 2015. vol. 8, no. 1. pp. 47–56. DOI: 10.14529/mmp150105.
  19. Parlett B.N. The symmetric eigenvalue problem. NJ, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1980. 382 p.

*Received July 23, 2015.*

## СРАВНЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ИСТИННОСТИ ЗАПРОСОВ К РЕЛЯЦИОННОЙ БАЗЕ ДАННЫХ

*С.В. Мосин*

В данной статье предлагается описание подходов аналитического сравнения пользовательских запросов к реляционной базе данных. Такое сравнение имеет целью установление возможности частичного или полного использования закэшированных на компьютере пользователя запросов к СУБД и основано на применении аппарата логики предикатов, где в качестве формул выступают логические ограничения SQL, а предикатами служат элементарные операции SQL. В случае, если результат выполнения пользовательского запроса полностью содержится в кэше, то данные можно взять оттуда, минуя запрос к удаленному серверу. Описанные подходы выражены в алгоритме использования кэшированных данных. Предложенный алгоритм также может быть использован для определения недостающих в кэше данных и последующего запроса только на эти данные. Для этого также используются аналитические вычисления, что экономит сетевой трафик и время на выполнение запросов и является принципиальным отличием данной технологии от существующих аналогов.

*Ключевые слова:* реляционная база данных, кэш, область истинности.

### ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Мосин С.В. Сравнение областей истинности запросов к реляционной базе данных // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 1. С. 85–99. DOI: 10.14529/cmse160108.

### Введение

В данной работе рассматривается проблема использования результатов выполнения запросов, закэшированных на компьютере пользователя. Такие данные будем называть представлениями (иначе сохраненные представления, промежуточные представления). Мы предполагаем наличие централизованного сервера и множество удаленных клиентов с расположенной на сервере реляционной базой данных. В кэше сохраняются результаты выполнения запросов для того, чтобы обеспечить максимальное использование сохраненных данных при выполнении последующих запросов.

Поставленная проблема связана с областью оптимизации запросов, поскольку нацелена на сокращение объема передаваемых данных с сервера базы данных. Зарезервированные данные активно используются в системах управления базами данных (СУБД). Но в большинстве случаев это касается повторного использования данных, записанных в кэш, без предварительного анализа содержимого на предмет возможности частичного или комбинированного использования. Работа СУБД ограничивается тем, что при выполнении очередного запроса блоки данных не запрашиваются с внешних устройств, если они есть в кэше, т.е. анализируются номера блоков, а не их содержимое.

Целью данной работы является разработка методов аналитического сравнения логических ограничений запросов, а также построение алгоритма использования кэшированных данных. Проблема актуализации данных не затрагивается в данной статье.

Раздел 1 посвящен обзору публикаций на схожие темы: использование кэша при работе с различными видами баз и хранилищ данных, логика предикатов и ее применение в сфере баз данных. В разделе 2 описывается формализованная постановка задачи. Раздел 3 представляет подходы к аналитическому сравнению простейших операций языка

SQL, из которых строятся все логические формулы. В следующем разделе, 4, выводятся основные эквивалентности, используемые при определении возможности использования кэша. Заключительный раздел 5 объединяет полученные результаты в виде схемы алгоритма использования кэша в ходе исполнения запросов к реляционной базе данных. В заключении сделано обобщение полученных результатов и приведены дальнейшие направления исследований.

## 1. Обзор существующих работ

В области теоретических исследований ситуация складывается следующим образом. Огромное число публикаций посвящено проблеме построения оптимального плана запроса на основе формальных правил, в которых не используются области определения предикатов в SQL-операторах (логическая оптимизация) либо эти области учитываются при вычислении статистических оценок для оптимизации физического доступа к базе данных. Близкими по методам решения являются задачи выполнения запросов на потоках данных [5, 13], однако различные, по сравнению с настоящей работой, цели приводят к различным результатам.

Наиболее близка к рассматриваемой проблеме работа [1]. В ней рассматриваются конъюнктивные запросы над доменами данных с предикатами в виде арифметических сравнений, и представлены алгоритмы вычисления запросов с использованием представлений. В настоящей работе рассматривается специальный вид универсального реляционного запроса над отношениями базы данных, а не над отдельными доменами. Хотя цели в обеих работах совпадают, результаты различны по указанной причине. В частности, в настоящей работе нет необходимости разрабатывать алгоритмы выборки данных из промежуточных представлений, так как их замещает реляционная алгебра.

Существует ряд работ, в которых рассматривается проблема оптимизации запросов к многомерным хранилищам данных с использованием сохраненных представлений. При этом существуют два основных подхода для резервирования результатов запросов: статический [2, 6, 7] и динамический [9, 14–16]. Первый базируется на использовании набора фиксированных запросов, во втором же предполагается динамический выбор результатов запросов для резервирования на основе статистики появления а также вычислительной стоимости выполнения запросов. В качестве источника данных используются хранилища данных, либо реляционная база данных, преобразованная к иерархическому виду. При этом, рассматриваются специальные запросы манипулирования многомерными данными. В данной статье рассматривается технология раздельного формирования размерностей представления данных. Поэтому интерес представляют стандартные SQL запросы к базе данных и промежуточным представлениям. Результирующее представление может быть затем обработано специальными запросами манипулирования многомерными данными.

В работе [10] решается задача анализа содержимого кэша, при этом промежуточным представлениям в кэше ставятся в соответствие предикаты. Проблема использования представлений решается за счет выводимости предикатов. В данной работе проблему использования промежуточных представлений предлагается решать посредством вычисления их областей истинности. Это позволяет, во-первых, аналитически определить возможность использования кэша, а во-вторых, сформировать SQL команды, которые позволят загрузить недостающие данные с сервера базы данных.

Данная работа основывается на теоретических результатах, описанных в статье [12], где предлагается технология, в основе которой лежит понятие области истинности логического ограничения, накладываемого на пользовательский запрос к базе данных. Фактически, данная статья является логическим продолжением указанной работы, определяя аналитические операции над областями истинности пользовательских запросов.

Основным инструментом работы с логическими формулами в статье является аппарат математической логики первого порядка, или логики предикатов [3, 8, 11]. Данная работа не ставит целью получение новых результатов в области математической логики, а лишь использует имеющиеся результаты в применении к логическим ограничениям языка SQL, расширяя таким образом возможности анализа пользовательских запросов по сравнению с классическими подходами СУБД, где нет возможности частичного или комбинированного использования закэшированных запросов.

В книге [4] подробно описано то, как логика предикатов используется в языке SQL в виде реляционного исчисления (relational calculus), а также приведены основные эквивалентности логических предикатов, используемые в данной статье.

## 2. Постановка задачи

Будем рассматривать реляционную базу данных со схемой  $R = \{R_1, R_2, \dots, R_N\}$ .

**Определение 1.** *Универсальным реляционным запросом называется запрос следующего вида:*

$$P = \pi_X(\sigma_F(R_1 \bowtie \dots \bowtie R_m)), m \in [1, \dots, N]$$

Логические формулы, по которым проводится селекция, будем рассматривать в дизъюнктивной нормальной форме. В общем случае формула  $F$  имеет вид

$$F = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_l, \quad (1)$$

$$K_i = T_1 \& T_2 \dots \& T_s, i = 1, \dots, l, \quad (2)$$

где  $T_j, j = 1, \dots, s$  – предикаты, в которых явным образом специфицированы расширенные имена атрибутов  $R_i.A_j$  (атрибут  $A_j$  в отношении  $R_i$ ):

Возможные значения  $T_j$ :

- операция сравнения  $Expr_1 \theta Expr_2$ ,  $\theta$  – операция сравнения ( $\theta \in \{=, \neq, >, <, \leq, \geq\}$ ),  $Expr_i$  – согласованные по типам допустимые выражения, определенные на множестве расширенных имен атрибутов и констант;
- операция  $Expr_1$  [NOT] BETWEEN  $Expr_2$  AND  $Expr_3$  (содержимое в прямоугольных скобках [\*] для предиката не является обязательным при написании);
- операция  $Expr$  [NOT] IN  $S$ , где  $S$  – список значений либо подзапрос, результатом которого является столбец атрибута  $A_j$  в отношении  $R_i$ ;
- операция  $Str_1$  [NOT] LIKE  $Str_2$ , где  $Str_i$  – строки;
- операция  $Expr \theta ALL/ANY S$ .

*Обозначение.* Множество атрибутов, входящих в формулу, выражает размерность формулы и обозначается  $\langle F \rangle$ .

$$\langle F \rangle = \{R_1^F.A_1^F, \dots, R_k^F.A_k^F\}, k - \text{количество атрибутов, входящих в формулу} \quad (3)$$

Перечисленные варианты операций используют не все возможности языка SQL. Например, предикат *EXISTS* не используется, поскольку в нем явно не специфицированы расширенные имена атрибутов, предикат *NULL* используется в данной работе для другой цели.

В статье [12] приведен алгоритм преобразования логических формул, который позволяет избежать получения значения *UNKNOWN* в результате вычисления значений формул. Далее будем предполагать, что все формулы  $F$  являются преобразованными.

Введем в рассмотрение множество  $\mathcal{A} = \{(a_1, \dots, a_L) \mid a_i \in \text{Dom}(A_i), i = 1, \dots, L\}$ , где  $\text{Dom}(A_i)$  – множество всех допустимых значений атрибута  $A_i$ . Декартово произведение  $\text{Dom}(A_1) \times \text{Dom}(A_2) \times \dots \times \text{Dom}(A_L)$  –  $L$ -мерное пространство значений всех атрибутов базы данных.

**Определение 2.** Областью истинности логической формулы  $F$ , заданной (1), (2), (3), является множество, определяемое по следующему правилу:  $M(F) = \{a \in \mathcal{A} \mid F(a) = \text{TRUE}\}$ .

Данное определение изначально введено в статье [12].

В соответствии с данными определениями легко понять, как будут устроены операции над областями истинности.  $M(F)$  для некоторой формулы  $F$ , заданной своей дизъюнктивной нормальной формой, является объединением областей истинности, представленных отдельными конъюнктами формулы. Область истинности каждого конъюнкта определяется как пересечение областей истинности предикатов, входящих в него.

Далее введем определения, касающиеся модификации вхождения атрибутов в логические формулы.

**Определение 3.** Проекцией логической формулы  $F$ , заданной (1), (2), (3), на множество атрибутов  $X$  называется логическая формула  $F[X]$ ,  $\langle F[X] \rangle = X$ , в которой все термы, содержащие атрибуты  $R_i^F.A_i^F \notin X$ , заменены на тривиальный терм *TRUE*.

Основные теоретические результаты, позволяющие судить о возможности использования кэша при выполнении запросов:

**Теорема 1.**  $P^* \subseteq \pi_{X^*}(\sigma_{F^*[X]}(P_1 \bowtie \dots \bowtie P_n))$ , где  $X = \bigcup_{v=1}^n X_v$  если:

- а)  $X^* \subseteq X$
- б)  $\bigcup_{v=1}^n \{R_1^v, \dots, R_{s(v)}^v\} = \{R'_1, \dots, R'_{s'}\} \subseteq \{R_1^*, \dots, R_l^*\}$
- в)  $M(F^*) \subseteq M(F_v), v = 1, \dots, n$ .

Предложенные в теореме условия гарантируют, что данные, необходимые для формирования целевого запроса  $P^*$ , содержатся в промежуточном представлении  $P_v$ . Однако в нем могут быть лишние кортежи, которые дают значение *TRUE* при подстановке в формулу  $F^*$ . Дело в том, что эти кортежи будут удалены при выполнении операции естественного соединения с отношениями, которых не хватает в множестве  $R_1^v \bowtie R_2^v \bowtie \dots \bowtie R_{s(v)}^v$  для совпадения с множеством  $R_1^* \bowtie R_2^* \bowtie \dots \bowtie R_l^*$ .

Следующая теорема соответствует частному случаю, где проблема лишних кортежей не возникает.

**Теорема 2.**  $P^* = \pi_{X^*}(\sigma_{F^*}(P_1 \bowtie \dots \bowtie P_n))$ , где  $X = \bigcup_{v=1}^n X_v$  если:

- а)  $X^* \subseteq X, X_v \supseteq \langle \bowtie_{i=1}^{s(v)} R_i^v \rangle \cap (\bigcup_{\substack{w=1 \\ w \neq v}}^n \langle \bowtie_{i=1}^{s(w)} R_i^w \rangle), v = 1, \dots, n$



- б)  $\bigcup_{v=1}^n \{R_1^v, \dots, R_{s(v)}^v\} = \{R'_1, \dots, R'_{s'}\} = \{R_1^*, \dots, R_l^*\}$   
 в)  $M(F^*) \subseteq M(F_v), v = 1, \dots, n$   
 г)  $\langle F^* \rangle \subseteq X$ .

Доказательства теорем приведены в статье [12].

Для проверки условий в) обеих теорем, очевидно, требуется уметь аналитически сравнивать области истинности логических формул. Этому будет посвящен следующий раздел. Далее на основе полученных результатов будет построен алгоритм, позволяющий для данного набора заэкшированных представлений и некоторого целевого представления определить, можно ли воспользоваться кэшем для получения искомым данных и, если нет, получить недостающие данные.

### 3. Логические операции над предикатами

Рассмотрим элементарные логические предикаты, из которых состоит логическая формула, заданная (1), (2), (3). Для этого нам понадобится вычислять значение логических операций  $\vee, \&, \neg$  над предикатами  $T_j, j = 1, \dots, s$ . Определение значения логической формулы аналитически возможно в случае, если формула не зависит от значений атрибутов базы данных (БД). Приведение к такому виду возможно в ряде изложенных далее случаев.

#### 3.1. Упрощение конъюнкции и дизъюнкции простых предикатов

1.  $Expr_1 \theta Expr_2, (\theta \in \{=, \neq, >, <, \leq, \geq\})$

Данный тип операций определяет простейшие арифметические операции равенства и неравенства. Сравнение таких предикатов сводится к применению элементарных правил решения неравенств.

Пусть даны следующие предикаты:

- $T_1 = (R_i.A_j \theta_1 a), a \in Dom(R_i.A_j)$
- $T_2 = (R_i.A_j \theta_2 b), b \in Dom(R_i.A_j)$

Рассмотрим всевозможные комбинации конъюнкции и дизъюнкции данных типов предикатов, при которых в результате получается тривиальное значение *TRUE* либо *FALSE*.

Заметим, что операции  $\leq, \geq$  сводятся к операциям  $<, >, =, \neq$ :  $x_1 \leq x_2 \sim x_1 < x_2 \vee x_1 = x_2$ , поэтому мы исключаем их из дальнейшего рассмотрения.

Также обратим внимание, что если  $\theta_1 = \theta_2$ , то  $T_1 \& T_2 \equiv TRUE \iff a = b$ . Далее рассматриваем только различные операции  $\theta_1$  и  $\theta_2$ .

- (а)  $\theta_1 = "="$

- i.  $\theta_2 = "\neq"$

$$T_1 \& T_2 \equiv TRUE \iff a = b$$

$$T_1 \& T_2 \equiv FALSE \iff a \neq b$$

- ii.  $\theta_2 = "<"$

$$T_1 \& T_2 \equiv FALSE \iff a > b$$

- iii.  $\theta_2 = ">"$

$$T_1 \& T_2 \equiv FALSE \iff a < b$$

(b)  $\theta_1 = \neq$

Никакие прочие операции не дают в результате тождественной истины или лжи при проведении конъюнкции или дизъюнкции с  $T_1$  в данном случае.

(c)  $\theta_1 = <$

Упрощение возможно только в случае  $\theta_2 = >$ . Получаем:

$$T_1 \& T_2 \equiv FALSE \iff a < b$$

$$T_1 \vee T_2 \equiv TRUE \iff a \geq b$$

2.  $Expr_1$  [NOT] BETWEEN  $Expr_2$  AND  $Expr_3$

Эта и дальнейшие операции (кроме *LIKE*) сводятся к операциям первого типа:

(a)  $Expr_1$  BETWEEN  $Expr_2$  AND  $Expr_3$

$T = (R_i.A_j$  BETWEEN  $a$  AND  $b)$ ,  $a, b \in Dom(R_i.A_j)$  Эквивалентное представление данной операции:  $T = (a \leq R_i.A_j \leq b)$

(b)  $Expr_1$  NOT BETWEEN  $Expr_2$  AND  $Expr_3$

$T = (R_i.A_j$  NOT BETWEEN  $a$  AND  $b)$ ,  $a, b \in Dom(R_i.A_j)$  Эквивалентное представление данной операции:  $T = (R_i.A_j \leq a \vee R_i.A_j \geq b)$

3.  $Expr$  [NOT] LIKE  $Str$ ,

$Expr$  — атрибут строкового типа данных,  $Str$  — строка особого типа, содержащая управляющие символы языка SQL. К ним относятся:

- '%' Данный символ совпадает при сравнении с любым количеством любых символов строки
- '\_' Данный символ совпадает при сравнении с одним любым символом строки

Различные диалекты языка SQL от разных производителей СУБД дополняют этот список другими управляющими конструкциями, так что он может отличаться в зависимости от реализации. Но так или иначе сравнение предикатов такого вида имеет схожую схему. По сути данная операция представляет из себя упрощенное регулярное выражение. Проведение таких операций, как дизъюнкция, конъюнкция и отрицание, осуществляется точно также как для регулярных выражений.

4.  $Expr$  [NOT] IN  $S$ , где  $S$  — список значений или подзапрос, результат которого — это множество значений атрибута  $R_i.A_j$ .

(a)  $Expr$  IN  $S$

Если  $S$  — это список заранее заданных значений:

$$T = (R_i.A_j \text{ IN } \{s_1, s_2, \dots, s_l\}), s_k \in Dom(R_i.A_j), k = 1, \dots, l$$

Эквивалентное представление:  $T = (\bigvee_{k=1}^l R_i.A_j = s_k)$

Если  $S$  — это подзапрос:

$$T = (R_i.A_j \text{ IN } \pi_{R_i.A_j}(\sigma_F(R_1 \bowtie \dots \bowtie R_n)))$$

(b)  $Expr$  NOT IN  $S$

Если  $S$  — это список заранее заданных значений:

$$T = (R_i.A_j \text{ NOT IN } \{s_1, s_2, \dots, s_l\}), s_k \in Dom(R_i.A_j), k = 1, \dots, l$$

Эквивалентное представление:  $T = (\bigwedge_{k=1}^l R_i.A_j \neq s_k)$

Если  $S$  — это подзапрос:

$$T = (R_i.A_j \text{ IN } \pi_{R_i.A_j}(\sigma_F(R_1 \bowtie \dots \bowtie R_n)))$$

5. *Expr*  $\theta$  *ALL/ANY* *S*.

Данная операция является обобщением операций первого типа и сводится к нему в случае простого списка значений.

(a) *Expr*  $\theta$  *ALL* *S*

Если *S* – это список заранее заданных значений:

$$T = (R_i.A_j \theta \text{ ALL } \{s_1, s_2, \dots, s_l\}), s_k \in \text{Dom}(R_i.A_j), k = 1, \dots, l$$

Эквивалентное представление:

$$T = (R_i.A_j \theta s_1 \& R_i.A_j \theta s_2 \& \dots \& R_i.A_j \theta s_k)$$

Если *S* – это подзапрос:

$$T = (R_i.A_j \theta \text{ ALL } \pi_{R_i.A_j}(\sigma_F(R_1 \bowtie \dots \bowtie R_n)))$$

(b) *Expr*  $\theta$  *ANY* *S*

Если *S* – это список заранее заданных значений:

$$T = (R_i.A_j \theta \text{ ANY } \{s_1, s_2, \dots, s_l\}), s_k \in \text{Dom}(R_i.A_j), k = 1, \dots, l$$

Эквивалентное представление:

$$T = (R_i.A_j \theta s_1 \vee R_i.A_j \theta s_2 \vee \dots \vee R_i.A_j \theta s_k)$$

Если *S* – это подзапрос:

$$T = (R_i.A_j \theta \text{ ANY } \pi_{R_i.A_j}(\sigma_F(R_1 \bowtie \dots \bowtie R_n)))$$

### 3.2. Упрощение конъюнкции и дизъюнкции предикатов, содержащих подзапросы

Если в операциях 4 и 5 типа встречается подзапрос, аналитическое сравнение таких предикатов возможно только в некоторых частных случаях. Дело в том, что нельзя заранее определить область истинности таких предикатов, так как она зависит от реализации базы данных. Использование же информации о БД противоречит аналитическому подходу. Рассмотрим условия, при которых возможно их сравнивать аналитически.

Пусть подзапросы имеют следующий вид:

$$S_1 = \pi_{R_i.A_j}(\sigma_{F_1}(R_1^1 \bowtie \dots \bowtie R_l^1))$$

$$S_2 = \pi_{R_i.A_j}(\sigma_{F_2}(R_1^2 \bowtie \dots \bowtie R_k^2))$$

$S_1$  и  $S_2$  являются множествами и, следовательно, могут быть следующие ситуации:

1.  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$

Определить, что подзапросы не пересекаются, аналитически можно, если  $M(F_1) \cap M(F_2) = \emptyset$ . В данном случае наблюдаются следующие эквивалентности:

(a)  $(R_i.A_j \text{ IN } S_1) \& (R_i.A_j \text{ IN } S_2) \equiv \text{FALSE}$

(b)  $(R_i.A_j = \text{ALL } S_1) \& (R_i.A_j = \text{ALL } S_2) \equiv \text{FALSE}$

2.  $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$

В общем случае нет возможности установить упрощения к виду тождественной истины/лжи.

### 3.3. Операция отрицания для всех типов предикатов

Логическое отрицание ставит в соответствие противоположный предикат в каждом из случаев.

1.  $Expr_1 \theta Expr_2$ , ( $\theta \in \{=, \neq, >, <, \leq, \geq\}$ )  
 $T = (R_i.A_j \theta a) \rightarrow \neg T = (R_i.A_j \neg\theta a), a \in Dom(R_i.A_j)$ 
  - $T = (R_i.A_j = a) \rightarrow \neg T = (R_i.A_j \neq a)$
  - $T = (R_i.A_j > a) \rightarrow \neg T = (R_i.A_j < a)$
  - $T = (R_i.A_j \geq a) \rightarrow \neg T = (R_i.A_j \leq a)$
2.  $Expr_1 [NOT] BETWEEN Expr_2 AND Expr_3$   
 $T = (R_i.A_j BETWEEN a AND b), a, b \in Dom(R_i.A_j) \rightarrow$   
 $\rightarrow \neg T = (R_i.A_j NOT BETWEEN a AND b)$
3.  $Expr [NOT] LIKE Str$   
 $T = (R_i.A_j LIKE Str) \rightarrow \neg T = (R_i.A_j NOT LIKE Str)$
4.  $Expr [NOT] IN S$   
 $T = (R_i.A_j IN S) \rightarrow \neg T = (R_i.A_j NOT IN S)$
5.  $Expr \theta ALL/ANY S$   
 $T = (R_i.A_j \theta ALL S) \rightarrow \neg T = (R_i.A_j \neg\theta ANY S)$

## 4. Операции над областями истинности логических формул

Здесь и далее будем рассматривать только случай нескольких промежуточных представлений как более общий.

Проверка на пустоту пересечения областей истинности логических формул осуществляется следующим образом:  $M(F^*) \cap (M(F_1) \cup M(F_2) \cup \dots \cup M(F_n)) = \emptyset \iff M(F^* \& (F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n)) = \emptyset \iff F^* \& (F_1 \vee F_2 \vee \dots \vee F_n) \equiv FALSE$ .

Для выполнения условий теорем 1, 2 требуется установить включение области истинности формулы пользовательского запроса  $M(F^*)$  в область истинности формул промежуточных представлений  $M(F_1), M(F_2), \dots, M(F_n)$ , или  $M(F^*) \subseteq M(F_v), v = 1, \dots, n$ , то есть должно быть выполнено  $M(F^*) \subseteq M(F_1) \& M(F^*) \subseteq M(F_2) \& \dots \& M(F^*) \subseteq M(F_n) \equiv TRUE \iff M(F^*) \subseteq M(F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n) \equiv TRUE \iff F^* \rightarrow F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n \equiv TRUE \iff F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n \vee \neg F^* \equiv TRUE$ .

Практическая проверка данных условий аналитическим способом возможна путем упрощения формул при помощи правил, изложенных в предыдущем пункте.

Для получения недостающих в кэше данных необходимо уметь строить формулу, область истинности которой равна разности областей истинности исходных формул:  $M(F^*) \setminus M(F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n) = M(F_{n+1})$ . Такая формула  $F_{n+1}$ , очевидно, выражается следующим образом:  $F_{n+1} = F^* \& \neg(F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n)$ .

## 5. Алгоритм использования кэшированных данных

Далее приводится схема алгоритма аналитической проверки логических ограничений и определения недостающих в кэше данных. Затем рассматривается 2 примера, демонстрирующие его применение.

## 5.1. Схема алгоритма

Пусть сохраненные на пользовательской машине данные определены  $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ , целевой запрос обозначим  $P^*$ . Пусть также выполнены условия а) и б) Теоремы 1.

Алгоритм получения искомого представления данных с использованием кэша.

Функция  $get\_data\_from\_server()$  запрашивает требуемые данные с сервера БД, минуя кэш. Функция  $get\_data\_from\_cache()$  получает данные из кэша. Алгоритм, лежащий в основе, базируется на результатах теорем 1, 2. Подробное его описание выходит за рамки данной статьи и будет представлено отдельно в будущем.

**Require:**  $P = \{P_1, \dots, P_n\}$ ;

$R^* = \{R_1^*, \dots, R_l^*\}$ ;

$F^*$ ;

$F_v, v = 1, \dots, n$ ;

$X^*$ ;

$X_v, v = 1, \dots, n$ ;

$\bigcup_{v=1}^n \{R_1^v, \dots, R_{s(v)}^v\} = \{R'_1, \dots, R'_{s'}\} \subseteq \{R_1^*, \dots, R_l^*\}$ ;

$M(F^*) \subseteq M(F_v), v = 1, \dots, n$ .

**if**  $M(F^*) \cap (M(F_1) \cup M(F_2) \cup \dots \cup M(F_n)) = \emptyset$  **then**

**return**  $get\_data\_from\_server()$

**end if**

**if**  $M(F^*) \subseteq (M(F_1) \cap M(F_2) \cap \dots \cap M(F_n))$  **then**

**return**  $get\_data\_from\_cache()$

**end if**

$F_{n+1} \leftarrow F^* \& \neg(F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n)$

$P_{n+1} \leftarrow \pi_{X^*}(\sigma_{F_{n+1}}(R_1 \bowtie \dots \bowtie R_l))$

**return**  $get\_data\_from\_cache()$

Пояснение шагов алгоритма:

1. Проверка условия  $M(F^*) \cap (M(F_1) \cup M(F_2) \cup \dots \cup M(F_n)) = \emptyset$ . Если выполнено, делаем запрос к БД, кэш в данном случае бесполезен.
2. Проверка условия  $M(F^*) \subseteq (M(F_1) \cap M(F_2) \cap \dots \cap M(F_n))$ . Если выполнено, получаем данные из кэша.
3. Вычисляем недостающие данные:  $P_{n+1} = \pi_{X^*}(\sigma_{F_{n+1}}(R_1 \bowtie \dots \bowtie R_l))$ ,  $M(F_{n+1}) = M(F^*) \setminus M(F_1 \& F_2 \& \dots \& F_n)$ . Делаем запрос к БД только на эти данные, помещаем их в кэш. По построению условие  $M(F^*) \subseteq (M(F_1) \cap M(F_2) \cap \dots \cap M(F_n) \cap M(F_{n+1}))$  теперь выполнено.  $P^* \subseteq \pi_{X^*}(\sigma_{F^*[X]}(P_1 \bowtie \dots \bowtie P_n)) \cup P_{n+1}$ , и мы можем получить данные из кэша.

## 5.2. Примеры

Рассмотрим фрагмент схемы БД, представляющий учебный план в университете:

$R_1 = \text{Студенты (№ студента, ФИО, Группа)}$

$R_2 = \text{Группы (Группа, Факультет)}$

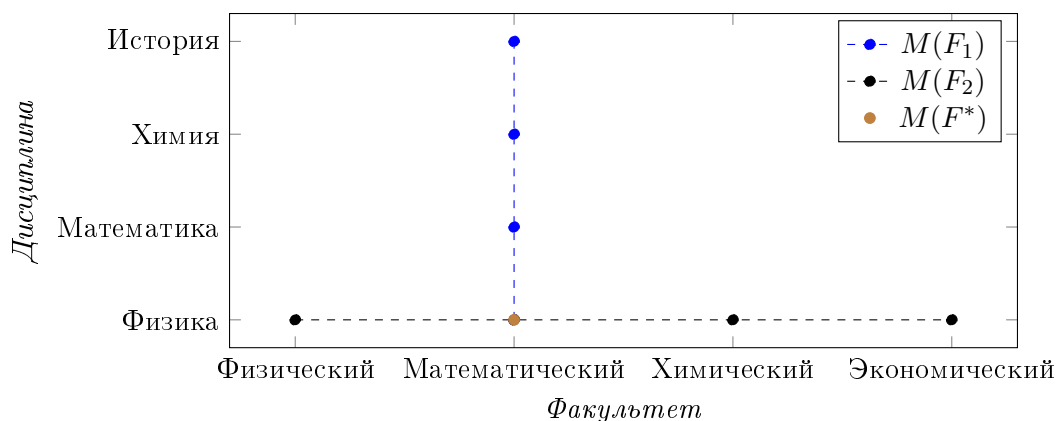


Рис. 1. Области истинности логических формул

$$R_3 = \text{Успеваемость} (\mathbf{№} \text{ студента}, \text{Дисциплина}, \text{Оценка})$$

Имена отношений выделены курсивом, их первичные ключи – жирным шрифтом.

**Пример 1.**

Предположим, что на компьютере пользователя сохранены результаты выполнения следующих запросов:

1. Список студентов математического факультета:

$$P_1 = \pi_{X_1}(\sigma_{F_1}(R_1 \bowtie R_2)),$$

где  $\pi_{X_1}$  – проекция по множеству атрибутов  $X_1$ .  $X_1 = \{\text{ФИО}, \text{Группа}\}$ ,  $\sigma$  – операция селекции,  $F_1$  – логическая формула:  $F_1 = (\text{Факультет} = \text{”Математический”})$ .

В результате данного запроса будут получены те кортежи БД, которые удовлетворяют формуле  $F_1$ , причем с сервера будут запрошены только атрибуты ФИО, Группа.

2. Ведомости по физике:

$$P_2 = \pi_{X_2}(\sigma_{F_2}(R_1 \bowtie R_3)),$$

где  $X_2 = \{\text{ФИО}, \text{Группа}, \text{Оценка}\}$ ,  $F_2$  – логическая формула:  $F_2 = (\text{Дисциплина} = \text{”Физика”})$ .

3. Отчет успеваемости по физике математического факультета:

$$P^* = \pi_{X^*}(\sigma_{F^*}(R_1 \bowtie R_2 \bowtie R_3)),$$

где  $X^* = \{\text{ФИО}, \text{Группа}, \text{Оценка}\}$ ,  $F^*$  – логическая формула:  $F^* = (\text{Факультет} = \text{”Математический”} \ \& \ \text{Дисциплина} = \text{”Физика”})$ .

Проверим возможность применения алгоритма. В нашем случае заэкшированные данные - это два первых запроса:  $P = \{P_1, P_2\}$ . Целевой запрос –  $P^*$ .  $X^* = \{\text{ФИО}, \text{Группа}, \text{Оценка}\}$ ,  $X = X_1 \cup X_2 = \{\text{ФИО}, \text{Группа}, \text{Оценка}\} \Rightarrow X^* = X$ . Таким образом, условие а) выполнено.  $\{R_1, R_2\} \cup \{R_1, R_3\} = \{R_1, R_2, R_3\} \subseteq \{R_1, R_2, R_3\}$ . Следовательно, условие б) также выполняется.

Выполняем пункт первый алгоритма. Необходимо понять, есть ли вообще что-то общее у заэкшированных запросов и целевого запроса, т.е. проверить условие:  $M(F^*) \cap (M(F_1) \cup M(F_2)) = \emptyset$ . Как показано в пункте 4, данное условие эквивалентно  $F^* \ \& \ (F_1 \vee F_2) \equiv \text{FALSE}$ . Подставляя формулы запросов, получаем:  $\text{Факультет} = \text{”Математический”} \ \& \ \text{Дисциплина} = \text{”Физика”} \ \& \ (\text{Факультет} = \text{”Математический”} \ \vee$

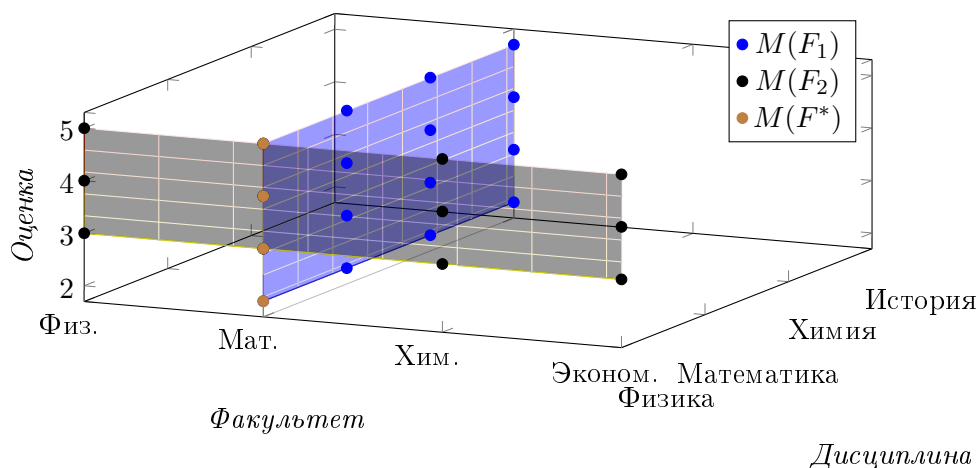


Рис. 2. Области истинности логических формул

Дисциплина = "Физика")  $\equiv FALSE$ . Применим свойство дистрибутивности: Факультет = "Математический" & Дисциплина = "Физика"  $\equiv FALSE$ . Это, очевидно, неверно.

Выполняем второй шаг алгоритма. Необходимо проверить условие  $M(F^*) \subseteq (M(F_1) \cap M(F_2))$ , что, как опять же показано в 4, равносильно  $F_1 \& F_2 \vee \neg F^* \equiv TRUE$ . Подставляя данные, получаем: Факультет = "Математический" & Дисциплина = "Физика"  $\vee \neg(\text{Факультет} = \text{"Математический"} \& \text{Дисциплина} = \text{"Физика"}) \equiv TRUE$ . Данное выражение эквивалентно формуле  $A \vee \neg A$  и является тождественно истинным при любом значении  $A$ . Условие выполнено, алгоритм завершен.

На рис. 1 изображены области истинности формул  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F^*$  спроецированные на плоскость (Факультет, Дисциплина). Из рисунка видно, что область истинности  $M(F^*)$ , представляющая из себя точку в данном пространстве, включается в пересечение областей истинности  $M(F_1)$ ,  $M(F_2)$ .

### Пример 2.

Попробуем немного усложнить задачу. Изменим логическую формулу запроса 2:  $F_2 = (\text{Дисциплина} = \text{"Физика"} \& \text{Оценка} \geq 3)$ . Теперь запрос имеет смысл «список студентов, сдавших физику».

Условие первого пункта слегка меняется, но результат, очевидно, остается прежним – области истинности по-прежнему пересекаются. Факультет = "Математический" & Дисциплина = "Физика" & (Факультет = "Математический"  $\vee$  Дисциплина = "Физика" & Оценка  $\geq 3$ )  $\equiv FALSE$ . Применим свойство дистрибутивности: Факультет = "Математический" & Дисциплина = "Физика"  $\vee$  Факультет = "Математический" & Дисциплина = "Физика" & Оценка  $\geq 3 \equiv FALSE$ . Это неверно, так как дизъюнкция 2 выражений может быть тождественно ложной лишь в случае, если оба выражения тождественно ложны.

На втором шаге встречаем различия с прошлым примером. Новые условия формулы  $F_2$  сужают область истинности, и включения не наблюдается. Факультет = "Математический" & Дисциплина = "Физика" & Оценка  $\geq 3 \vee (\text{Факультет} \neq \text{"Математический"} \vee \text{Дисциплина} \neq \text{"Физика"}) \equiv TRUE$ . Как уже было сказано в прошлом примере, такое выражение может быть тождественно истинным лишь в случае противоположных выражений. Теперь это условие нарушено. Условие не выполнено, переходим на шаг 3 алгоритма.

Третий шаг. Для того, чтобы было возможно воспользоваться кэшем, необходимо сделать запрос на недостающие данные. По сути эти данные удовлетворяют требованию «кортежи, которые есть в целевом запросе, но отсутствующие в кэше». Формализация этого требования выглядит, как это было описано в схеме алгоритма, следующим образом:  $P_3 = \pi_{X^*}(\sigma_{F_3}(R_1 \bowtie R_2 \bowtie R_3))$ ,  $F_3 = F^* \& \neg(F_1 \& F_2)$ . Подставляя данные, получаем:  $F_3 = \text{Факультет} = \text{”Математический”} \& \text{Дисциплина} = \text{”Физика”} \& \neg(\text{Факультет} = \text{”Математический”} \& (\text{Дисциплина} = \text{”Физика”} \& \text{Оценка} \geq 3)) \sim \text{Факультет} = \text{”Математический”} \& \text{Дисциплина} = \text{”Физика”} \& (\text{Факультет} \neq \text{”Математический”} \vee \text{Дисциплина} \neq \text{”Физика”} \& \text{Оценка} = 2) \sim \text{Факультет} = \text{”Математический”} \& \text{Дисциплина} = \text{”Физика”} \& \text{Оценка} = 2$ . Таким образом, для того, чтобы воспользоваться кэшем, необходимо получить данные о студентах математического факультета, не сдавших физику. В других данных необходимости нет, они уже содержатся в хранилище.

На рис. 2 теперь показана проекция областей истинности на трехмерное пространство (Факультет, Дисциплина, Оценка). Наглядно видна область пересечения областей истинности формул  $F_1$  и  $F_2$ . Она не включает точку (Мат., Физика, 2), соответствующую данным, которые мы и получим, выполнив шаг 3 алгоритма.

## Заключение

В данной статье рассмотрена проблема разработки методов аналитического сравнения логических ограничений пользовательских запросов к реляционной базе данных. Предложен подход, основанный на сравнении областей истинности запросов с использованием аппарата реляционного исчисления. В результате разработан алгоритм использования кэша, позволяющий получать запрашиваемые данные, не прибегая к запросам на сервер или совершать запросы лишь на часть требуемых данных, экономя сетевой трафик и время на выполнение запроса. Данные результаты решают 2 важных задачи использования технологии, описанной в статье [12]:

1. Аналитическая проверка возможности использования кэша
2. Аналитическое определение недостающих данных

Данные пункты отражены в схеме алгоритма в шагах 1 и 3 соответственно.

Проблема актуализации данных не затрагивается в этой работе. Однако она может быть решена путем учета запросов на сервере и обновлении данных при помощи триггеров.

В дальнейшем планируется применить методы и алгоритмы, изложенные в данной статье для разработки ПО, являющегося прослойкой над СУБД и управляющего использованием кэша, снижая тем самым количество передаваемых данных и общее время работы системы.

Предложенная технология будет использована при динамическом построении многомерных данных. Промежуточные представления имеют ту же структуру данных, что и таблицы соединений, используемые для построения гиперкубов. Сохраненные представления данных могут храниться на компьютере пользователя-аналитика и существенно сократить время на формирование данных, необходимых для принятия решений.

*Работа выполнена по проекту ОМН РАН № П.2.П/1.1-7.*



---

**Литература**

1. Afrati F.N., Li C., Mitra P. Rewriting queries using views in the presence of arithmetic comparisons // *Theor. Comput. Sci.* 2006. Vol. 368, No. 1-2. P. 88–123. DOI: 10.1016/j.tcs.2006.08.020.
2. Baralis E., Paraboschi S., Teniente E. Materialized Views Selection in a Multidimensional Database // *Proceedings of the 23rd International Conference on Very Large Data Bases. VLDB '97.* San Francisco, CA, USA : Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1997. P. 156–165.
3. Church A. *Introduction to Mathematical Logic.* [S. l.] : Princeton University Press, 1996. 378 p.
4. Date C.J. *SQL and Relational Theory.* [S. l.] : O'Reilly, 2009. 448 p.
5. Denny M., Franklin M.J. Predicate Result Range Caching for Continuous Queries // *Proceedings of the 2005 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. SIGMOD '05.* New York, NY, USA : ACM, 2005. P. 646–657. DOI: 10.1145/1066157.1066231.
6. Gupta H. Selection of Views to Materialize in a Data Warehouse // *Proceedings of the 6th International Conference on Database Theory. ICDT '97.* London, UK, UK : Springer-Verlag, 1997. P. 98–112.
7. Gupta H., Mumick I.S. Selection of Views to Materialize Under a Maintenance Cost Constraint // *Proceedings of the 7th International Conference on Database Theory. ICDT '99.* London, UK, UK : Springer-Verlag, 1999. P. 453–470.
8. Hilbert D., Ackermann W. *Principles of Mathematical Logic.* [S. l.] : AMS Chelsea Publishing, 1950. 172 p.
9. Kalnis P., Papadias D. Proxy-Server Architectures for OLAP // *SIGMOD Conference / Ed. by Sharad Mehrotra, Timos K. Sellis.* [S. l.] : ACM, 2001. P. 367–378. DOI: 10.1145/375663.375712.
10. Keller A.M., Basu J. A Predicate-based Caching Scheme for Client-Server Database Architectures // *VLDB J.* 1996. Vol. 5, No. 1. P. 35–47.
11. Mendelson E. *Introduction to Mathematical Logic.* 5 edition. [S. l.] : CRC Press, 2009. 469 p.
12. Mosin S., Zykin S. Truth space method for caching database queries // *Modeling and Analysis of Information Systems.* 2015. Vol. 22, No. 2. P. 248–258.
13. Olston C., Jiang J., Widom J. Adaptive Filters for Continuous Queries over Distributed Data Streams // *Proceedings of the 2003 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data. SIGMOD '03.* New York, NY, USA : ACM, 2003. P. 563–574. DOI: 10.1145/872757.872825.
14. Park C., Kim M., Lee Y. Usability-based caching of query results in OLAP systems // *Journal of Systems and Software.* 2003. Vol. 68, No. 2. P. 103–119. DOI: 10.1016/S0164-1212(02)00142-5.
15. Scheuermann P., Shim J., Vingralek R. WATCHMAN: A Data Warehouse Intelligent Cache Manager // *Proceedings of the 22th International Conference on Very Large Data Bases. VLDB '96.* San Francisco, CA, USA : Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1996. P. 51–62.

16. Shim J., Scheuermann P., Vingralek R. Dynamic Caching of Query Results for Decision Support Systems. // Proceedings of 11th International Conference on Scientific and Statistical Database Management (SSDBM). [S. l. : s. n.], 1999. P. 254–263.

Мосин Сергей Владимирович, аспирант, инженер-исследователь лаборатории методов преобразования и представления информации, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН (Омск, Российская Федерация), svmosin@gmail.com

*Поступила в редакцию 25 августа 2015 г.*

---

*Bulletin of the South Ural State University  
Series “Computational Mathematics and Software Engineering”  
2016, vol. 5, no. 1, pp. 85–99*

---

DOI: 10.14529/cmse160108

## TRUTH SPACE COMPARISON OF RELATIONAL DATABASE QUERIES

*S.V. Mosin*, Sobolev’s Institute of Mathematics, Omsk, Russian Federation

We propose new methods and algorithms of analytical truth space comparison for Relational Database queries. Such a comparison aims to define the possibility of partial or full cache usage. The cache is stored on user’s computer and Database server is supposed to be remote. In case user query’s result is contained in cache we can simply take the data from there avoiding any server requests. The suggested method may also be used for defining data missing in cache and performing query to only receive that data. Analytical computations are also used to achieve this and it differs our approach from existing ones. Query comparison algorithms are based on the Predicate Logic theory. Formulas are presented by logical constraints in SQL and predicates correspond to SQL operations.

*Keywords: relational database, cache, truth space.*

### FOR CITATION

Mosin S.V. Truth Space Comparison of Relational Database Queries. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 1. pp. 85–99. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160108.

### References

1. Afrati F.N., Li C., Mitra P. Rewriting queries using views in the presence of arithmetic comparisons. Theor. Comput. Sci. 2006. vol. 368, no. 1-2. pp. 88–123. DOI: 10.1016/j.tcs.2006.08.020.
2. Baralis E., Paraboschi S., Teniente E. Materialized Views Selection in a Multidimensional Database. Proceedings of the 23rd International Conference on Very Large Data Bases. (VLDB ’97). San Francisco, CA, USA : Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1997. pp. 156–165.
3. Church A. Introduction to Mathematical Logic. [S. l.] : Princeton University Press, 1996. 378 p.
4. Date C.J. SQL and Relational Theory. [S. l.] : O’Reilly, 2009. 448 p.

5. Denny M., Franklin M.J. Predicate Result Range Caching for Continuous Queries. Proceedings of the 2005 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data (SIGMOD '05). New York, NY, USA : ACM, 2005. pp. 646–657. DOI: 10.1145/1066157.1066231.
6. Gupta H., Mumick I. Selection of Views to Materialize in a Data Warehouse. Proceedings of the 6th International Conference on Database Theory (ICDT '97). London, UK, UK : Springer-Verlag, 1997. pp. 98–112.
7. Gupta H. Selection of Views to Materialize Under a Maintenance Cost Constraint. Proceedings of the 7th International Conference on Database Theory (ICDT '99). London, UK, UK : Springer-Verlag, 1999. pp. 453–470.
8. Hilbert D., Ackermann W. Principles of Mathematical Logic. [S. l.] : AMS Chelsea Publishing, 1950. 172 p.
9. Kalnis P., Papadias D. Proxy-Server Architectures for OLAP. Proceedings of the SIGMOD Conference / Ed. by Sharad Mehrotra, Timos K. Sellis. [S. l.] : ACM, 2001. pp. 367–378. DOI: 10.1145/375663.375712.
10. Keller A.M., Basu J. A Predicate-based Caching Scheme for Client-Server Database Architectures. The International Journal on Very Large Data Bases. 1996. vol. 5, no. 1. pp. 35–47.
11. Mendelson E. Introduction to Mathematical Logic. 5 edition. [S. l.] : CRC Press, 2009. 469 p.
12. Mosin S., Zykin S. Truth space method for caching database queries. Modeling and Analysis of Information Systems. 2015. vol. 22, no. 2. pp. 248–258.
13. Olston C., Jiang J., Widom J. Adaptive Filters for Continuous Queries over Distributed Data Streams. Proceedings of the 2003 ACM SIGMOD International Conference on Management of Data (SIGMOD '03). New York, NY, USA : ACM, 2003. pp. 563–574. DOI: 10.1145/872757.872825.
14. Park C., Kim M., Lee Y. Usability-based caching of query results in OLAP systems. Journal of Systems and Software. 2003. vol. 68, no. 2. pp. 103–119. DOI: 10.1016/S0164-1212(02)00142-5.
15. Scheuermann P., Shim J., Vingralek R. WATCHMAN: A Data Warehouse Intelligent Cache Manager. Proceedings of the 22th International Conference on Very Large Data Bases (VLDB '96). San Francisco, CA, USA : Morgan Kaufmann Publishers Inc., 1996. pp. 51–62.
16. Shim J., Scheuermann P., Vingralek R. Dynamic Caching of Query Results for Decision Support Systems. Proceedings of 11th International Conference on Scientific and Statistical Database Management (SSDBM). [S. l. : s. n.], 1999. pp. 254–263.

*Received August 25, 2015.*

## СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Научный журнал «Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика» основан в 2012 году.

Свидетельство о регистрации ПИ ФС77-57377 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ; индексируется в библиографической базе данных РИНЦ. Журнал размещен в открытом доступе на Всероссийском математическом портале MathNet. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» (№421).

Подписной индекс научного журнала «Вестник ЮУрГУ», серия «Вычислительная математика и информатика»: 10244, каталог «Пресса России». Периодичность выхода — 4 выпуска в год (февраль, май, август и ноябрь).

## ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Правила подготовки рукописей и пример оформления статей можно загрузить с сайта серии <http://vestnikvmi.susu.ru>. Статьи, оформленные без соблюдения правил, к рассмотрению не принимаются.
2. Адрес редакции научного журнала «Вестник ЮУрГУ», серия «Вычислительная математика и информатика»:  
Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, ЮУрГУ, факультет ВМИ,  
кафедра ИТ, ответственному секретарю Цымблеру М.Л.
3. Адрес электронной почты редакции: [vestnikvmi@susu.ru](mailto:vestnikvmi@susu.ru)
4. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается, и гонорары авторам не выплачиваются.