



ВЕСТНИК

ЮЖНО-УРАЛЬСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА

2016
Т. 5, № 2

ISSN 2305-9052

СЕРИЯ

«ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА»

Решением ВАК включен в Перечень научных изданий,
в которых должны быть опубликованы результаты диссертаций
на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук

Учредитель — Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Южно-Уральский государственный
университет» (национальный исследовательский университет)

Тематика журнала:

- Вычислительная математика и численные методы
- Математическое программирование
- Распознавание образов
- Вычислительные методы линейной алгебры
- Решение обратных и некорректно поставленных задач
- Доказательные вычисления
- Численное решение дифференциальных и интегральных уравнений
- Исследование операций
- Теория игр
- Теория аппроксимации
- Информатика
- Математическое и программное обеспечение высокопроизводительных вычислительных систем
- Системное программирование
- Перспективные многопроцессорные архитектуры
- Облачные вычисления
- Технология программирования
- Машинная графика
- Интернет-технологии
- Системы электронного обучения
- Технологии обработки баз данных и знаний
- Интеллектуальный анализ данных

Редакционная коллегия

С.М. Абдуллаев, д.г.н., проф.
А.В. Панюков, д.ф.-м.н., проф.
Л.Б. Соколинский, д.ф.-м.н., проф., *отв. редактор*
И.И. Стародубов, *техн. секретарь*
В.П. Танана, д.ф.-м.н., проф., *зам. отв. редактора*
М.Л. Цымблер, к.ф.-м.н., доц., *отв. секретарь*

Редакционный совет

А. Андряк, PhD, профессор (Германия)
В.И. Вердышев, д.ф.-м.н., акад. РАН, *председатель*

В.В. Воеводин, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН
Дж. Донгарра, PhD, профессор (США)
С.В. Зыкин, д.т.н., профессор
Д. Маллманн, PhD, профессор (Германия)
А.Н. Томилин, д.ф.-м.н., профессор
В.Е. Третьяков, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН
В.И. Ухоботов, д.ф.-м.н., профессор
В.Н. Ушаков, д.ф.-м.н., чл.-кор. РАН
М.Ю. Хачай, д.ф.-м.н., профессор
П. Шумяцки, PhD, профессор (Бразилия)
Е. Ямазаки, PhD, профессор (Бразилия)



BULLETIN

OF THE SOUTH URAL STATE UNIVERSITY **2016**
vol. 5, no. 2

SERIES

**“COMPUTATIONAL
MATHEMATICS AND SOFTWARE
ENGINEERING”**

ISSN 2305-9052

**Vestnik Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo Universiteta.
Seriya “Vychislitel'naya Matematika i Informatika”**

South Ural State University

The scope of the journal:

- Numerical analysis and methods
- Mathematical optimization
- Pattern recognition
- Numerical methods of linear algebra
- Reverse and ill-posed problems solution
- Computer-assisted proofs
- Numerical solutions of differential and integral equations
- Operations research
- Game theory
- Approximation theory
- Computer science
- High performance computing
- System software
- Advanced multiprocessor architectures
- Cloud computing
- Software engineering
- Computer graphics
- Internet technologies
- E-learning
- Database processing
- Data mining

Editorial Board

S.M. Abdullaev, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)
A.V. Panyukov, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)
L.B. Sokolinsky, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)
I.I. Starodubov, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)
V.P. Tanana, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)
M.L. Zymbler, South Ural State University (Chelyabinsk, Russia)

Editorial Council

A. Andrzejak, Heidelberg University (Germany)
V.I. Berdyshev, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS (Yekaterinburg, Russia)
J. Dongarra, University of Tennessee (USA)
M.Yu. Khachay, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS (Yekaterinburg, Russia)
D. Mallmann, Julich Supercomputing Centre (Germany)
P. Shumyatsky, University of Brasilia (Brazil)
A.N. Tomilin, Institute for System Programming of the RAS (Moscow, Russia)
V.E. Tretyakov, Ural Federal University (Yekaterinburg, Russia)
V.I. Ukhobotov, Chelyabinsk State University (Chelyabinsk, Russia)
V.N. Ushakov, Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the RAS (Yekaterinburg, Russia)
V.V. Voevodin, Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia)
Y. Yamazaki, Federal University of Pelotas (Brazil)
S.V. Zykin, Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the RAS (Omsk, Russia)

Содержание

Вычислительная математика

ЗАДАЧА АГРЕГИРОВАНИЯ ПРИ ВЫДЕЛЕНИИ ГРАНИЦ ОБЪЕКТОВ НА ИЗОБРАЖЕНИИ А.В. Мартьянова, В.Г. Лабунец	5
ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СЛЕДЯЩЕГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И.М. Соколинская, Л.Б. Соколинский	15
ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РАЗРЕЖЕННОГО QR РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВЕРХНИХ КВАЗИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ СО СТРУКТУРОЙ РАЗРЕЖЕННОСТИ ТИПА ВЛОЖЕННЫХ СЕЧЕНИЙ С.А. Харченко, А.А. Ющенко	30
ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ Н.М. Япарова	43

Дискретная математика и математическая кибернетика

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОАЛИЦИОННОЙ ИГРЫ В ПРОГРАММНЫХ СТРАТЕГИЯХ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ Е.Д. Насонова	59
---	----

Информатика, вычислительная техника и управление

TOWARDS A QUANTITATIVE MODEL OF CLOUD COMPUTING RISKS AND BENEFITS Y.A. Zelenkov	68
ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РЕЗЕРВЫ «СПЛЮЩЕННЫХ» СИСТЕМНЫХ СЕТЕЙ М.Ф. Каравай, В.С. Подлазов	84

Суперкомпьютерное моделирование

РАЗРАБОТКА КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЙЛОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В БРОНЕЗАЩИТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ Н.Ю. Долганина, М.О. Кибель	95
---	----

Contents

Computational Mathematics

PROBLEM OF AGGREGATION FOR EDGE DETECTION OF OBJECTS ON IMAGE A.V. Martyanova, V.G. Labunets	5
IMPLEMENTATION OF PARALLEL PURSUIT ALGORITHM FOR SOLVING UNSTABLE LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS I.M. Sokolinskaya, L.B. Sokolinsky	15
PARALLEL IMPLEMENTATION OF THE SPARSE QR DECOMPOSITION FOR RECTANGULAR UPPER QUASI TRIANGULAR MATRIX WITH ND-TYPE SPARSITY S.A. Kharchenko, A.A. Yushchenko	30
NUMERICAL METHOD FOR SOLVING AN INVERSE PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN INITIAL CONDITIONS N.M. Yaparova	43

Discrete Mathematics and Mathematical Cybernetics

SOLUTION OF THE COALITION GAME IN THE PROGRAM STRATEGY UNDER UNCERTAINTY E.D. Nasonova	59
--	----

Computer Science, Engineering and Control

TOWARDS A QUANTITATIVE MODEL OF CLOUD COMPUTING RISKS AND BENEFITS Y.A. Zelenkov	68
TOPOLOGICAL RESERVES OF FLATTENED NETWORKS M.F. Karavay, V.S. Podlazov	84

Supercomputer Simulation

THE DEVELOPMENT OF COMPUTER MODELS OF FELT MATERIALS USED IN ARMOR N.Y. Dolganina, M.O. Kibel	95
--	----

ЗАДАЧА АГРЕГИРОВАНИЯ ПРИ ВЫДЕЛЕНИИ ГРАНИЦ ОБЪЕКТОВ НА ИЗОБРАЖЕНИИ

А.В. Мартьянова, В.Г. Лабунец

В данной статье детально рассматриваются градиентные методы выделения границ на цифровых изображениях для поиска объектов: Робертса, Превитта, Собеля и Щарра. Для их усовершенствования применяются агрегационные операторы. В результате выполнения работы были разработаны алгоритмы дифференцирования изображений, алгоритмы выбора агрегационных операторов для поиска границ объектов, алгоритмы статистической оценки продифференцированных изображений. Результаты проведенных экспериментов позволили установить достоинства и недостатки применения градиентных методов в обработке цифровых изображений.

Ключевые слова: дифференцирование, выделение границ, агрегирование, агрегационные операторы, средние, статистическая оценка.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Мартьянова А.В., Лабунец В.Г. Задача агрегирования при выделении границ объектов на изображении // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 2. С. 5–14. DOI: 10.14529/cmse160201.

Введение

Важнейшей целью цифровой обработки изображений является распознавание присутствующих на них объектов [1, 2]. Возможность различения заложена в высокой информативности изображения, но зачастую обрабатываемые картинки содержат много избыточных и малоинформативных сведений, занимающих большие объемы памяти, и требующих выполнения большого количества вычислений при попытке использовать их для распознавания. Поэтому широко применяются методы сокращения избыточности, опирающиеся на специфические особенности зрительного восприятия изображений. Считается, что субъективное восприятие наблюдаемой сцены происходит через ее представление в виде отдельных однородных областей и выделение контурных линий. Контурные, или граничные, линии разделяют на изображении участки с различными свойствами. Препарат, образующийся в результате выделения контурных линий, может самостоятельно эффективно использоваться для распознавания, поскольку содержащаяся в нем информация с точки зрения зрительного восприятия вполне достаточна для решения многих задач такого типа.

В данной статье раздел 1 посвящен стандартному алгоритму дифференцирования изображения. Далее, в разделе 2, речь идет об агрегационных операторах, которые позволяют усовершенствовать этот алгоритм. В разделе 3 к тестовому изображению были применены операторы дифференцирования Робертса, Собеля, Превитта и Щарра с использованием агрегационных операторов. Для оценки полученных результатов была введена статистическая оценка, описанная в разделе 4. Полученные результаты были оценены визуальным и статистическим способами в выводах, приведенных в разделе 5. О дальнейших исследованиях говорится в заключении.

1. Градиентные методы выделения границ

Рассматриваемые градиентные методы основаны на выделении краевых точек, поэтому они малочувствительны к шумам и контрастности изображения. Они основываются на свойстве сигнала яркости — разрывности. Эффективным способом поиска разрывов является обработка изображения с помощью скользящей маски — это пространственная фильтрация [1].

В ходе данной фильтрации маска фильтра перемещается от пикселя к пикселю. В каждой точке (x, y) отклик фильтра вычисляется с использованием предварительно заданных связей. В случае линейной пространственной фильтрации маской размера 3×3 отклик R линейной фильтрации в точке (x, y) изображения составит:

$$R = w(-1, -1)f(x - 1, y - 1) + w(-1, 0)f(x - 1, y) + \dots + w(0, 0)f(x, y) + \dots + w(1, 0)f(x + 1, y) + w(1, 1)f(x + 1, y + 1). \quad (1)$$

Для обнаружения перепадов яркости используются дискретные аналоги производных первого и второго порядков.

Первая и вторая производная одномерной функции $f(x)$ определяются так, как представлено в формулах (2) и (3).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f(x + 1) - f(x), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f(x + 1) + f(x - 1) - 2f(x). \quad (3)$$

Градиент изображения $f(x, y)$ в точке (x, y) — это вектор:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} G_x \\ G_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Рассмотренные ниже маски применяются для получения составляющих градиента G_x и G_y :

$$f = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}. \quad (5)$$

Для решения вопроса инвариантности в отношении поворота используются диагональные составляющие градиента G_{xy} и G_{yx} , предназначенные для обнаружения разрывов в диагональных направлениях.

В качестве масок для определения составляющих градиента используются анизотропные фильтры, т.е. фильтры, определяющие контур только в определенных направлениях: были выбраны операторы дифференцирования Робертса (6), Превитта (7), Собеля (8) и Щарра (9).

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, G_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, G_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, G_{yx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_y = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, G_{xy} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, G_{yx} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

$$G_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, G_y = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, G_{xy} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, G_{yx} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$$G_x = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 3 \\ -10 & 0 & 10 \\ -3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad G_y = \begin{bmatrix} -3 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 3 \end{bmatrix}, \quad G_{xy} = \begin{bmatrix} -10 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}, \quad G_{yx} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -10 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

После определения четырех составляющих градиента G_x , G_y , G_{xy} и G_{yx} возникает проблема его определения. Кроме того, стоит отметить, что обрабатываемые изображения содержат 3, как у цветного RGB-изображения, и более каналов, как у гиперспектральных изображений, т.е. получается минимум 12 составляющих градиента: G_{xR} , G_{xG} , G_{xB} , G_{yR} , G_{yG} , G_{yB} , G_{xyR} , G_{xyG} , G_{xyB} , G_{yxR} , G_{yxG} , G_{yxB} . Возникает вопрос: применять формулу (5) или же найти другой способ определения градиента?

2. Агрегационные операторы

Определение 1. Объединение частей математических выражений, в данном случае составляющих градиента, в результате которого вся конструкция выступает в качестве единого аргумента. т.е. градиента, называется *агрегацией*.

В настоящее время развиваются различные методы агрегирования данных: от поиска средних арифметических до комбинирования огромных объемов информации.

Математически проблема агрегации состоит в соединении n -рядов объектов, принадлежащих одному набору, в отдельные объекты этого же набора. Информационными методами объединения данных являются агрегационные операторы.

Определение 2. *Агрегационный оператор* — это функция, которая назначает действительное число y n -ряду (x_1, x_2, \dots, x_n) действительных чисел [5]:

$$y = \text{Aggreg}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (10)$$

Несколько авторов предложили ряд фундаментальных условий, определяющих агрегационные операторы, многие из которых несовместимы, но существуют условия, которые являются действующими для всех предложенных определений агрегационного оператора и называются базовыми, все остальные свойства дополняют эти фундаментальные свойства

Таким образом, агрегационный оператор должен удовлетворять следующим условиям:

- а) условию идентичности $\text{Aggreg}(x) = x$;
- б) граничным условиям $\text{Aggreg}(0, 0, \dots, 0) = 0$ и $\text{Aggreg}(255, 255, \dots, 255) = 255$;
- в) условию монотонности $\text{Aggreg}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \text{Aggreg}(y_1, y_2, \dots, y_n)$, если $(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Самыми распространенными агрегационными операторами являются средние. Поэтому в данной работе были рассмотрены такие, как взвешенное среднее, степенное среднее, максимум и медиана.

Самый простой и самый распространенный способ агрегации состоит в том, чтобы использовать простое *среднее арифметическое*. Математически оно описывается так:

$$\text{Aggreg}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{Mean}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (11)$$

Этот оператор интересен тем, что он определяет объединенное значение, которое меньше самого большого аргумента и больше наименьшего. В результате получается

агрегат — «среднее значение». Среднее значение используется часто, т.к. оно удовлетворяет условию монотонности, непрерывности и граничным условиям.

Существует также классическое уточнение — *взвешенное среднее*, которое позволяет придавать веса аргументам. Математически этот агрегационный оператор может быть записан:

$$Aggreg_{w_1, w_2, \dots, w_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = Mean_{w_1, w_2, \dots, w_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n w_i} \sum_{i=1}^n w_i x_i. \quad (12)$$

Степенные средние — частный случай квазисредних арифметических, которые было изучено подробно Колмогоровым [7] и Ацелем в [4, 6]. Математически этот агрегационный оператор может быть записан:

$$Aggreg_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = Mean_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[p]{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^p}. \quad (13)$$

Минимум и максимум — основные агрегационные операторы. Минимум дает наименьшее значение набора, в то время как максимум дает самое большое. Они не дают «среднего значения», но, в контексте принятия решения по поиску границ оператор минимум определяет минимальный перепад яркости, в это время максимум определяет наибольший. В связи с этим в качестве исследуемого выбран только оператор максимум, выделяющий наибольшие перепады. Как агрегационные операторы, минимум и максимум удовлетворяют базовым условиям (условию идентичности и монотонности, а также граничным условиям). Математически агрегационный оператор максимум описывается следующим образом:

$$Aggreg_{+\infty}(x_1, x_2, \dots, x_n) = Mean_{+\infty}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (14)$$

Другой оператор, который преследует идею «среднего значения», — это *медиана*. Ее значение определяется срединным элементом из упорядоченного ряда уровней яркости от 0 до 255. Математически этот агрегационный оператор может быть записан:

$$Aggreg_{Med}(x_1, x_2, \dots, x_n) = Med(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (15)$$

3. Выделение границ с применением агрегационных операторов

Для тестового изображения (рис. 1) были применены операторы дифференцирования (Робертса, Превитта, Собеля и Щарра), при этом градиент был определен как стандартным образом, так и с помощью описанных выше агрегационных операторов.



Рис. 1. Тестовое изображение

В результате были получены изображения, представленные в табл. 1.

4. Статистический анализ продифференцированных изображений

В задаче обработки изображений последние зачастую интерпретируются как случайные процессы двух переменных, т.е. как случайные поля [3]. Следствием этого является возможность применения статистических методов обработки информации для оценки качества изображений.

Для каждого из полученных изображений были определены математическое ожидание, дисперсия и избыточность (относительная энтропия).

Математическое ожидание или начальный момент изображения A_{ij} размером $N_i \times N_j$ элементов представляет собой средний уровень яркости и рассчитывается следующим образом:

$$M = \frac{1}{N_i \cdot N_j} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} A_{ij}. \quad (16)$$

Дисперсия изображения — это мера отклонения от средней яркости, мера ее рассеяния, которая вычисляется следующим образом:

$$u_2 = \frac{1}{N_i \cdot N_j} \sum_{i=1}^{N_i} \sum_{j=1}^{N_j} A_{ij}^2 - M^2, \quad (17)$$

$\sigma = \sqrt{u_2}$ — центральный момент или среднеквадратическое отклонение (СКО).

Важность расчета относительной (перекрестной) энтропии или избыточности обусловлена тем, что ее минимизация используется для оценки вероятностей редких событий, т.е. контуров на изображении. Для ее расчета используется уровень энтропии:

$$I = - \sum_i p_i \log_2 p_i, \quad (18)$$

где $p_i = P\{X = x_i\}$ — вероятность, с которой случайная величина X принимает значение x_i .

Энтропия при нормальном законе распределения:

$$I_0 = \log_2(h_{max} - h_{min} + 1), \quad (19)$$

где h_{max} и h_{min} — максимальное и минимальное значения яркости изображения.

Относительная энтропия показывает степень близости закона распределения к равномерному:

$$D = 1 - I/I_0. \quad (20)$$

В результате расчетов по формулам (16) – (20) были получены значения, представленные в табл. 2.

Результаты дифференцирования

Способ определения градиента	Оператор дифференцирования			
	Робертса	Превитта	Собеля	Щарра
«Стандартный алгоритм», по двум составляющим				
По (12) составляющим с помощью агрегационного оператора <i>Mean</i>				
По (12) составляющим с помощью агрегационного оператора $Mean_p(p=3)$				
По (12) составляющим с помощью агрегационного оператора <i>max</i>				
По (12) составляющим с помощью агрегационного оператора <i>Med</i>				

Выводы

Применение агрегационных операторов в задаче выделения границ позволяет в полной мере оценить работу градиентных методов. Применение максимума при поиске градиента позволяет маске Робертса выделить максимальное количество границ, а агрегат медиана позволяет высокоядерной маске Щарра выделить наименьшее их количество. Операторы степенного среднего и взвешенного среднего применительно к маскам Превитта и Собея позволяют наилучшим образом определить границы лица. Явно выражены глаза, нос и рот, чего нельзя сказать о двух предыдущих.

В итоге можно заключить, что оператор Робертса при визуальной оценке выделяет сравнительно небольшое количество границ, что обуславливается отсутствием четко выраженного центрального элемента маски. Применение агрегационных операторов не позволило данному оператору выделить визуально достаточное число границ. При статистической оценке данный оператор имеет очень низкий уровень средней яркости и невысокое СКО, таким образом, изображение кажется затененным, практически черным, на котором видно небольшое количество границ, а наличие высокой избыточности говорит о низкой вероятности редких событий, т.е. контуров. Операторы Превитта и Собея визуально практически не отличаются, выделяют достаточное количество границ, прослеживается замкнутый контур. Для них целесообразно применение агрегата максимум. По статистическим оценкам видно, что при среднем уровне математического ожидания и СКО выделяется достаточно большое количество границ, а низкая избыточность, в особенности у оператора Собея, говорит о большом количестве контурных линий. Оператор Щарра ввиду сравнительно больших коэффициентов ядра выделяет излишнее количество границ, которые сливаются между собой. Высокая избыточность здесь говорит об излишнем количестве выделенных границ. В тоже время оператор Щарра может быть использован в качестве эффективного метода выделения границ с применением агрегационного оператора медиана, который снижает толщину границ, не теряя последних. По статистическим характеристикам можно судить, что при высоком математическом ожидании и СКО изображение содержит очень большое количество границ, изображение кажется засвеченным.

Таким образом, высокий уровень избыточности продифференцированного изображения говорит либо о недостаточном, либо об избыточном количестве границ. Уровни же математического ожидания и СКО для оптимального выделения границ тестового изображения должны быть средними: 40–80 для математического ожидания и 45–80 для дисперсии.

Агрегационные операторы могут применяться при решении довольно широкого спектра задач, т.к. они позволяют уменьшить количество информации и при этом улучшить ее качество. В вопросе поиска градиента при обработке цветных и гиперспектральных изображений их применение целесообразно ввиду их эффективности и алгоритмической простоты, что было подтверждено как визуально, так и статистически.

Статистические результаты

Способ определения градиента	Оператор дифференцирования			
	Робертса	Превитта	Собеля	Щарра
«Стандартный алгоритм», по двум составляющим	$M = 17$ $\sigma = 37,2$ $D = 0,40$	$M = 50$ $\sigma = 62,8$ $D = 0,17$	$M = 64$ $\sigma = 72,8$ $D = 0,15$	$M = 148$ $\sigma = 88,0$ $D = 0,26$
По 12 составляющим с помощью агрегационного оператора взвешенное среднее	$M = 12$ $\sigma = 34,8$ $D = 0,74$	$M = 32$ $\sigma = 48,5$ $D = 0,23$	$M = 45$ $\sigma = 58,9$ $D = 0,18$	$M = 122$ $\sigma = 90,1$ $D = 0,20$
По 12 составляющим с помощью агрегационного оператора степенное среднее (степень 3)	$M = 14$ $\sigma = 35,5$ $D = 0,71$	$M = 41$ $\sigma = 55,4$ $D = 0,20$	$M = 55$ $\sigma = 66,6$ $D = 0,15$	$M = 141$ $\sigma = 89,3$ $D = 0,25$
По 12 составляющим с помощью агрегационного оператора максимум	$M = 21$ $\sigma = 38,3$ $D = 0,33$	$M = 62$ $\sigma = 69,6$ $D = 0,14$	$M = 79$ $\sigma = 79,1$ $D = 0,13$	$M = 171$ $\sigma = 82,0$ $D = 0,33$
По 12 составляющим с помощью агрегационного оператора медиана	$M = 9$ $\sigma = 34,4$ $D = 0,93$	$M = 23$ $\sigma = 44,0$ $D = 0,50$	$M = 31$ $\sigma = 51,8$ $D = 0,32$	$M = 87$ $\sigma = 89,8$ $D = 0,17$

Заключение

В данной статье были исследованы агрегационные операторы применительно к задаче дифференцирования цветных и гиперспектральных изображений. Поиск градиента для таких изображений затруднителен ввиду большого числа составляющих. Для каждого из операторов дифференцирования были применены 4 метода агрегации. В итоге были получены результаты визуально и статистически эффективнее нежели с помощью стандартных алгоритмов.

В дальнейшем планируется рассмотреть другие агрегационные операторы (степенное среднее, средние по Колмогорову и Лемеру и т.д.) для дифференцирования цветных и гиперспектральных изображений.

Литература

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.
2. Грузман И.С., Киричук В.С. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Новосибирск: НГТУ, 2002. 352 с.
3. Яншин В.В., Калинин Г.А. Обработка изображений на языке Си для IBM PC: Алгоритмы и программы. М.: Мир, 1994. 240 с.
4. Aczel J. Lectures on Functional Equations and Applications. Academic Press, 1966. 510 p.
5. Detyniecki M. Mathematical Aggregation Operators and their Application to Video Querying. Universite Curie, 2000. 188 p.
6. Grabisch M., Nguyen H.T., Walker E.A. Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference. Springer, 1995. 350 p.
7. Kolmogorov A. Sur la notion de moyenne, Atti delle Reale Accademia Nazionale dei Lincei Mem // Cl. Sci. Mat. Natur. Sez. 12. 1930. P. 323–343.

Мартьянова Анна Викторовна, ассистент (аспирант), кафедра теоретических основ радиотехники, Уральский федеральный университет (Екатеринбург, Российская Федерация); инженер-конструктор, АО «Научно-производственное объединение автоматизики имени академика Н.А. Семихатова» (Екатеринбург, Российская Федерация), kurzinaav@gmail.com.

Лабунец Валерий Григорьевич, профессор, кафедра теоретических основ радиотехники, Уральский федеральный университет (Екатеринбург, Российская Федерация), vlabunets05@yahoo.com.

Поступила в редакцию 25 ноября 2015 г.

PROBLEM OF AGGREGATION FOR EDGE DETECTION OF OBJECTS ON IMAGE

A.V. Martyanova, Ural Federal University, Scientific and Production Association of Automatics Named After Academician N.A. Semikhatov, Yekaterinburg, Russian Federation

V.G. Labunets, Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation

In the article, we consider in detail Roberts, Prewitt, Sobel, Sharr methods of digital images edge detection for objects. To improve them used aggregation operators. In the project there developed the algorithms of images difference, the selection algorithms aggregation operators to find the boundaries of objects, the algorithms for statistical evaluation at a differentiated image. The modeling experiment results allow to determine the advantages and disadvantages of the gradient methods in digital image processing.

Keywords: differentiation, edge detection, aggregation, aggregation operators, averages, statistical estimation.

FOR CITATION

Martyanova A.V., Labunets V.G. Problem of Aggregation for Edge Detection of Objects on Image. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2016. vol. 5, no. 2. pp. 5–14. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160201.

References

1. Gonsales R., Vuds R. *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy* [Digital Image Processing]. Moscow, Tekhnosfera, 2005. 1072 p. (in Russian)
2. Gruzman I.S., Kirishuk V.S., et al. *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy v informatsionnykh sistemakh* [Digital Image Processing in Information Systems]. Novosibirsk, NGTU, 2002. 352 p. (in Russian)
3. Yanshin V.V., Kalinin V.V. *Obrabotka izobrazheniy na yazyke Si dlya IBM PC: Algoritmy i programmy* [Image Processing in C Language for the IBM PC: Algorithms and Programs]. Moscow, Mir, 1994. 240 p. (in Russian)
4. Aczel J. *Lectures on Functional Equations and Applications*. Academic Press, 1966. 510 p.
5. Detyniecki M. *Mathematical Aggregation Operators and Their Application to Video Querying*. Universite Curie, 2000. 188 p.
6. Grabisch, M., Nguyen, H.T., Walker E.A. *Fundamentals of Uncertainty Calculi with Applications to Fuzzy Inference*. Kluwer Academics Publishers, 1995. pp. 96–109.
7. Kolmogorov A. Sur la notion de moyenne, *Atti delle Reale Accademia Nazionale dei Lincei Mem. Cl. Sci. Mat. Natur. Sez. 12*. 1930. pp. 323–343.

Received November 25, 2015.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СЛЕДЯЩЕГО АЛГОРИТМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ¹

И.М. Соколинская, Л.Б. Соколинский

В статье описывается параллельный алгоритм решения нестационарных задач линейного программирования большой размерности, ориентированный на кластерные вычислительные системы. В основе алгоритма, получившего название «следающий», лежат фейеровские отображения. Алгоритм отслеживает изменения исходных данных и вносит корректировки в вычислительный процесс. При этом задача разбивается на большое количество подзадач, которые могут решаться независимо без обменов данными. Приводятся диаграммы деятельности UML, описывающие реализацию следающего алгоритма.

Ключевые слова: нестационарная задача линейного программирования, фейеровские отображения, следающий алгоритм, диаграммы деятельности UML, массовый параллелизм, кластерные вычислительные системы.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Соколинская И.М., Соколинский Л.Б. Параллельная реализация следающего алгоритма для решения нестационарных задач линейного программирования // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 2. С. 15–29. DOI: 10.14529/cmse160202.

Введение

Основы современной теории нестационарных процессов математического программирования были заложены в классической монографии [1], где было предложено использовать для решения нестационарных задач линейного программирования итерационные процессы фейеровского типа. Указанный подход обобщает релаксационный метод Моцкина-Агмона [2, 3]. Это направление исследований получило продолжение в дальнейших работах И.И. Еремина, В.В. Васина, Л.Д. Попова, Е.А. Бердниковой, С.В. Пацко и других ученых [4].

Нестационарные задачи линейного программирования большой размерности с быстро меняющимися входными данными достаточно часто встречаются в практике современного экономико-математического моделирования. Одним из примеров таких задач является задача управления портфелем ценных бумаг с использованием методов алгоритмической торговли [5, 6]. В подобных задачах количество переменных и неравенств в системе ограничений может составлять десятки и даже сотни тысяч, а период изменения исходных данных находится в пределах сотых долей секунды. На нестационарность в таких задачах может накладываться плохая формализуемость части ограничений. В работе авторов [7] был описан параллельный алгоритм для решения задач линейного программирования с плохо формализуемыми ограничениями. Суть предложенного подхода заключается в синтезе методов линейного программирования и дискрими-

¹ Статья рекомендована к публикации Программным комитетом Международной научной конференции "Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ) 2016" (<http://agora.guru.ru/pavt>).

нантного анализа. Для выполнения эффективного дискриминантного анализа необходимы два набора образцов M и N , первый из которых удовлетворяет неформализованным ограничениям, а второй – нет. Для получения качественных наборов образцов могут применяться методы интеллектуального анализа [8] данных и анализа временных рядов [9].

Для преодоления проблемы нестационарности входных данных в работах [10, 11] был предложен «следящий» алгоритм решения задачи линейного программирования с использованием фейеровских отображений, ориентированный на кластерные вычислительные системы с многоядерными ускорителями. В данной работе дается полная параллельная реализация следящего алгоритма с использованием диаграммы деятельности UML. Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводится формальная постановка задачи линейного программирования, даются определения фейеровского процесса и операции псевдопроектирования на многогранник. В разделе 2 приводится математическое описание следящей области. В разделе 3 приводятся формулы для построения пересечения многогранника, задаваемого системой ограничений, с произвольной ячейкой следящей области. В разделе 4 дается полное описание параллельной реализации следящего алгоритма с помощью диаграмм деятельности UML. В заключении суммируются полученные результаты и определяются направления дальнейших исследований.

1. Постановка задачи

Пусть задана задача линейного программирования

$$\max \{ \langle c, x \rangle \mid Ax \leq b, x \geq 0 \}. \quad (1)$$

Определим фейеровское отображение $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\varphi(x) = x - \sum_{i=1}^m \alpha_i \lambda_i \frac{\max \{ \langle a_i, x \rangle - b_i, 0 \}}{\|a_i\|^2} \cdot a_i. \quad (2)$$

Пусть M – многогранник, задаваемый ограничениями задачи линейного программирования (1). Такой многогранник всегда является выпуклым. Известно [12], что φ будет однозначным непрерывным M -фейеровским отображением для любой системы положительных коэффициентов $\{ \alpha_i > 0 \}$, $i = 1, \dots, m$, таких, что $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, и коэффициентов релаксации $0 < \lambda_i < 2$. Полагая в формуле (2) $\lambda_i = \lambda$ и $\alpha_i = 1/m$ ($i = 1, \dots, m$), получаем формулу

$$\varphi(x) = x - \frac{\lambda}{m} \sum_{i=1}^m \frac{\max \{ \langle a_i, x \rangle - b_i, 0 \}}{\|a_i\|^2} \cdot a_i, \quad (3)$$

которая будет использоваться в следящем алгоритме.

Обозначим

$$\varphi^s(x) = \underbrace{\varphi \dots \varphi}_s(x).$$

Под *фейеровским процессом*, порождаемым отображением φ при произвольном начальном приближении $x_0 \in \mathbb{R}^n$, будем понимать последовательность $\{\varphi^s(x_0)\}_{s=0}^{+\infty}$. Известно, что указанный фейеровский процесс сходится к точке, принадлежащей множеству M :

$$\{\varphi^s(x_0)\}_{s=0}^{+\infty} \rightarrow \bar{x} \in M. \quad (4)$$

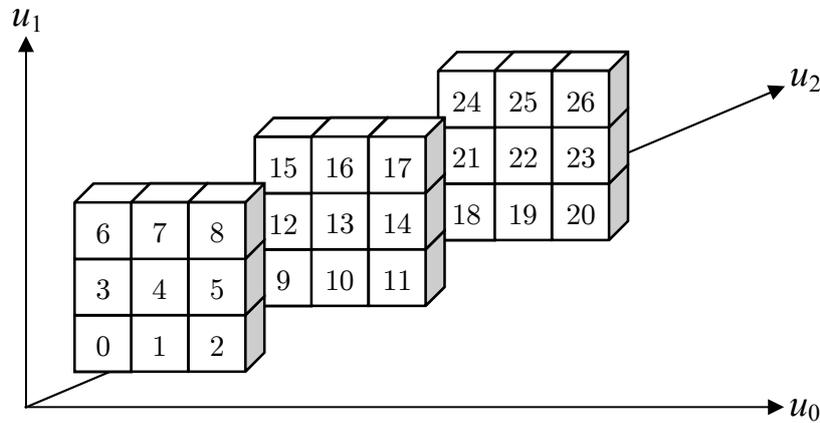


Рис. 1. Линейная нумерация ячеек следящей области при $n = 3$

Будем кратко обозначать это следующим образом: $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^s(x_0) = \bar{x}$.

Под φ -проектированием (псевдопроектированием) точки $x \in \mathbb{R}^n$ на многогранник M понимается отображение $\pi_M^\varphi(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} \varphi^s(x)$.

2. Построение следящей области

Без ограничения общности мы можем считать, что все процессы происходят в положительной области координат. Пусть n – размерность пространства решений, K – количество ячеек в следящей области по одному измерению. Пусть P – количество МРІ-процессов, используемых для распараллеливания вычислений. Будем предполагать, что всегда выполняется равенство:

$$K^n = P, \quad (5)$$

то есть, количество ячеек следящей области равно количеству МРІ-процессов. Зададим в пространстве целочисленных координат u_0, \dots, u_{n-1} линейную нумерацию ячеек следящей области следующим образом. Пусть ячейка α имеет целочисленные координаты $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$. Тогда ее номер k_α вычисляется по формуле:

$$k_\alpha = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i K^i. \quad (6)$$

На рис. 1 приведен пример такой линейной нумерации при $K = 3$. Например, ячейка с номером 19 на рис. 1 имеет целочисленные координаты $(1, 0, 2)$. Действительно, $19 = 1 \cdot 3^0 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2$.

Выразим целочисленные координаты ячейки α через ее порядковый номер k_α . Из (6) получаем

$$\alpha_0 = k_\alpha \bmod K; \quad (7)$$

$$\alpha_1 = \frac{k_\alpha - \alpha_0}{K} \bmod K; \quad (8)$$

$$\alpha_2 = \frac{k_\alpha - \alpha_0 - \alpha_1 K}{K^2} \bmod K; \quad (9)$$

.....

Таким образом, в общем виде имеем:

$$\alpha_i = \frac{k_\alpha - \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_j K^j}{K^i} \bmod K. \quad (10)$$

Формула (10) содержит ресурсоемкую операцию возведения в степень. От нее можно избавиться следующим образом. По определению операции mod из (7) получаем

$$\alpha_0 = k_\alpha - (k_\alpha \div K) \cdot K. \quad (11)$$

Подставив в (8) вместо α_0 правую часть этого уравнения, получим

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{k_\alpha - (k_\alpha - (k_\alpha \div K) \cdot K)}{K} \bmod K \\ &= \frac{(k_\alpha \div K) \cdot K}{K} \bmod K \\ &= (k_\alpha \div K) \bmod K. \end{aligned} \quad (12)$$

По определению операции mod отсюда следует

$$\alpha_1 = k_\alpha \div K - ((k_\alpha \div K) \div K) \cdot K. \quad (13)$$

Подставив в (9) вместо α_0 правую часть уравнения (11), а вместо α_1 – правую часть уравнения (13), получим

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{k_\alpha - \alpha_0 - \alpha_1 K}{K^2} \bmod K \\ &= \frac{k_\alpha - (k_\alpha - (k_\alpha \div K) \cdot K) - (k_\alpha \div K - ((k_\alpha \div K) \div K) \cdot K) \cdot K}{K^2} \bmod K \\ &= ((k_\alpha \div K) \div K) \bmod K. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12) и (14) для $i = 1, \dots, n-1$ по индукции получаем:

$$\alpha_i = \underbrace{(((k_\alpha \div K) \dots) \div K)}_i \bmod K. \quad (15)$$

Пусть $g = (g_0, \dots, g_{n-1})$ – нулевая вершина куба следящей области. Пусть $y = (y_0, \dots, y_{n-1})$ – нулевая вершина произвольной ячейки α . Выразим координаты точки y через координаты точки g . Обозначим $s = \frac{r}{K}$ – шаг сетки. Тогда

$$y_i = g_i + s\alpha_i \quad (i = 0, \dots, n-1). \quad (16)$$

Определим в качестве центральной ячейки куба ячейку γ с целочисленными координатами $(\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1})$, где

² С помощью символа \div здесь обозначается целочисленное деление.

$$\gamma_0 = \dots = \gamma_{n-1} = \lfloor K/2 \rfloor. \quad (17)$$

Пусть $q = (q_0, \dots, q_{n-1})$ – нулевая вершина центральной ячейки γ . Выразим координаты точки q через координаты точки g , используя формулу (16):

$$q_i = g_i + s\gamma_i \quad (i = 0, \dots, n-1). \quad (18)$$

3. Пересечение многогранника M с ячейкой α

Пусть y – нулевая вершина ячейки α . Тогда область внутри ячейки α (включая границы) задается системой из $2n$ неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{lll} -x_0 & \leq & -y_0 \\ & -x_1 & \leq -y_1 \\ & \dots & \dots \\ & & -x_{n-1} \leq -y_{n-1} \\ x_0 & \leq & y_0 + s \\ & x_1 & \leq y_1 + s \\ & \dots & \dots \\ & & x_{n-1} \leq y_{n-1} + s \end{array} \right. \quad (19)$$

Эта же система в матричной форме:

$$A_\alpha x \leq b_\alpha, \quad (20)$$

где (для $n = 3$)

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_\alpha = \begin{pmatrix} -y_0 \\ -y_1 \\ -y_2 \\ y_0 + s \\ y_1 + s \\ y_2 + s \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Положим

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ A_\alpha \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} b \\ b_\alpha \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Тогда пересечение многогранника M с ячейкой α задается системой неравенств в матричной форме

$$A'x \leq b', \quad (23)$$

где A' – расширенная матрица размера $(m + 2n) \times n$, b' – расширенный столбец свободных членов. Расширенный столбец b' в соответствии с формулой (22) имеет инвариантную часть b , не зависящую от координат нулевой вершины ячейки α , и вариативную часть b_α , зависящую от координат нулевой вершины ячейки α . Элементы расширенной матрицы A' не зависят от координат нулевой вершины ячейки α .

4. Реализация слеящего алгоритма

В данном разделе описывается полная реализация слеящего алгоритма в виде диаграмм деятельности UML.

4.1. Схема головной подпрограммы

Общая схема головной подпрограммы слеящего алгоритма приведена на рис. 2. На шаге 1 выполняется подпрограмма *init* (см. раздел 4.2), выполняющая инициализацию

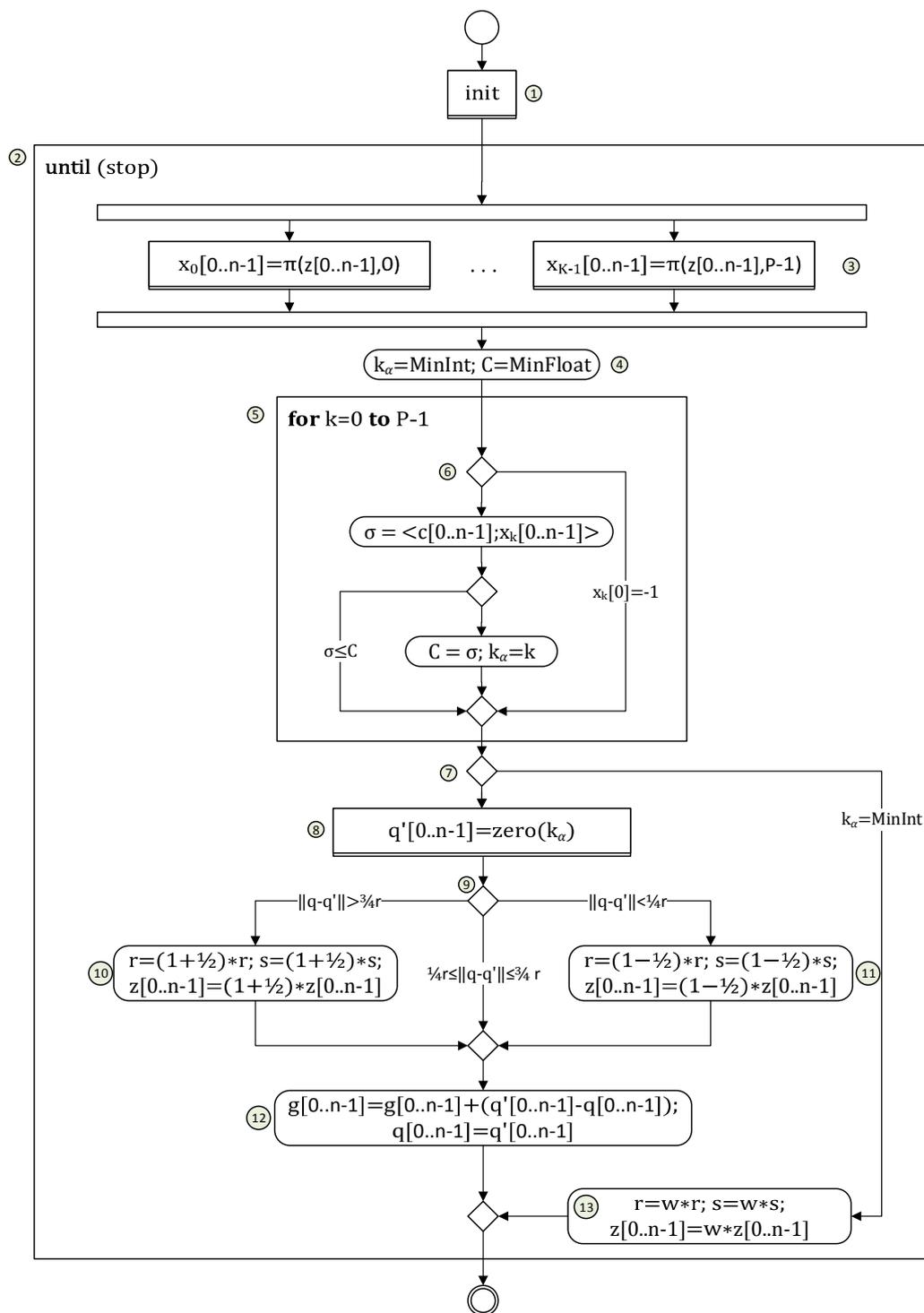


Рис. 2. Головная подпрограмма слеящего алгоритма

переменных. Затем в цикле *until* с меткой 2 выполняется корректировка следящей области в соответствии с описанием идеи алгоритма в [11]. Одна итерация соответствует одной корректировке. Головная подпрограмма следящего алгоритма оформляется в виде независимого процесса, который выполняется до тех пор, пока переменная *stop* не примет значение *true* (истина). Начальную установку переменной *stop* в значение *false* (ложь) осуществляет головной процесс, соответствующий основной программе. Он же присваивает переменной *stop* значение *true*, когда вычислительный процесс нужно остановить. В качестве текущего приближения решения задачи (1) головная программа использует текущее значение нулевой вершины центральной ячейки q , координаты которой вычисляются по формуле (18).

В теле цикла *until* выполняются следующие действия. На шаге 3 организуется K параллельных потоков управления (нитей), которые независимо друг от друга вычисляют псевдопроекции из целевой точки z на пересечение i -той ячейки с многогранником M ($i = 0, \dots, P - 1$). Напомним, что P равно количеству MPI-процессов, и в соответствии с формулой (5) равно количеству ячеек в кубической следящей области. Схема подпрограммы вычисления псевдопроекции детально описана в разделе 4.3.

В цикле *for* с меткой 5 для полученных на шаге 3 точек псевдопроекции x_0, \dots, x_{P-1} вычисляется номер k_α ячейки, на которой достигается максимум C целевой функции. Для корректной работы цикла 5 переменным k_α и C на шаге 4 присваиваются начальные значения *MinInt* и *MinFloat* соответственно. Значение *MinInt* соответствует минимальному машинному значению целого типа, *MinFloat* – минимальному машинному значению вещественного типа. Подпрограмма, вычисляющая точку $x_k = (x_{k0}, \dots, x_{k,n-1})$ псевдопроекции точки z на пересечение многогранника M с ячейкой с номером k_α , присваивает координате x_{k0} значение -1 в том случае, когда точка x_k псевдопроекции не принадлежит многограннику M . Эта ситуация возникает в случае, когда пересечение многогранника M с ячейкой с номером k_α является пустым. Если же x_k принадлежит многограннику, то в силу предположения о том, что все процессы находятся в положительной области координат (см. раздел 2), значение x_{k0} не может быть отрицательным. Указанное условие проверяется на шаге 6. Случаи $x_{k0} = -1$ из рассмотрения исключаются. Если при выполнении цикла 5 оказывается, что ни одна из ячеек следящей области не имеет непустого пересечения с многогранником M , то в переменной k_α сохраняется значение *MinInt*. Этот факт проверяется на шаге 7. В этом случае шаг сетки s , длина r ребра следящей области и координаты целевой точки z увеличиваются в w раз, где w – положительная константа, являющаяся параметром алгоритма (шаг 13 на рис. 2).

Если на шаге 7 выясняется, что $k_\alpha \neq \text{MinInt}$, значит найдена ячейка с номером k_α , имеющая непустое пересечение с многогранником, на которой достигается максимум целевой функции. В этом случае на шаге 8 вычисляется вектор q' , представляющий нулевую вершину новой центральной ячейки следящей области. Схема подпрограммы вы-

числения нулевой вершины ячейки с порядковым номером k_α приведена на рис. 3. Вычисления осуществляются с использованием формул (11), (15) и (16).

На шаге 9 (см. рис. 2) анализируется, насколько новая центральная ячейка далеко отстоит от предыдущей. Если расстояние между новой и старой центральными ячейками

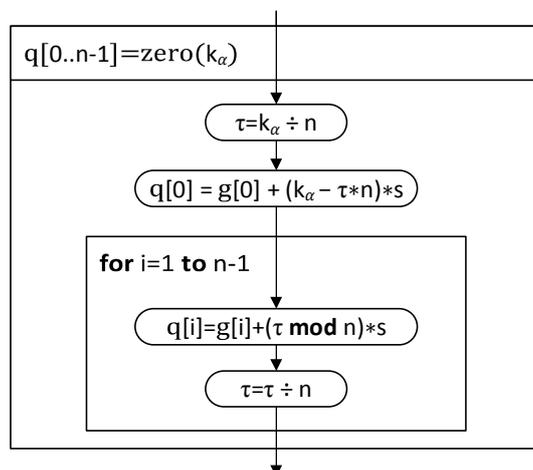


Рис. 3. Схема подпрограммы *zero* вычисления нулевой вершины ячейки с порядковым номером k_α

превышает $\frac{3}{4}r$ (где r – длина ребра кубической следящей области), то длина ребра кубической следящей области r , шаг сетки s и координаты целевой точки z на шаге 10 увеличиваются в 1.5 раза. Если расстояние между новой и старой центральными ячейками меньше $\frac{1}{4}r$, то длина ребра кубической следящей области r , шаг сетки s и координаты целевой точки z на шаге 11 уменьшаются в 2 раза. Величина $1/2$, используемая в шагах 10 и 11, в общем случае является параметром алгоритма. Если же отклонение лежит в пределах от $\frac{1}{4}r$ до $\frac{3}{4}r$, то корректировка значений r , s и z не производится. Величины $1/4$ и $3/4$ также являются в общем случае параметрами алгоритма.

На шаге 12 следящая область сдвигается по вектору $(q' - q)$, и в качестве текущей нулевой вершины q центральной ячейки следящей области берется точка q' .

4.2. Схема подпрограммы инициализации переменных *init*

Подпрограмма инициализации переменных *init* выполняет ввод исходных данных и инициализацию переменных. Схема подпрограммы *init* приведена на рис. 4. На шаге 1 вводятся значения переменных: n – размерность пространства решений; m – число неравенств в системе ограничений; R – начальное значение длины ребра следящей области, обеспечивающее покрытие многогранника M ; p – количество итераций при построении псевдопроекции, выполняемое между обновлениями входных данных (этот параметр используется в подпрограмме *dataChange* обновления исходных данных); K – количество ячеек в следящей области по одному измерению; u – размерность подвектора; L – число

независимых фейеровских итераций на подвекторах в подпрограмме вычисления псевдопроекции (см. рис. 5); T – масштабирующий коэффициент для вычисления координат целевой точки z . На шаге 2 проверяется условие (*assert*) $n \bmod u = 0$, означающее, что размерность пространства решений n кратно размерности подвектора u .

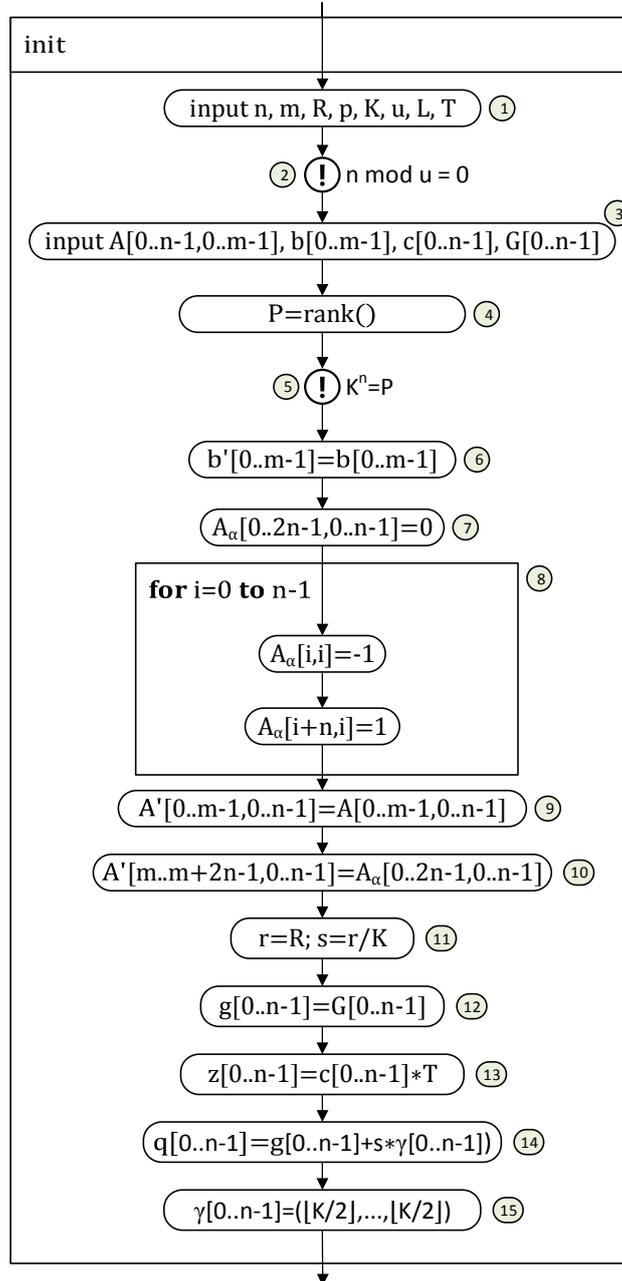


Рис. 4. Схема подпрограммы инициализации переменных *init*

На шаге 3 осуществляется ввод исходных данных задачи линейного программирования: A – матрица коэффициентов неравенств; b – столбец свободных членов; c – вектор коэффициентов целевой функции. Также здесь вводится вектор G , содержащий начальные координаты нулевой вершины кубической следящей области. Шаг 4 присваивает переменной P значение, равное количеству доступных MPI-процессов и вычисляемое с помощью системной функции *rank*. На шаге 5 проверяется условие (*assert*) $K^n = P$,

означающее, что общее количество ячеек следящей области равно количеству MPI-процессов. На шаге 6 формируется инвариантная часть расширенного столбца b' свободных членов, определяемого по формуле (22). На шаге 7 происходит инициализация матрицы A_α путем присваивания всем ее элементам нулевых значений. На шаге 8 определяются ненулевые элементы матрицы A_α в соответствии с системой неравенств (19). На шагах 9 и 10 строится расширенная матрица A' , определяемая формулой (22). На шаге 11 в качестве начального значения длины r ребра следящей области определяется значение R , обеспечивающее покрытие многогранника M , и вычисляется значение s длины ребра ячейки. На шаге 12 в качестве начальной нулевой вершины g кубической следящей области берется точка G , определяющая такое положение следящей области, при котором она полностью покрывает многогранник M . На шаге 13 вычисляются координаты целевой точки z по формуле $z = Tc$. На шаге 14 вычисляется нулевая вершина q центральной ячейки следящей области по формуле (18). На последнем шаге вычисляется вектор γ начальных целочисленных координат центральной ячейки по формуле (17).

4.3. Схема подпрограммы вычисления псевдопроекции

На рис. 5 приведена схема подпрограммы вычисления псевдопроекции $x = \pi(z, k_\alpha)$ из целевой точки z на пересечение многогранника M с ячейкой следящей области, имеющей порядковый номер k_α , где k_α вычисляется по формуле (6). Псевдопроекция вычисляется путем организации фейеровского процесса (4) (см. раздел 1). На шаге 1 выполняется инициализация переменных, необходимых для организации итерационного процесса. В качестве начального значения x_k берется точка z ; с помощью подпрограммы *zero* (см. рис. 3) вычисляется нулевая вершина y ячейки с номером k_α ; по формуле (21) определяется вариативная часть b_α расширенного столбца b' системы ограничений (23), получаемой при пересечении многогранника M с ячейкой α . В цикле 2 вычисляется *normsq* – вектор квадратов норм строк расширенной матрицы A' : $normsq_i = \|a'_i\|^2$.

На шаге 3 организуется итерационный процесс вычисления псевдопроекции. Для обеспечения высокой масштабируемости процедуры вычисления псевдопроекции используется метод разбиения вектора x на h подвекторов размерности u , предложенный в работе [13]. Мы здесь предполагаем, что $n = h \cdot u$. На каждом v -том подвекторе делается L независимых итераций вида

$$(x_{vu}, \dots, x_{(v+1)u-1}) := (x_{vu}, \dots, x_{(v+1)u-1}) - \frac{\lambda \sum_{i=1}^m \max \left\{ \left\langle (a_{i,vu}, \dots, a_{i,(v+1)u-1}), (x_{vu}, \dots, x_{(v+1)u-1}) \right\rangle - b_i, 0 \right\}}{\|a_i\|^2} \cdot (a_{i,vu}, \dots, a_{i,(v+1)u-1}).$$

Указанная формула получается из формулы (3) путем ограничения действия фейеровского отображения φ на соответствующий подвектор. Подпрограмма *dataChange* вносит изменения в исходные данные с периодом в t секунд (t – положительное число, которое может принимать значения меньше единицы).

Итерационный процесс заканчивается, когда расстояние между двумя последними приближениями x и x' будет меньше ε . На четвертом шаге подпрограмма in (см. рис. 6) проверяет принадлежность найденной точки псевдопроекции x ячейке с номером k_α . Если x не принадлежит ячейке с номером k_α , то $x[0]$ присваивается значение (-1) .

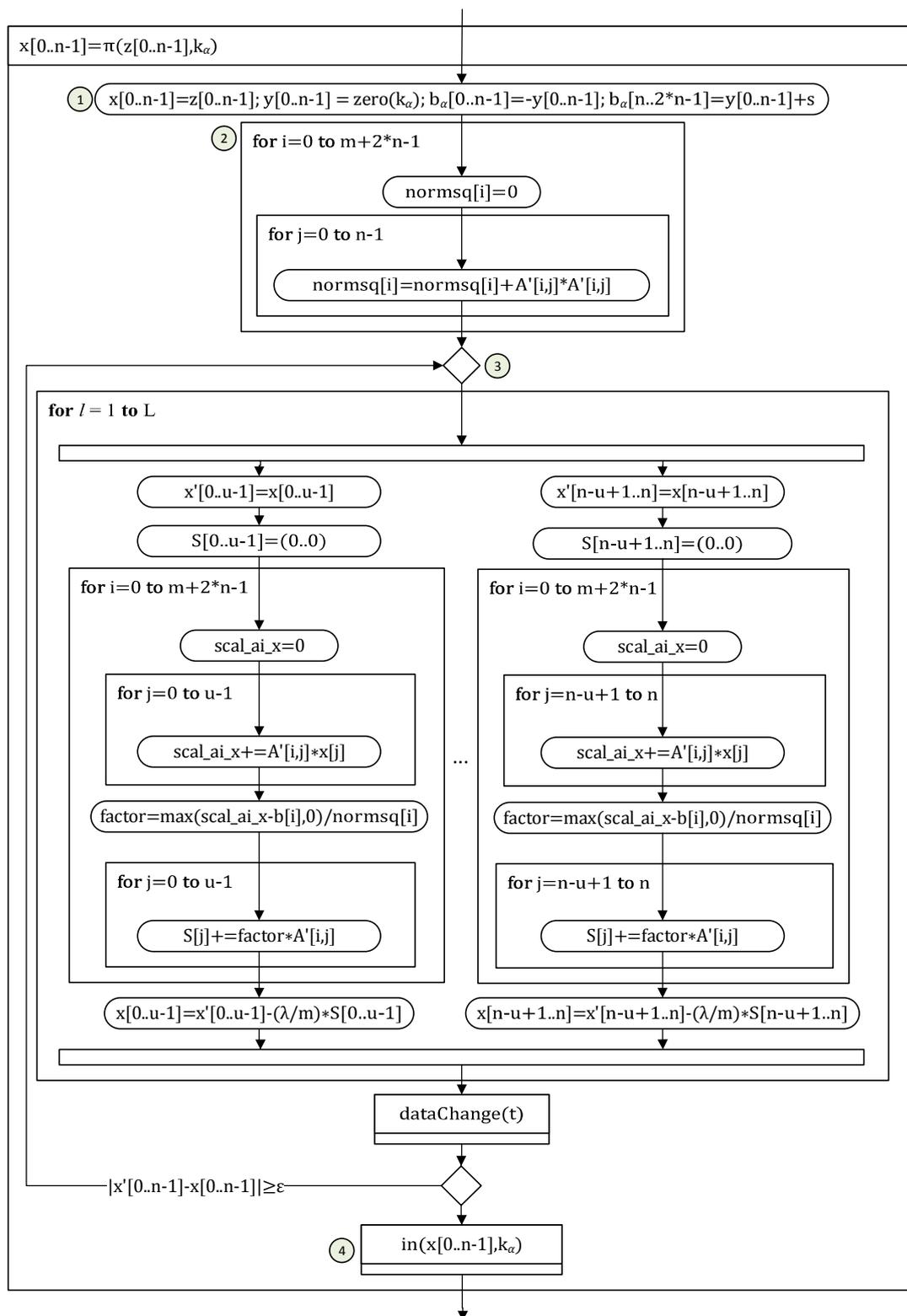


Рис. 5. Схема подпрограммы π вычисления псевдопроекции

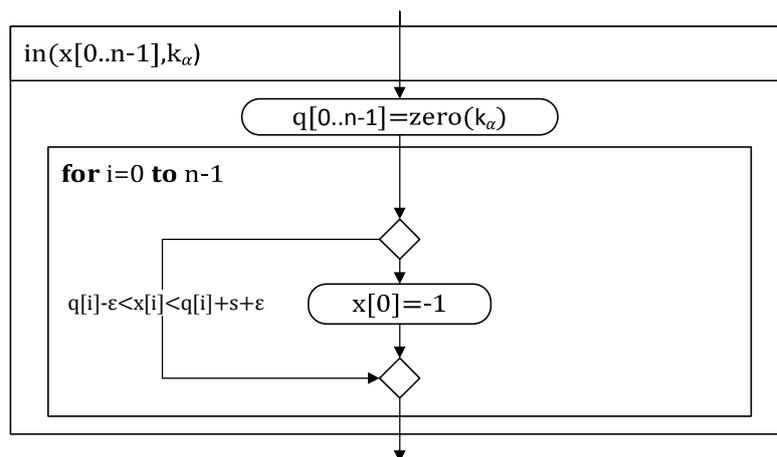


Рис. 6. Схема подпрограммы *in*, проверяющей принадлежность точки x ячейке с номером k_α

Переменная s в подпрограмме *in* на рис. 6 задает длину ребра ячейки. Ее значение определяется на шаге 11 подпрограммы *init* (см. рис. 4). Константа ε задает малое положительное число, позволяющее корректно обрабатывать приближенные значения.

Заключение

В работе описана параллельная реализация следящего алгоритма для решения нестационарных задач большой размерности на кластерных вычислительных системах. Данный алгоритм использует подход, основанный на применении фейеровских отображений для построения псевдопроекции на многогранник. Приведена формальная постановка задачи, и дано описание фейеровского процесса. С помощью математических формул определены следящая область и пересечение многогранника, задаваемого системой ограничений, с произвольной ячейкой следящей области. В плане дальнейших исследований – реализация параллельного алгоритма на языке C++ с использованием технологий параллельного программирования MPI и OpenMP, и проведение вычислительных экспериментов на искусственных и реальных данных.

Литература

1. Еремин И.И., Мазуров Вл.Д. Нестационарные процессы математического программирования. М.: Наука, 1979. 291 с.
2. Agmon S. The relaxation method for linear inequalities // *Canad. J. Math.* 1954. Vol. 6, No. 3. P. 382–392.
3. Motzkin T.S., Schoenberg J.J. The relaxation method for linear inequalities // *Canad. J. Math.* 1954. Vol. 6, No. 3. P. 393–404.
4. Еремин И.И., Попов Л.Д. Фейеровские процессы в теории и практике: обзор последних результатов // *Известия высших учебных заведений. Математика.* 2009. № 1. С. 44–65.
5. Дышаев М.М., Соколинская И.М. Представление торговых сигналов на основе адаптивной скользящей средней Кауфмана в виде системы линейных неравенств //

- Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2013. Т. 2, № 4. С. 103–108.
6. Ананченко И.В., Мусаев А.А. Торговые роботы и управление в хаотических средах: обзор и критический анализ // Труды СПИИРАН. 2014. № 3 (34). С. 178–203.
 7. Sokolinskaya I.M., Sokolinskii L.B. Parallel algorithm for solving linear programming problem under conditions of incomplete data // Automation and Remote Control. 2010. Vol. 71, No. 7. P. 1452–1460.
 8. Rechkalov T.V., Zymbler M.L. Accelerating Medoids-based Clustering with the Intel Many Integrated Core Architecture // Proceedings of the 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT'2015), October 14–16, 2015, Rostov-on-Don, Russia. IEEE, 2015. P. 413–417.
 9. Zymbler M.L. Best-match Time Series Subsequence Search on the Intel Many Integrated Core Architecture // Proceedings of the 19th East-European Conference on Advances in Databases and Information Systems, ADBIS 2015 (Poitiers, France, September 8–11, 2015). Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2015. Vol. 9282. P. 275–286.
 10. Соколинская И.М., Соколинский Л.Б. Алгоритм решения нестационарных задач линейного программирования для кластерных вычислительных систем с многоядерными ускорителями // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2015): труды международной научной конференции. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. С. 477–481.
 11. Sokolinskaya I., Sokolinsky L. Solving unstable linear programming problems of high dimension on cluster computing systems // 1st Russian Conference on Supercomputing Days 2015, RuSCDays 2015; Moscow; Russian Federation; 28 September 2015 through 29 September 2015. CEUR Workshop Proceedings. Vol. 1482, CEUR-WS.org 2015. P. 420–427.
 12. Еремин И.И. Фейеровские методы для задач выпуклой и линейной оптимизации. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2009. 200 с.
 13. Ершова А.В., Соколинская И.М. О сходимости масштабируемого алгоритма построения псевдопроекции на выпуклое замкнутое множество // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. 2011. № 37(254), Вып. 10. С. 12–21.

Соколинская Ирина Михайловна, доцент, кафедра вычислительной математики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), Irina.Sokolinskaya@susu.ru

Соколинский Леонид Борисович, д. ф.-м. н., профессор, проректор по информатизации, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), Leonid.Sokolinsky@susu.ru

Поступила в редакцию 6 марта 2016 г.

IMPLEMENTATION OF PARALLEL PURSUIT ALGORITHM FOR SOLVING UNSTABLE LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

I.M. Sokolinskaya, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

L.B. Sokolinsky, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The paper describes an implementation of the parallel pursuit algorithm for solving unstable linear programming problems of high dimension on cluster computing systems. This algorithm uses Fejer's mappings for building pseudo-projection on polyhedron. The algorithm tracks changes in input data and corrects the calculation process. This task is divided into set of independent subtasks, which can be processed in parallel. The UML activity diagrams describing the algorithm implementation are presented.

Keywords: unstable linear programming problem, Fejer's mappings, pursuit algorithm, UML activity diagrams, massive parallelism, cluster computing systems.

FOR CITATION

Sokolinskaya I.M., Sokolinsky L.B. Implementation of Parallel Pursuit Algorithm for Solving Unstable Linear Programming Problems. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2016. vol. 5, no. 2. pp. 15–29. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160202.

References

1. Eremin I.I., Mazurov V.I.D. *Nestacionarnye protsessy matematicheskogo programmirovaniia* [Unstable Processes of Mathematical Programming]. Moscow, Nauka [Science], 1979. 291 p. (in Russian)
2. Agmon S. The Relaxation Method for Linear Inequalities. *Canad. J. Math.* 1954. vol. 6, no. 3. pp. 382–392.
3. Motzkin T.S., Schoenberg J.J. The Relaxation Method for Linear Inequalities. *Canad. J. Math.* 1954. vol. 6, no. 3. pp. 393–404.
4. Eremin I.I., Popov L.D. Feyerovskie protsessy v teorii i praktike: obzor poslednikh rezul'tatov [Fejer's Mappings in Theory and Practice: Review of the Latest Results]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematika* [Proceedings of the Higher Educational Institutions. Mathematics]. 2009. no. 1. pp. 44–65. (in Russian)
5. Dyshaev M.M., Sokolinskaya I.M. Predstavlenie torgovykh signalov na osnove adaptivnoy skol'zyashchey sredney Kaufmana v vide sistemy lineynykh neravenstv [Representation of Trading Signals Based Kaufman Adaptive Moving Average as a System of Linear Inequalities]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Vychislitel'naya matematika i informatika* [Bulletin of South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering]. 2013. vol. 2, no. 4. pp. 103–108. (in Russian)

6. Ananchenko I.V., Musaev A.A. Torgovye roboty i upravlenie v khaoticheskikh sredakh: obzor i kriticheskiy analiz [Trading Robots and Management in Chaotic Environments: an Overview and Critical Analysis]. *Trudy SPIIRAN* [SPIIRAS Proceedings]. 2014. no. 3 (34). pp. 178–203. (in Russian)
7. Sokolinskaya I.M., Sokolinskii L.B. Parallel Algorithm for Solving Linear Programming Problem Under Conditions of Incomplete Data. *Automation and Remote Control*. 2010. vol. 71, no. 7. pp. 1452–1460.
8. Rechkalov T.V., Zymbler M.L. Accelerating Medoids-based Clustering with the Intel Many Integrated Core Architecture. *Proceedings of the 9th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT'2015)*, October 14–16, 2015, Rostov-on-Don, Russia. IEEE, 2015. pp. 413–417.
9. Zymbler M.L. Best-match Time Series Subsequence Search on the Intel Many Integrated Core Architecture. *Proceedings of the 19th East-European Conference on Advances in Databases and Information Systems, ADBIS 2015 (Poitiers, France, September 8–11, 2015)*. *Lecture Notes in Computer Science*. vol. 9282. Springer, 2015. pp. 275–286.
10. Sokolinskaya I.M., Sokolinskiy L.B. Algoritm resheniya nestatsionarnykh zadach lineynogo programmirovaniya dlya klasternykh vychislitel'nykh sistem s mnogoyadernymi uskoritelyami [Algorithm for Solving Unstable Linear Programming Problems for Cluster Computing Systems with Manycore Accelerators]. *Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii (PaVT'2015): trudy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii* [Parallel Computational Technologies (PCT'2015): Proceedings of the International Scientific Conference]. Chelyabinsk, Publishing of the South Ural State University, 2015. pp. 477–481. (in Russian)
11. Sokolinskaya I., Sokolinsky L. Solving Unstable Linear Programming Problems of High Dimension on Cluster Computing Systems. *1st Russian Conference on Supercomputing Days 2015, RuSCDays 2015; Moscow; Russian Federation; 28 September 2015 through 29 September 2015*. *CEUR Workshop Proceedings*. vol. 1482, CEUR-WS.org 2015. pp. 420–427. (in Russian)
12. Eremin I.I. *Fejerovskie metody dlya zadach lineynoy i vypukloj optimizatsii* [Fejer's Methods for Problems of Convex and Linear Optimization]. Chelyabinsk, Publishing of the South Ural State University, 2009. 200 p. (in Russian)
13. Ershova A.V., Sokolinskaya I.M. O skhodimosti masshtabiruемого algoritma postroeniya psevdoproektsii na vypukloe zamknutoe mnozhestvo [About Convergence of Scalable Algorithm of Constructing Pseudo-Projection on Convex Closed Set]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye* [Bulletin of South Ural State University. Series: Mathematical simulation and programming]. 2011. no. 37(254), issue 10. pp. 12–21. (in Russian)

Received March 6, 2016.

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА РАЗРЕЖЕННОГО QR РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ВЕРХНИХ КВАЗИТРЕУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ СО СТРУКТУРОЙ РАЗРЕЖЕННОСТИ ТИПА ВЛОЖЕННЫХ СЕЧЕНИЙ¹

С.А. Харченко, А.А. Ющенко

В работе рассматривается параллельная MPI+threads+SIMD реализация алгоритма вычисления разреженного QR разложения специальным образом упорядоченной прямоугольной матрицы на основе разреженных блочных преобразований Хаусхолдера. В алгоритме производится предварительное независимое параллельное вычисление QR разложений для наборов строк матрицы. Затем в соответствии с деревом вычислений производится вычисление QR разложения матриц, составленных из R факторов строчных разложений. Приводятся результаты экспериментов, подтверждающие эффективность предложенной параллельной реализации для тестовых задач. Алгоритм также может быть эффективно реализован на гетерогенных кластерных архитектурах с ускорителями типа GPGPU.

Ключевые слова: разреженная, прямоугольная матрица, верхняя квазитреугольная матрица, QR разложение, вложенные сечения, преобразования Хаусхолдера, MPI, многопоточность, SIMD.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Харченко С.А., Ющенко А.А. Параллельная реализация алгоритма разреженного QR разложения для прямоугольных верхних квазитреугольных матриц со структурой разреженности типа вложенных сечений // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 2. С. 30–42. DOI: 10.14529/cmse160203.

Введение

QR разложение прямоугольной матрицы является одним из базовых вычислительных алгоритмов для многих задач вычислительной математики. В частности, подобные вычисления возникают при решении СЛАУ, при реализации метода наименьших квадратов и задач на собственные значения [1], и т.д. Возможность эффективно параллельным образом вычислять QR разложение разреженной матрицы в некоторых случаях означает возможность использования новых классов вычислительных алгоритмов, и поэтому подобные разработки представляют практический интерес.

В работе описывается реализация на гибридной MPI+threads+SIMD архитектуре представленного в работе [2] параллельного алгоритма вычисления разреженного QR разложения для многоуровневой верхней квазитреугольной разреженной матрицы со структурой типа вложенных сечений. Алгоритм в работе [2] во многом аналогичен представленному в работах [3, 4] Тима Дэвиса с соавторами мультифронтальному алгоритму построения разреженного QR разложения. В работе [5] рассматривается многоуровневый вариант вычисления неполного разреженного QR разложения как предобусловливания при итерационном решении задачи метода наименьших квадратов.

¹ Статья рекомендована к публикации программным комитетом Международной конференции «Суперкомпьютерные дни в России – 2015».

Основные отличия предложенного в работе [2] алгоритма от предложенных ранее состоят в том, что:

- используются блочные преобразования Хаусхолдера, аналогичные представленным в работе [6];
- профильное разреженное QR разложение заменено на расширенное профильное разреженное QR разложение, которое во многих практически важных случаях дает заметно меньшее заполнение Q-фактора;
- введено дополнительное строчное упорядочивание и разбиение, которое позволяет дополнительно уменьшить связность вычислений и заполнение Q-факторов;
- предложен алгоритм построения представления матрицы, удобного для параллельного вычисления разреженного QR разложения, на основе геометрической декомпозиции расчетной области.

Данная работа, так же как и работа [2], является базовой для планируемой серии работ по новым параллельным итерационным алгоритмам решения СЛАУ и задач метода наименьших квадратов на основе композиции подпространств, порождаемых разреженными базисами. Параллельная реализация, представленная в работе, может быть взята за основу при реализации алгоритма вычисления разреженного QR разложения на гетерогенных кластерных архитектурах с ускорителями типа GPGPU.

Работа построена следующим образом. В разделе 1 приводится краткое описание параллельного алгоритма из работы [2] для построения разреженного QR разложения прямоугольной многоуровневой верхней квазитреугольной матрицы типа вложенных сечений. В разделе 2 описывается гетерогенная MPI+threads+SIMD архитектура, для которой указанный параллельный алгоритм был реализован. В разделе 3 описываются подробности реализации при отображении алгоритма на параллельную архитектуру компьютера. В разделе 4 приводится описание тестовой задачи и представлены результаты численных экспериментов. В заключении представлены выводы по результатам работы и планы по развитию и использованию представленных алгоритмов.

1. Параллельный алгоритм построения разреженного QR разложения

В этом разделе приводится краткое описание параллельного алгоритма из работы [2] для построения разреженного QR разложения прямоугольной матрицы.

Последовательный алгоритм построения QR разложения основан на блочном преобразовании Хаусхолдера вида

$$\Omega = I_M + F T F^T, \quad (1)$$

где $\Omega \in \mathbb{R}^{M \times M}$, $\Omega^T \Omega = I_M$, $F \in \mathbb{R}^{M \times s}$, $T \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Блочное преобразование (1) строится через известный набор из s обычных векторных преобразований Хаусхолдера следующим образом: матрица F состоит из набора векторов направлений векторных преобразований Хаусхолдера, а верхняя треугольная матрица T может быть вычислена рекуррентным образом с использованием коэффициентов векторных преобразований Хаусхолдера если известна матрица $\Psi = F^T F$.

При обсуждении разреженных вычислений будут рассматриваться вопросы вычисления QR разложения для прямоугольных так называемых мелкоблочных разреженных матриц. Это означает, что разреженность понимается в смысле блоков малого размера, каждый из которых является плотной в общем случае прямоугольной матрицей. Для

простоты будем предполагать, что все мелкие блоки квадратные малого порядка s . При этом все алгоритмы могут быть обобщены на случай переменного столбцевого и строчного мелко блочного разбиения. В противовес мелким плотным $s \times s$ блокам будем говорить также о крупноблочном или просто блочном разбиении, строчном и столбцевом. Это будет означать, что соответствующие подматрицы составлены из некоторого количества мелко блочных строк и столбцов. При этом под блочным преобразованием Хаусхолдера имеется в виду преобразование вида (1) для одного мелко блочного столбца.

При последовательном построении профильного разреженного QR разложения мелко блочной разреженной матрицы C действуем по аналогии со случаем плотной матрицы. По первому мелко блочному столбцу матрицы строим разреженное блочное преобразование Хаусхолдера с разреженностью столбца такой, чтобы обнулить мелкие блоки матрицы под первой блочной диагональю. Применяем транспонированное блочное преобразование Хаусхолдера ко второму мелко блочному столбцу, для полученного результата строим следующее разреженное блочное преобразование Хаусхолдера для обнуления элементов под второй мелко блочной диагональю, и т.д.

Наравне с профильным разреженным QR разложением рассмотрим также расширенное профильное QR разложение матрицы. Схематически профильное и расширенное профильное QR изображены на рис. 1. Фактически расширенное профильное QR разложение – это профильное QR разложение, примененное к матрице, расширенной сверху нулевым квадратным блоком. При этом структура разреженности Q-фактора пополняется возможными дополнительными элементами на месте бывшего фактора R, и отсоединенными диагональными элементами, примыкающими к новому R-фактору.

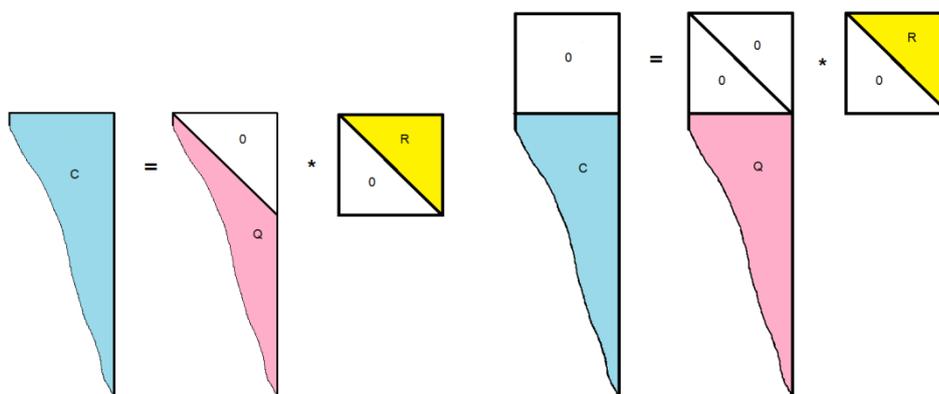


Рис. 1. Профильное (слева) и расширенное профильное (справа) QR разложения

В работе [2] показывается математическая эквивалентность профильного и расширенного профильного QR разложений в случае матрицы C полного столбцевого ранга. Также приводятся примеры, когда заполнение Q-фактора QR разложения в расширенном профильном QR разложении значительно больше заполнения Q-фактора в профильном за счет дополнительного заполнения в бывшем R-факторе разложения, а также обратный пример, представленный на рис. 2. В интересующих авторов приложениях основным является случай, когда число столбцов много меньше числа строк. В этих случаях более предпочтительным является использование варианта с расширенным

профильным разреженным QR разложением. Кроме того, использование расширенного профильного QR разложения удобно при проведении вычислений с мелко блочными матрицами, в которых число строк меньше числа столбцов.

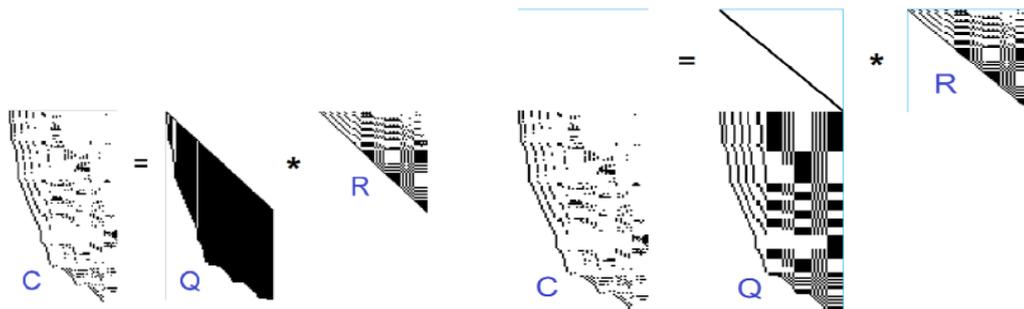


Рис. 2. Профильное (слева) и расширенное профильное (справа) QR разложения для тестовой задачи

Для прямоугольной разреженной матрицы $C \in \mathbb{R}^{M \times N_s}$ введем ее строчное разбиение в виде:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $C_t \in \mathbb{R}^{M_t \times N_s}$, $t = 1, \dots, k$, и $\sum_{t=1}^k M_t = M$. Пусть для каждой из матриц имеет место QR разложение с блочными преобразованиями Хаусхолдера:

$$C_t = \left(\prod_{j=1}^N \Omega_j^{(t)} \right) \begin{bmatrix} R^{(t)} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $t = 1, \dots, k$. Для разреженной матрицы C ее блоки C_t могут содержать много нулевых мелко блочных столбцов, в подобных случаях матрицы $R^{(t)}$ в (3) не обязательно верхние треугольные и имеют много нулевых столбцов, а среди блочных преобразований Хаусхолдера имеется много тождественных преобразований с единичной матрицей [2].

Рассмотрим задачу построения QR разложения всей матрицы (2) на основе разложений (3). Для этого рассмотрим разреженную матрицу

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} R^{(1)} \\ \vdots \\ R^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

и ее QR разложение

$$\hat{C} = \left(\prod_{j=1}^N \hat{\Omega}_j \right) \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

Обозначим $\hat{\Phi} = \left(\prod_{j=1}^N \hat{\Omega}_j \right)$. Имеют место соотношения

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 R^{(1)} \\ \vdots \\ \Phi_k R^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Phi_k \end{bmatrix} \hat{\Phi} \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix} = \Phi \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Phi_k \end{bmatrix} \hat{\Phi}, \quad (7)$$

причем $\Phi^T \Phi = I_M$. Отсюда следует, что неявное представление (7) совместно с равенством $C = \Phi \begin{bmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{bmatrix}$ из (6) есть QR разложение матрицы C , при этом матрица Φ представляет собой Q-фактор QR разложения, а квадратная верхняя треугольная матрица \hat{R} есть R-фактор QR разложения.

Описанная конструкция, очевидно, позволяет параллельным образом вычислять QR разложение матрицы за счет введения строчного разбиения, поскольку строчные QR разложения (3) можно считать независимо. Синхронизация вычислений происходит только при вычислении объединяющего QR разложения (5). С другой стороны понятно, что подобный подход к основному распараллеливанию вычислений может быть эффективен только если число столбцов в матрице существенно меньше числа строк, иначе затраты на объединяющее QR разложение могут доминировать.

Описанный параллельный алгоритм вычисления QR разложения по блочным строкам можно сделать более эффективным за счет использования дополнительной столбцевой разреженности матрицы. Для этого рассмотрим двухуровневую организацию вычислений для прямоугольной матрицы C со структурой разреженности, изображенной на рис. 3. Пусть число мелко блочных столбцов в матрицах C_1 , C_2 и C_S равны соответ-

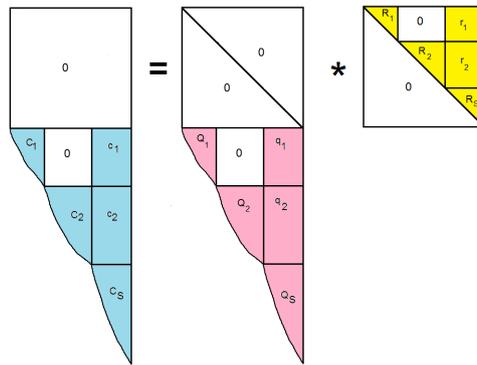


Рис. 3. Двухуровневая организация параллельного вычисления QR разложения

ственно N_1 , N_2 и N_S , где $N_1 + N_2 + N_S = N$. Как показано в [2], для матрицы C с такой структурой разреженности для соответствующей матрицы \hat{C} типа (4) в объединяющем QR разложении задачу вычисления ее QR разложения можно перестановкой блочных строк свести к задаче вычисления QR разложения с разреженной матрицей мелко блочного размера $(n_1 + n_2 + N_S) \times N_S$, здесь n_1 и n_2 соответственно число ненулевых мелко блочных столбцов в матрицах c_1 и c_2 .

Определение 1. Квадратную матрицу с заданным в ней строчным и столбцевым разбиением и имеющую блочную структуру разреженности вида:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & a_1 \\ 0 & A_2 & a_2 \\ b_1 & b_2 & D \end{bmatrix} \quad (8)$$

будем называть матрицей со структурой разреженности типа вложенных сечений.

Квадратную матрицу (8) естественно ассоциировать с двухуровневым бинарным деревом, в котором корневой узел бинарного дерева соответствует блоку окаймления, а листья дерева соответствуют диагональным блокам A_1 и A_2 . По этой причине матрицу в (8) будем считать двухуровневой матрицей со структурой разреженности типа вло-

женных сечений. Если диагональные блоки A_1 и A_2 также являются матрицами со структурой разреженности типа вложенных сечений, то такой матрице можно сопоставить трехуровневое бинарное дерево и рассматривать всю матрицу в совокупности как трехуровневую, т.д. Алгоритмы вычисления упорядочивания матрицы, приводящие ее к виду (8), детально рассмотрены в [7].

Обобщая этот подход на случай прямоугольных матриц введем следующее определение [2].

Определение 2. Прямоугольную мелко блочную матрицу с введенным в ней блочным строчным и столбцевым разбиениями будем называть *верхней квазитреугольной -уровневой матрицей со структурой разреженности типа вложенных сечений*, если в терминах крупных блоков матрица является квадратной верхней треугольной и имеет структуру разреженности типа вложенных сечений, описываемой L -уровневым деревом зависимостей.

В частности, матрица на рис. 3 в терминах Определения 1 является двухуровневой верхней квазитреугольной с двухуровневым бинарным деревом зависимостей вычислений.

Как следует из предыдущего изложения, для эффективного вычисления QR разложения верхних квазитреугольных матриц с разреженностью типа вложенных сечений можно использовать следующий параллельный алгоритм:

1. Параллельно и независимо для каждой блочной строки матрицы строим расширенное профильное разреженное QR разложение на основе блочных преобразований Хаусхолдера.
2. Параллельно в порядке, определяемом деревом зависимостей вычислений, достраиваем QR разложения для объединяющих подматриц для вычисления QR разложений соответствующих мелко блочных столбцевых окаймлений.

2. Архитектура гибридной вычислительной системы

Большинство современных суперкомпьютерных вычислительных систем, как правило, имеют неоднородную архитектуру. С одной стороны, имеется набор вычислительных узлов с распределенной памятью, обмен данными между которыми может быть осуществлен по быстрой обменной сети. С другой стороны, каждый узел представляет со-

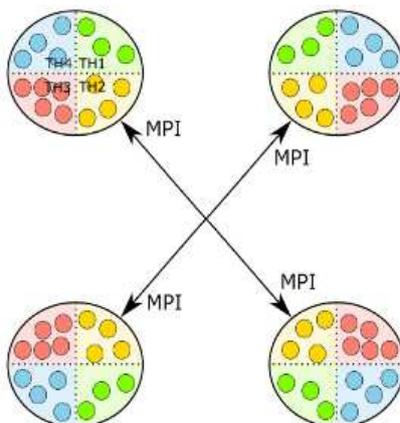


Рис. 4. Двухуровневая MPI+ТВВ организация параллельных вычислений

бой многопроцессорный/многоядерный компьютер с общим доступом к оперативной памяти. Программная реализация вычислительных алгоритмов (включая алгоритм вычисления разреженного QR разложения) на компьютерах подобной архитектуры предполагает использование стандарта MPI при распараллеливании по распределенной памяти (по узлам вычислений), а по общей памяти узла распараллеливание по процессорам/ядрам естественно осуществлять на основе стандартов работы с потоками с встроенными механизмами динамической балансировки нагрузки, таких как OpenMP или Intel Threading Building Blocks (ТВВ). При этом предполагается (рис. 4), что на каждом узле имеется только один MPI процесс, который порождает на этом узле нужное количество одновременно работающих потоков вычислений.

Большинство современных процессоров для оптимизации времени выполнения кода поддерживают так называемые векторные расширения систем команд — SIMD (Single Instruction Multiple Data) инструкции. Подобные вычисления можно проводить на любом ядре центрального процессора. В этих расширениях вычисления осуществляются с векторами данных стандартного целого и вещественного типа. Любое вычисление на векторных регистрах осуществляется в следующей последовательности: данные из памяти загружаются в регистровые переменные, производится вызов аппаратно поддерживаемой функции работы с регистрами, затем данные обратно выгружаются в обычную память. Выпускаемые сейчас процессоры обычно поддерживают системы команд SSE и AVX, работающие соответственно со 128-битными XMM и 256-битными YMM регистрами. Это позволяет при использовании 256-битных регистров YMM, например, за один такт сложить 8 чисел с плавающей точкой одинарной точности или перемножить 4 числа с двойной точностью. На некоторых новейших процессорах поддерживается система команд AVX2, в которой дополнительно по отношению к AVX имеются FMA команды, совмещающие сложение и умножение векторов. В ускорителях Intel Xeon Phi имеется поддержка 512-битных ZMM регистров. В следующем поколении ускорителей Knights Landing появится аппаратная поддержка новой системы команд AVX512, совместимой с серверными процессорами Xeon.

3. Отображение алгоритма разреженного QR разложения на архитектуру вычислительной системы

Приведенный во втором разделе параллельный алгоритм вычисления разреженного QR разложения для верхней квазитреугольной матрицы типа вложенных сечений был реализован на кластерной MPI+threads архитектуре с использованием SIMD инструкций. Распараллеливание алгоритма на гетерогенной MPI+threads+SIMD архитектуре осуществлено следующим образом.

Распараллеливание верхнего уровня по MPI осуществлялось как распараллеливание по распределенной памяти. Для этих целей в дереве зависимостей вычислений каждому MPI процессу было выделено целиком поддереву зависимых вычислений по возможности с близкой для всех поддеревьев вычислительной работой. Дополнительная динамическая балансировка вычислений в какой-либо форме не проводилась. Обработка каждого из вышестоящих узлов дерева зависимостей передавалась одному (например первому) из тех процессоров, который обрабатывал один из узлов сыновей данного узла. На каждый MPI процесс перераспределялись те блочные строки матрицы, которые нужны для окончательной обработки своих узлов поддеревьев зависимостей вычислений.

Распараллеливание среднего уровня по нитям осуществлялось с помощью технологии Intel TVB либо как независимые, либо как зависимые вычисления. Зависимости описываются в виде подграфа зависимых вычислений для узлов поддеревьев своего MPI процессора, независимые вычисления проводились при начальном вычислении QR разложений для блочных строк. При проведении вычислений с узлом дерева зависимых вычислений, не входящим в MPI-поддерева, вычисление объединяющих QR разложений проводилось только при поступлении необходимых данных с других MPI процессов.

Распараллеливание нижнего уровня параллельных вычислений — SIMD векторизация — проводилось за счет использования блочных преобразований Хаусхолдера. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Основными операциями при работе с блочными преобразованиями Хаусхолдера являются:

1. Вычисление векторного QR разложения с векторными преобразованиями Хаусхолдера для мелко блочного столбца.
2. Преобразование набора векторных преобразований Хаусхолдера в единое блочное преобразование Хаусхолдера для мелко блочного столбца.
3. Применение с учетом разреженности блочных преобразований Хаусхолдера к последующим мелко блочным столбцам матрицы.

С учетом сказанного в разделе 1 про способ трансформации векторных преобразований Хаусхолдера в блочное можно выделить следующие 4 основные вычислительные операции в терминологии функций BLAS 1:

- операция DOT: $z = x^T y$ — вычисление скалярного произведения векторов;
- операция AXPY: $y := y + ax$ — прибавление масштабированного вектора;
- блочное обобщение операции DOT: $Z = X^T Y$ — скалярное произведение для блоков векторов;
- блочное обобщение операции AXPY: $Y := Y + XA$ — прибавление блока векторов умноженного на квадратную матрицу.

Векторные операции встречаются при векторном вычислении QR разложения. В операциях DOT и AXPY длины векторов недостаточны для покрытия накладных расходов вызова оптимизированных BLAS функций из Intel MKL. По этой причине в этих операциях осуществлялась ручная SIMD векторизация прямым вызовом соответствующих векторных инструкций с помощью интринсик функций.

Для максимальной локализации работы с памятью при обработке блочных преобразований Хаусхолдера естественно использовать формат хранения данных «по строкам» вместо традиционно используемого для блока векторов формата «по столбцам».

При проведении SIMD векторизации для блоков векторов в силу особенностей векторных инструкций реализовывалась поддержка только значений $s = 2; 4; 8; 16$ для двух типов данных float и double. Как уже отмечалось, разреженные QR разложения будут использоваться в контексте построения разреженных базисов в алгоритмах решения СЛАУ и для реализации метода наименьших квадратов, а в этом случае параметр s — это число векторов в блоке одновременно обрабатываемых в итерационной схемы. Для длинных блоков векторов задача вычисления блочных операций DOT и AXPY сводилась к циклу вызовов для подматриц размера $s \times s$. Подробности реализации этих операций в терминах SIMD инструкций для подматриц стандартного размера можно найти в работе [8]. Как показали численные эксперименты, ручная векторизация для таких

маленьких порядков s оказалась значительно эффективней вызовов библиотечных реализаций из Intel MKL и Intel IPP.

4. Результаты численных экспериментов

Для тестирования предложенных в работе алгоритмов был выбран искусственный тест, в котором по возможности отражены основные особенности будущего использования алгоритмов.

Для регулярной $N_x \times N_y \times N_z$ прямоугольной сетки была построена регулярная разреженная мелко блочная матрица с блоками порядка $s = 8$, структура разреженности которой отвечает шаблону уравнения Лапласа. Выбор порядка блока был обусловлен тем, что для такого значения порядка блока для типов данных float и double возможно добиться эффективного использования SIMD векторных инструкций вплоть до набора AVX2.

Для полученной матрицы с помощью алгоритма вложенных сечений, как описано в работе [2], было построено упорядочивание и разбиения, приводящие матрицу к виду -уровневой верхней квазитреугольной матрицы типа вложенных сечений. Обозначим эту мелко блочную матрицу A . Для этой матрицы был построен разреженный блочно-диагональный ортонормированный базис P . Разреженный базис P является мелко блочной матрицей, строчный и столбцовый размеры каждого мелкого блока равны s и совпадают с порядком мелкого блока матрицы A .

Матрица P представляет собой блочно-диагональную матрицу вида

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P_l \end{bmatrix},$$

где l — число крупных блоков в столбцовом разбиении матрицы A . Очевидно, что матрица C такая, что

$$C = AP,$$

также как и A , представляет собой мелко блочную матрицу с блоками порядка s . Кроме того, матрица C является также -уровневой верхней квазитреугольной матрицей типа вложенных сечений, и число мелко блочных столбцов в ней есть полное число мелко блочных столбцов в базисе P .

Эксперименты по вычислению разреженного QR разложения проводились для построенной таким образом матрицы C . В частности, если число столбцов в базисе P много меньше порядка матрицы A , то в основных строчных подматрицах разреженного QR разложения число столбцов много меньше числа строк, что оправдывает использование расширенного разреженного QR разложения в основных вычислениях. Кроме того, каждый блок P_j базиса обладает внутренней разреженностью, а потому результат произведения также есть разреженная мелко блочная матрица.

Однопроцессорное тестирование алгоритма проводилось на самом современном 18-ядерном процессоре Intel Xeon E5-2699v3 с архитектурой Haswell под управлением CentOS 6.6. Для тестирования алгоритма была построена матрица с числом строк около 1,5 млн. и порядком мелкого блока $s = 8$ и количеством столбцов около 0,1 млн.

Тестовое приложение компилировалось с помощью оптимизирующего компилятора ICC-15.0.3. В табл. 1 и 2 представлены времена работы алгоритма для матрицы с оди-

нарной и двойной точностью соответственно для различных наборов векторных инструкций и количества потоков.

Таблица 1

Время работы алгоритма с числами одинарной точности (с)

arch\threads	1	2	4	8	12	16	18
no-vec	2,197	1,111	0,609	0,356	0,254	0,197	0,178
SSE	1,122	0,570	0,312	0,184	0,131	0,104	0,092
AVX	0,887	0,453	0,245	0,143	0,103	0,082	0,076
AVX2	0,711	0,367	0,196	0,119	0,086	0,068	0,062

Таблица 2

Время работы алгоритма с числами двойной точности (с)

arch\threads	1	2	4	8	12	16	18
no-vec	2,447	1,235	0,677	0,386	0,276	0,216	0,198
SSE	1,985	1,010	0,555	0,316	0,224	0,176	0,162
AVX	1,466	0,743	0,399	0,231	0,165	0,134	0,120
AVX2	1,043	0,528	0,282	0,166	0,120	0,096	0,090

Из результатов видно, что использование самых современных векторных инструкций позволяет получить ускорение до 3 раз по сравнению с оптимизирующим компилятором ICC. Ускорение по сравнению с бесплатным компилятором GCC получается еще более значительным. Использование всех 18 ядер процессора ускоряет работу алгоритма в обоих случаях в более чем 11 раз. На рис. 5 изображен профиль загрузки потоков в тестовом приложении, полученном с помощью программы Intel VTune Amplifier, оранжевым цветом отмечены регионы синхронизации потоков. Первая оранжевая область на временной линии отвечает окончанию вычисления независимых QR разложений для

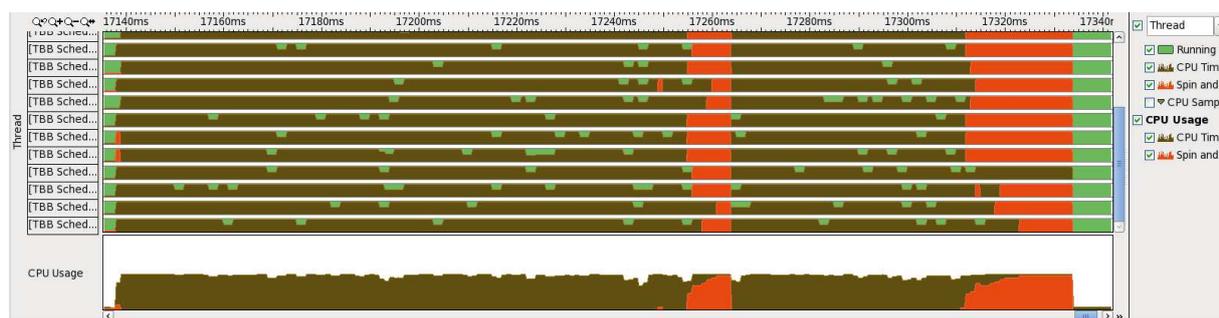


Рис. 5. Профиль загрузки потоков в тестовом приложении

крупных блочных строк, а вторая — окончанию обработки зависимых вычислений по дереву. Видно, что при обработке зависимых блоков все еще остается значительный дисбаланс загрузки ядер, что не позволяет вплотную приблизиться к линейной масштабируемости вычислений. В дальнейшем планируется уделить больше внимания этим ме-

стам в алгоритме. Таким образом, использование обоих механизмов распараллеливания в современных процессорах позволяет достичь ускорения в более чем 30 раз.

Тестирование в гибридном параллельной MPI+threads+SIMD режиме проводилось на суперкомпьютере Ломоносов-2, каждый узел которого содержит 10-ти ядерный процессор Intel Xeon E5-2680v2 с архитектурой Ivy Bridge, процессоры поддерживают технологию AVX. Для тестирования алгоритма была построена матрица с числом строк равным порядка 4,7 млн., порядком мелкого блока $s = 8$ и количеством столбцов около 0,6 млн. Результаты экспериментов представлены в табл. 3 и 4, каждый MPI процесс использовал все 10 ядер процессора в многонитевом режиме с использованием технологии AVX.

Таблица 3

Время работы алгоритма с числами одинарной точности (с)

Нпроц	1	2	4	8	16	32
Время	0,160	0,086	0,035	0,022	0,015	0,008

Таблица 4

Время работы алгоритма с числами двойной точности (с)

Нпроц	1	2	4	8	16	32
Время	0,240	0,125	0,064	0,035	0,022	0,012

Заключение

В работе представлена реализация на гибридной параллельной MPI+threads+SIMD архитектуре параллельного алгоритма вычисления QR разложения многоуровневой разреженной верхней квазитреугольной матрицы со структурой разреженности типа вложенных сечений. Результаты численных экспериментов с предложенным алгоритмом для тестовых задач на гибридной параллельной MPI+threads+SIMD архитектуре показывают высокую эффективность предложенных алгоритмов: ускорение до 3 раз от использования векторных инструкций AVX2, ускорение до 11 раз при использовании 18 ядер процессора, ускорение до 20 раз при использовании 32 процессоров. Результаты также показывают, что float вычисления по сравнению с double кроме двукратной экономии памяти дают также ускорение вычислений в 1,5 раза. Результаты работы планируется использовать при реализации массивно-параллельных алгоритмов решения СЛАУ на основе композиции подпространств, порождаемых разреженными базисами. Также планируется развитие алгоритмов в направлении использования ускорителей типа GPGPU.

Литература

1. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа: учеб. пособие для студ. вузов. М.: Издательский центр «Академия», 2007. 320 с.
2. Харченко С.А. Параллельный алгоритм разреженного QR разложения для прямоугольных верхних квазитреугольных матриц со структурой типа вложенных сечений // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16. С. 566–577.

3. Davis T.A. Algorithm 915: SuiteSparseQR, a multifrontal multithreaded sparse QR factorization package // ACM Trans. Math. Softw. Dec. 2011 Vol. 38, No. 1 P. 8:1–8:22.
4. Yeralan S.N., Davis T.A., Ranka S. Algorithm 9xx: Sparse QR Factorization on the GPU // ACM Transactions on Mathematical Software. Jan. 2015. Vol. 1, No. 1, Article 1. P. 1–28.
5. Rotella F., Zambettakis I. Block Householder transformation for parallel QR factorization // Appl. Math. Letters. Vol. 12, I. 4. 1999. P. 29–34.
6. Li N., Saad Y. MIQR: A multilevel incomplete QR preconditioner for large sparse least-squares problems // SIAM. J. Matrix Anal. Appl. 28(2). 2006. P. 524–550.
7. George A., Liu J.W. Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems. Prentice Hall, 1981. 324 p.
8. Андреев А.Е., Егунов В.А., Насонов А.А., Новокшенов А.А. Применение векторных инструкций в алгоритмах блочных операций линейной алгебры // Известия ВолгГТУ. Серия: Актуальные проблемы управления, вычислительной техники и информатики в технических системах. 2014. № 12 (139). С. 5–11.

Харченко Сергей Александрович, инженер, ООО «ТЕСИС» (Москва, Российская Федерация), skh@tesis.com.ru.

Ющенко Алексей Александрович, инженер, ООО «ТЕСИС» (Москва, Российская Федерация), ay@tesis.com.ru.

Поступила в редакцию 16 декабря 2015 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series “Computational Mathematics and Software Engineering”
2016, vol. 5, no. 2, pp. 30–42*

DOI: 10.14529/cmse160203

PARALLEL IMPLEMENTATION OF THE SPARSE QR DECOMPOSITION FOR RECTANGULAR UPPER QUASI TRIANGULAR MATRIX WITH ND-TYPE SPARSITY

S.A. Kharchenko, LLC «TESIS», Moscow, Russian Federation

A.A. Yushchenko, LLC «TESIS», Moscow, Russian Federation

The paper considers parallel MPI+threads+SIMD implementation of the algorithm for computing sparse QR decomposition of a specially ordered rectangular matrix. Decomposition is based on block sparse Householder transformations. The algorithm starts with independent parallel QR decompositions for sets of matrix rows; and then, according to the computations tree, the QR decomposition is performed for matrices, combined with elements of R factors of rows decompositions. The results of numerical experiments for test problems show efficiency of the parallel implementation. The algorithm can also be efficiently implemented on heterogeneous cluster architectures with GPGPU accelerators.

Keywords: sparse rectangular matrix, upper quasi triangular matrix, nested dissection, QR decomposition, Householder transformations, MPI, multithreading, SIMD.

FOR CITATION

Kharchenko S.A., Yushchenko A.A. Parallel Implementation of the Sparse QR Decomposition for Rectangular Upper Quasi Triangular Matrix with ND-Type Sparsity. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2016. vol. 5, no. 2. pp. 30–42. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160203.

References

1. Tyrtysnikov E. E. *Metody chislennogo analiza* [Methods of Numerical Analysis]. Akademiya, Moscow, 2007. 320 p. (in Russian)
2. Kharchenko S.A. Parallel'nyy algoritm razrezhenogo QR razlozheniya dlya pryamougol'nykh verkhnikh kvazitреugol'nykh matrits so strukturoy tipa vlozhennykh secheniy [A Parallel Algorithm for the Sparse QR Decomposition of a Rectangular Upper Quasi-Triangular Matrix with ND-Type Sparsity]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Numerical Methods and Programming]. 2015. vol. 16. pp. 566–577. (in Russian)
3. Davis T.A. Algorithm 915: SuiteSparseQR, a Multifrontal Multithreaded Sparse QR Factorization Package. *ACM Trans. Math. Softw.* Dec. 2011. vol. 38, no. 1. pp. 8:1–8:22.
4. Yeralan S.N., Davis T.A., Ranka S. Algorithm 9xx: Sparse QR Factorization on the GPU. *ACM Transactions on Mathematical Software*. Jan. 2015. vol. 1, no. 1, Article 1. pp. 1–28.
5. Rotella F., Zambettakis I. Block Householder Transformation for Parallel QR Factorization. *Appl. Math. Letters*. 1999. vol. 12, i. 4. pp. 29–34.
6. Li N., Saad Y. MIQR: A Multilevel Incomplete QR Preconditioner for Large Sparse Least-Squares Problems. *SIAM. J. Matrix Anal. Appl.* 2006. vol. 28(2). pp. 524–550.
7. George A., Liu J. W. *Computer Solution of Large Sparse Positive Definite Systems*. Prentice Hall. 1981. 324 p.
8. Andreev A.E., Egunov V.A., Nasonov A.A., Novokshenov A.A. Primenenie vektornykh instruktsiy v algoritmakh blochnykh operatsiy lineynoy algebrы [Application of vector instructions in algorithms of block operations of linear algebra]. *Izvestiya VolgGTU. Seriya: Aktual'nye problemy upravleniya, vychislitel'noy tekhniki i informatiki v tekhnicheskikh sistemakh* [VSTU News: “Actual Problems of Control, Computers and Informatics in Technical Systems”]. Volgograd. 2014. vol. 39(12). pp. 5–11. (in Russian)

Received December 16, 2015.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ С НЕИЗВЕСТНЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Н.М. Япарова

В статье рассмотрена обратная задача для нелинейного параболического уравнения с неизвестными начальными условиями. Для решения обратной задачи предложен метод дискретной регуляризации, основанный на использовании конечно-разностных уравнений и применении регуляризирующих функционалов. Построенная вычислительная схема позволяет одновременно найти численное решение внутри рассматриваемой области и неизвестную граничную функцию. В статье проведено исследование устойчивости вычислительной схемы. Выявлено влияние величин шагов дискретизации и погрешности исходных данных на устойчивость численных решений. Предложенная схема послужила основой для разработки численного метода и проведения вычислительного эксперимента. Результаты эксперимента для серии тестовых функций также представлены в данной работе и свидетельствуют о достаточной эффективности предложенного метода дискретной регуляризации.

Ключевые слова: обратные задачи, численный метод, метод регуляризации, оценка погрешности, вычислительная схема

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Япарова Н.М. Численный метод решения обратной задачи с неизвестными начальными условиями для нелинейного параболического уравнения // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 2. С. 43–58. DOI: 10.14529/cmse160204.

Введение

Исследования многих процессов тепло- и массопереноса приводят к формированию математических моделей, представленных нелинейными параболическими уравнениями с граничными условиями, известными на части границы. В этих задачах требуется найти неизвестную функцию, удовлетворяющую имеющимся уравнениям внутри рассматриваемой области, а также граничным условиям. Примеры подобного рода задач можно найти в работах [1–6]. Один из подходов, позволяющий найти требуемые функции, заключается в решении обратных граничных задач. При этом сначала на оставшейся части границы восстанавливают граничную функцию, а уже затем, используя полученные результаты, находят решение поставленной задачи во внутренних точках. Исследованиям в этой области посвящены, например, работы [7–13]. Другое динамично развивающееся направление решения задач тепло- и массопереноса связано с разработкой и исследованием численных методов, основанных на использовании конечно-разностных и дифференциально-разностных схем. Различные методы, относящиеся к этому направлению, представлены, например, в работах [15–19]. Общей чертой существующих подходов является то, все эти методы разрабатываются с учетом известных начальных условий. С другой стороны, протекание многих процессов тепло- и массообмена связано с ситуацией, когда осуществить измерение во всем теле требуемой температурной или концентрационной функции не представляется возможным. Это приводит

к возникновению математических моделей с неизвестными начальными условиями. Один из путей решения данной проблемы заключается, например, во введении фиктивных начальных условий [1–2, 14], что неизбежно отражается на точности получаемых решений.

В данном исследовании полагают, что начальные условия неизвестны исследователям и для построения численного решения обратной граничной задачи с неизвестными начальными условиями предлагают метод дискретной регуляризации, основанный на использовании конечно-разностных схем. Основная идея метода заключается в том, что, в отличие от существующих подходов, где вычисление требуемой функции во внутренних точках рассматриваемой области осуществляется по переменной, характеризующей время, мы находим неизвестную функцию относительно пространственной переменной. Такой подход позволяет значительно уменьшить влияние неизвестных начальных условий на результаты численного решения задач с неизвестными начальными условиями. Подобный подход был рассмотрен в работах [20–21] для линейных параболических уравнений.

Статья имеет следующую структуру. В первом разделе приведена постановка задачи, а также дополнительные свойства и ограничения на рассматриваемый класс функций. Во втором разделе предложена вычислительная схема метода дискретной регуляризации. Третий и четвертый разделы посвящены исследованию устойчивости основной вычислительной схемы метода. В третьем разделе установлена зависимость погрешности общей вычислительной схемы от величин шагов дискретизации. В четвертом разделе исследована локальная устойчивость метода при соответствующем выборе соотношения шагов дискретизации и параметра регуляризации, и получены некоторые оценки погрешности численного решения рассматриваемой задачи. В пятой части статьи приведены результаты вычислительного эксперимента, основными целями которого являлись проверка принципиальной возможности построения численного решения задачи, устойчивого в некоторой подобласти и получение экспериментальных оценок погрешности метода. В заключении сформулированы итоговые выводы, полученные в результате проведенных исследований, а также указаны основные направления дальнейших исследований.

1. Постановка задачи

Рассмотрим цилиндрическую область $\Omega \subset R^3$ и $\Omega = S_\ell \times R$, где S_ℓ — кольцо, ограниченное окружностями $\partial_1 S_\ell$ и $\partial_2 S_\ell$ с радиусами ℓ_0 и ℓ соответственно. Множество Ω ограничено поверхностями $\partial_1 \Omega = \partial_1 S_\ell \times R$ и $\partial_2 \Omega = \partial_2 S_\ell \times R$, а $Q = S_\ell \times (0, T)$. Рассмотрим уравнение

$$c(u)\rho(u)u_t = \operatorname{div}(\lambda(u)\nabla u), \quad (x, y, z, t) \in \Omega_T, \quad (1)$$

где $t \in (0, T)$, $z \in R$, $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, а функция $u(x, y, z, t)$ - осесимметрична и принимает постоянные значения вдоль любой прямой, параллельной оси Oz . Дополнительно известны граничные условия:

$$u|_{\partial_1 \Omega \times [0, T]} = p(t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial_1 \Omega \times [0, T]} = q(t), \quad (2)$$

где вектор n является внешней нормалью к $\partial_1 \Omega$, при $\ell_0 \rightarrow 0$. Коэффициентные функции $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ в (1) положительны, дважды непрерывно дифференцируемы в со-

ответствующей области. Известно, что при некоторых $p(t) = p_0(t)$ и $g(t) = g_0(t)$ существует функция u_0 , удовлетворяющая (1), (2) но вместо точных значений $p_0(t)$ и $q_0(t)$ известны некоторые приближения p_δ , q_δ и некоторый уровень погрешности δ такие, что $\|p_0(t) - p_\delta\|_{C([0,T])} \leq \delta$ и $\|q_0(t) - q_\delta\|_{C([0,T])} \leq \delta$. В данной задаче необходимо найти $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющую (1), (2) и граничное значение функции

$$u|_{\partial_2 \Omega \times (0,T)} = \phi(t) \quad (3)$$

Из результатов, представленных в работе [16, 23] следует существование функции $u_\delta^\alpha \in C^{2,1}(D_T) \cap C(\overline{D_T})$, удовлетворяющей в некоторой области $D_T \subset \Omega_T$ соотношениям (1), (2), а также $\phi_\delta^\alpha \in H^{2,1+\beta}(0,T)$, где $\beta \in (0,1)$, удовлетворяющей (3).

Из результатов измерений величин $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ в используемом материале известно, что зависимость этих коэффициентов от значений функции $u(x, y, z, t)$ допускает представление в виде полиномов. На практике наиболее часто используют линейную зависимость. При этом точность такого представления такова, что погрешность полиномиальных аппроксимаций не оказывает значительного влияния на величину погрешности определения требуемой функции $u(x, y, z, t)$ в исследуемом теле. Учитывая свойства $c(u), \rho(u), \lambda(u)$, для вычисления этих величин используем разложение по формуле Тейлора в окрестности точки $u^* = u(0,0,0,0)$:

$$\begin{aligned} c(u) &= c(u^*) + c'(u^*)(u(x, y, z, t) - u^*), & \rho(u) &= \rho(u^*) + \rho'(u^*)(u(x, y, z, t) - u^*), \\ \lambda(u) &= \lambda(u^*) + \lambda'(u^*)(u(x, y, z, t) - u^*), \end{aligned}$$

где $\sqrt{x^2 + y^2} \leq \ell_0$, а значения $c(u^*), \rho(u^*), \lambda(u^*), c'(u^*), \rho'(u^*), \lambda'(u^*)$ получены из результатов измерений соответствующих величин в материале, используемом в исследуемом теле. Тогда полагаем

$$\begin{aligned} k_c &= c'(u^*), & k_\rho &= \rho'(u^*), & k_\lambda &= \lambda'(u^*), \\ c_0 &= c(u^*) - k_c u^*, & \rho_0 &= \rho(u^*) - k_\rho u^*, & \lambda_0 &= \lambda(u^*) - k_\lambda u^*. \end{aligned}$$

Получаем, что $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ определяются формулами

$$c(u) = c_0 + k_c u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda u.$$

Перейдем к цилиндрической системе координат, выполняя сдвиг по радиусу. Тогда область Q преобразуется в $Q_\ell = \{(r, t) : 0 < r < R, 0 < t < T\}$, где $R = \ell - \ell_0$, а уравнение (1) примет вид:

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda(u)r\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad (r, t) \in Q_\ell.$$

Раскрывая оператор $\frac{\partial}{\partial r}$, получаем следующее представление задачи (1), (2):

$$c(u)\rho(u)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\lambda(u)\frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in Q_\ell. \quad (4)$$

$$u(0, t) = p(t), \quad u_r(0, t) = q(t), \quad t \in [0, T], \quad (5)$$

где коэффициенты $c(u), \rho(u), \lambda(u)$ определим формулами

$$c(u) = c_0 + k_c u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda u. \quad (6)$$

Требуется по p_δ , q_δ и δ данным найти функцию $u_\delta^\alpha(r, t)$, являющуюся решением задачи (4)–(6) и определить граничную функцию $\phi_\delta^\alpha(t)$. Если из теплофизических характеристик процесса известно, что функция $u(r, t)$ достаточно гладкая, и мы можем полагать, что существуют константы Φ, β, R, C такие, что $\max |u(r, t)| \leq \Phi e^{\beta(r+t)}$ в каждой точке $(r, t) \in \overline{Q}_\ell$, а

$$\max \left\{ \max_{(r,t) \in \overline{Q}_\ell} |u_{tt}|, \max_{(r,t) \in \overline{Q}_\ell} |u_{rr}|, \max_{(r,t) \in \overline{Q}_\ell} |u_{rrrr}| \right\} \leq C, \quad (7)$$

то для решения задачи (4)–(6) используем метод дискретной регуляризации. Вычислительная схема метода представлена в следующем разделе.

2. Метод дискретной регуляризации

Рассмотрим конечно-разностную сетку G в области Q_ℓ ,

$$G = \left\{ \begin{array}{l} (r_i, t_j): r_i = (i-1)h, t_j = (j-1)\tau, \\ h = R/N; \tau = T/M; i = \overline{1, N+1}; j = \overline{1, M+1} \end{array} \right\},$$

где значение M не превосходит количества измерений, выполненных для $p(t)$ и $q(t)$.

Обозначим $u_{i,j} = u(r_i, t_j)$. Составим конечно-разностный аналог задачи (4)–(6). С этой целью используем конечно-разностное представление частных производных по r и по t в каждой точке G , предложенное в [22] и рассмотрим множество дискретных функций $V_h = \{v(r_i, t_j) = v_{i,j}\}$, заданных на G . Конечно-разностный аналог уравнения (4) имеет вид:

$$c_{i,j} \rho_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} = \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{v_{i+1,j} - v_{i,j}} \frac{(v_{i+1,j} - v_{i,j})^2}{h^2} + \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)h} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h} + \lambda_{i,j} \frac{(v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j})}{h^2}$$

В отличие от существующих методов, использующих данный шаблон, мы выразим из этого уравнения $v_{i+1,j}$, что позволит значительно уменьшить влияние неизвестных начальных условий на результаты численного решения. Получаем при $i = \overline{2, N}$ и $j = \overline{1, M}$

$$v_{i+1,j} = v_{i,j} + \frac{c_{i,j} \rho_{i,j} (i-1) h^2}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{\tau} + \frac{\lambda_{i,j} (i-1)}{\lambda_{i+1,j} (i-1) + \lambda_{i,j}} (v_{i,j} - v_{i-1,j}) \quad (8)$$

Граничные условия в конечно-разностной форме представлены следующим образом:

$$v_{1,j} = u_{1,j} = p_j \quad v_{2,j} = u_{1,j} + hq_j = p_j + hq_j \quad (9)$$

Непосредственное использование уравнения (8) не позволяет получать устойчивые решения задачи (4)–(6), более того, использование уравнения (8) невозможно при $j = M+1$. Поэтому для построения численного решения рассматриваемой задачи используем метод дискретной регуляризации. Суть метода заключается в том, что коэффициенты в уравнении (8) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= c_0 + k_c v_{i,j}, \quad \rho_{i,j} = \rho_0 + k_\rho v_{i,j}, \quad \lambda_{i,j} = \lambda_0 + k_\lambda v_{i,j}, \\ \lambda_{i+1,j} &= \lambda_0 + (k_\lambda - \alpha) v_{i,j} = \lambda_{i,j} - \alpha v_{i,j}, \end{aligned} \quad (10)$$

где α — некоторый параметр регуляризации и шаги дискретизации выбираются согласовано с уровнем погрешности, а для вычисления значений $v_{i,M+1}$ используется следующая схема:

$$v_{i+1,M+1} = v_{i,M+1} + \frac{(i-1)}{\lambda_{i+1,M+1}(i-1) + \lambda_{i,M+1}} \left(\frac{c_{i,M+1} \rho_{i,M+1} h^2}{\tau(1-\sigma)} (v_{i,M+1} - v_{i,M}) + \lambda_{i,M+1} (v_{i,M+1} - v_{i-1,M+1}) \right) + \frac{\sigma}{(1-\sigma)} \frac{1}{(i-1)h^2} \times \frac{(\lambda_{i+1,M}(i-1) + \lambda_{i,M})(v_{i+1,M} - v_{i,M}) - \lambda_{i,M}(i-1)(v_{i,M} - v_{i-1,M})}{\lambda_{i+1,M+1}(i-1) + \lambda_{i,M+1}}, \quad (11)$$

где $\sigma \in (0,1)$, а коэффициенты в уравнении (11) также вычисляются согласно формулам (10) и шаги дискретизации также согласуются.

3. Алгоритмические особенности метода дискретной регуляризации

Исследуем устойчивость вычислительной схемы (8)–(10). С этой целью, мы используем подход, принятый в теории регуляризации, см., например, [24]. Введем в рассмотрение функции w_i при всех $i = \overline{1, N}$, определяемые формулой:

$$w_{i+1} = \max_{j=1, M+1} |v_{i+1,j} - v_{i,j}|,$$

где $v_{i,j}$ удовлетворяет (8)–(10) и определим условия, при соблюдении которых будет иметь место неравенство $w_{N+1} \leq K\delta$, где K — некоторая константа.

Так как значение M не превосходит количества измерений, выполненных исследователями для функций $p(t)$ и $q(t)$, то мы полагаем, что M и, следовательно, величина шага дискретизации τ по переменной, характеризующей время, нам известна. Выберем значения N , характеризующей шаг дискретизации по пространственной переменной и параметр регуляризации α так, чтобы при известном значении M имело место требуемое неравенство.

Сначала оценим α и коэффициенты в (8). Обозначим $\mu = \max_{i,j} \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i,j}i - \alpha(i-1)|v_{i,j}|}$, и $\eta = \max_{i,j} \frac{c_{i,j} \rho_{i,j} (i-1) h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}) \tau}$. Полагаем α таким, что при всех $i = \overline{1, N+1}$ и $j = \overline{1, M+1}$ выполнено

$$\alpha < \min_{i,j} \frac{\lambda_{i,j}}{(i-1)|v_{i,j}|}. \quad (12)$$

Имеем:

$$1 - \frac{1}{N+1} < \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i,j}i - \alpha(i-1)|v_{i,j}|} < 1, \quad (13)$$

тогда $\mu < 1$. С учетом (10) получаем следующую оценку:

$$w_{i+1} \leq \eta \max_{j=1, M} |v_{i,j+1} - v_{i,j}| + \mu w_i.$$

Так как нам не известны начальные условия, то мы можем учитывать только ограниченность функции $u(r, t)$. Имеем:

$$\max_{j=1, M} |v_{i, j+1} - v_{i, j}| \leq 2\Phi e^{R+T}.$$

Полагая $S = \max_{j=1, M+1} |q_j|$, учитывая (9) и выбирая $N > R + 1$, получаем

$$w_2 = \max_{j=1, M+1} |v_{2, j} - v_{1, j}| \leq \max_{j=1, M+1} |q_j h| \leq h(S + \delta) \leq S + \delta,$$

$$w_{i+1} \leq 2\Phi e^{R+T} (\eta + \mu\eta + \mu^2\eta + \dots + \eta\mu^{i-2}) + (S + \delta)\mu^{i-1} < 2\Phi e^{R+T} \eta \frac{1}{1-\mu} + (S + \delta)\mu^{i-1},$$

при $i = \overline{3, N+1}$. Тогда

$$w_{N+1} \leq \eta 2\Phi e^{R+T} \frac{1}{1-\mu} + (S + \delta)\mu^{N-2}. \quad (14)$$

Из (10) следует, что имеет место оценка $\eta \leq \frac{h^2}{\tau} \max_{i=2, N+1, j=1, M} \frac{c_{i, j} \rho_{i, j}}{\alpha v_{i, j} (i-1)}$. Отсюда и того,

что $\alpha(i-1)v_{i, j} \leq \alpha(i-1)|v_{i, j}| < \lambda_{i, j}$ следует, что для получения устойчивого решения

необходимо выполнение условия $\frac{h^2}{\tau} < \max_{i=2, N+1, j=1, M} \frac{\alpha(i-1)v_{i, j}}{c_{i, j} \rho_{i, j}} < \min_{i=2, N+1, j=1, M} \frac{\lambda_{i, j}}{c_{i, j} \rho_{i, j}}$. Учитывая

эти особенности, получаем, что шаги дискретизации должны удовлетворять соотношению

$$\frac{h^2}{\tau} \leq \frac{1}{2} \Phi e^{-(R+T)} \delta \min_{i=2, N+1, j=1, M+1} \frac{\lambda_{i, j}}{c_{i, j} \rho_{i, j}}. \quad (15)$$

Тогда

$$w_{N+1} \leq \frac{\delta}{1-\mu} + (S + \delta)\mu^{N-2} \leq K\delta.$$

Принимая во внимание, что при предложенном подходе $\mu < 1$, получаем, что для выполнения последнего неравенства необходимо, чтобы величина N , характеризующая количество частей разбиения отрезка $[0, R]$, удовлетворяла соотношению:

$$N > 2 + \log_{\mu} \left(\left(K - \frac{1}{1-\mu} \right) \frac{\delta}{S + \delta} \right), \quad (16)$$

где $\left(K - \frac{1}{1-\mu} \right) \frac{\delta}{S + \delta} < 1$. Последнее достигается, если положить $K = 1 + \frac{1}{1-\mu}$.

Таким образом, соотношение $w_{N+1} \leq K\delta$ имеет место при известном значении M , если выполнено условие (12), (15) и (16).

4. Локальная устойчивость метода дискретной регуляризации

Выполним оценку погрешностей конечномерных аппроксимаций при известном M , выбранном из условия (16) значения N и α , удовлетворяющем полагая, что коэффициентные погрешности не оказывают существенного влияния на суммарную погрешность метода.

Используя конечномерные аппроксимации частных производных, получаем, что при $i = \overline{2, N+1}$ и $j = \overline{1, M}$ имеет место следующее представление:

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} = & u_{i,j} + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} (u_{i,j} - u_{i-1,j}) + \\ & + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(\tau) + 2 \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \\ & + \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h^2}{(u_{i+1,j} - u_{i,j})(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})} (\underline{Q}(h))^2 + \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h^2) \end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функции s_i , определяемые формулой:

$$s_i = \max_{j=\overline{1, M+1}} |v_{i,j} - u_{i,j}|, \quad i = \overline{1, N+1}.$$

где $v_{i,j}$ удовлетворяет (8)–(10), а $u_{i,j}$ является решением задачи (4)–(6). Для исследования устойчивости необходимо оценить величину s_{N+1} при выбранных значениях M , N и α . Имеем:

$$\begin{aligned} s_{i+1} \leq & s_i + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})\tau} 2\Phi e^{(R+T)} + 2 \frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} s_{i,j} + \\ & + \frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(\tau) + 2 \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \frac{(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j})(i-1)h^2}{(u_{i+1,j} - u_{i,j})(\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j})} (\underline{Q}(h))^2 + \\ & + \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h) + \frac{\lambda_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \underline{Q}(h^2) \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим слагаемые в (17). С учетом (14) и (15) имеем:

$$\frac{c_{i,j}\rho_{i,j}(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}\tau} 2\Phi e^{(R+T)} \leq \delta \quad (18)$$

Из соотношения (11), определения μ и того, что $\alpha |v_{i,j}|(i-1) < \lambda_{i,j}$, следует

$$\frac{|\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}|(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{\alpha |v_{i,j}|(i-1)h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} < \frac{\lambda_{i,j}h}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} < \mu h \quad (19)$$

Из (6) следует, что $\frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} = k_\lambda$. С другой стороны, из (10) следует, что

$\lambda_{i+1,j} = \lambda_{i,j} - \alpha v_{i,j}$, тогда, полагая $\lambda^* = \min_{i=\overline{1, N+1}, j=\overline{1, M+1}} \lambda_{i,j}$ и учитывая (12) и (19), имеем:

$$\left| \frac{\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}}{u_{i+1,j} - u_{i,j}} \right| \frac{(i-1)h^2}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq k_\lambda \frac{h^2}{\lambda_{i,j}} \leq \frac{k_\lambda h^2}{\lambda^*}, \quad (20)$$

$$\frac{\lambda_{i,j}(i-1)}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \mu \leq 1, \quad \frac{\lambda_{i,j}}{\lambda_{i+1,j}(i-1) + \lambda_{i,j}} \leq \frac{\mu}{i-1} \leq \mu \leq 1. \quad (21)$$

Из соотношений (7), (17)–(21) следует, что

$$s_{i+1} \leq (1 + 2\mu)s_i + \delta + \left(\eta C \tau^2 + 3\mu C h^2 + \left(\frac{k_\lambda}{\lambda^*} C^2 + \mu C \right) h^4 \right), \quad i = \overline{2, N}. \quad (22)$$

Полагаем $\Psi = \eta C \tau^2 + 3\mu Ch^2 + \left(\frac{k_\lambda}{\lambda^*} C^2 + \mu C\right) h^4$. Из того, что $s_2 = \max_{j=1, M+1} |v_{2,j} - u_{2,j}| \leq \max_{j=1, M+1} |u_{1,j} + hq_j - (u_{1,j}^0 + hq_j^0)| + Ch \leq \delta + h\delta + Ch$, где $u_{1,j}^0, q_j^0$ — точные значения соответствующих функций, а $u_{1,j}, q_j$ — приближенные значения, следует, что соотношение (22) имеет вид

$$s_{i+1} \leq (1 + 2\mu)s_i + \delta + \Psi \leq (1 + 2\mu)^{i-1} s_2 + \left(\sum_{k=0}^{i-2} (1 + 2\mu)^k\right) (\delta + \Psi).$$

Тогда при $i = \overline{2, N}$ выполнено

$$s_{N+1} \leq (1 + 2\mu)^{N-1} \left(\delta + h\delta + Ch + \frac{1}{4\mu^2} (\delta + \Psi) \right). \quad (23)$$

Из соотношений (15), (16), (23) следует, что устойчивость метода зависит от величины шагов дискретизации и для получения приближенного решения необходимо выбирать достаточно небольшие значения N .

5. Вычислительный эксперимент

Основная цель вычислительного эксперимента заключалась в проверке принципиальной возможности построения численного решения во всей области рассматриваемой обратной нелинейной задачи методом дискретной регуляризации и получение соответствующей граничной функции (4). Кроме того, для получения экспериментальных оценок погрешностей были вычислены величины отклонения найденных граничных функций от тестовых значений. Основные этапы эксперимента заключаются в следующем.

На начальном этапе эксперимента находим решение прямой задачи:

$$c(u)\rho(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \lambda(u)}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r} \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda(u) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \quad (r, t) \in Q_t. \quad (24)$$

$$u(0, t) = p(t), \quad u(R, t) = \phi(t), \quad t \in [0, T], \quad (25)$$

$$u(r, 0) = f(r), \quad r \in [0, R] \quad (26)$$

где коэффициенты определены формулами:

$$c(u) = c_0 + k_c u, \quad \rho(u) = \rho_0 + k_\rho u, \quad \lambda(u) = \lambda_0 + k_\lambda u, \quad (27)$$

Далее, определяем функцию $q(t)$ по формуле $q(t_j) = \frac{u_{2,j} - u_{1,j}}{h}$, а затем находим $p_\delta(t_j), q_\delta(t_j)$ как значения случайных величин, равномерно распределенных на соответствующих интервалах $[p(t_j) - \delta, p(t_j) + \delta]$ и $[q(t_j) - \delta, q(t_j) + \delta]$.

На следующем этапе с помощью предложенной вычислительной схемы получаем численное решение задачи (4)–(6) для p_δ, q_δ , как внутри области, так и на границе.

Результаты численного решения задачи (4)–(6) для некоторых тестовых функций представлены на нижеприведенных рисунках и табл.1. Так как исходное уравнение (1) не содержит дополнительной функции источника, то в качестве тестовых функций использовались функции, представимые в экспоненциальном виде. Все рисунки имеют одинаковую структуру и используют одинаковые обозначения. На левых рисунках изображены графики граничной функции. Обозначение u_0 соответствует графику тестовой

функции, а u_δ^α — численному решению задачи идентификации граничной функции. Многомерные поверхности, представленные на правых рисунках, иллюстрируют решения прямой задачи (24)–(27) и обратной задачи (4)–(6), полученные во всей области Q_t . Поверхности, имеющие название “Exact solution” соответствуют численному решению прямой задачи (24)–(27), а поверхности “Regularized solution” — численному решению задачи (4)–(6).

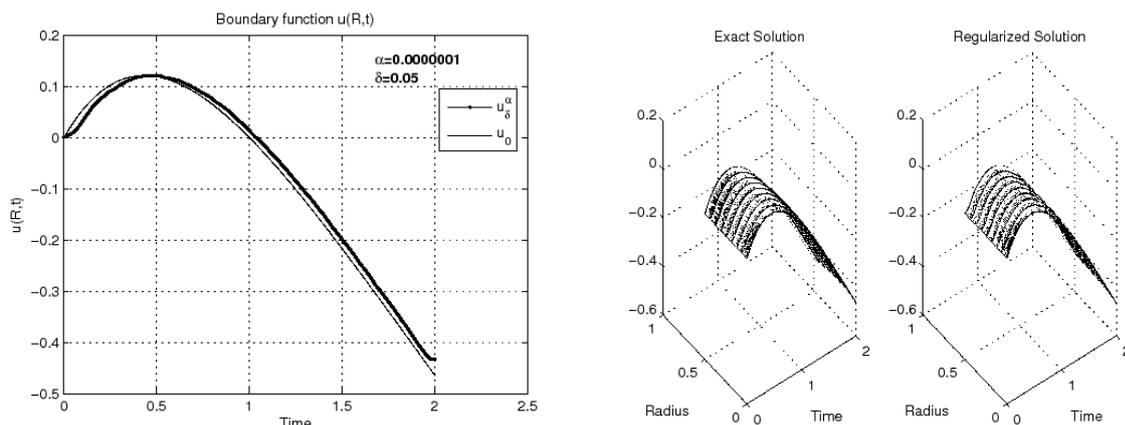


Рис. 1. Результаты численного решения нелинейной обратной граничной задачи для тестовых функций $u(0,t) = u(R,t) = te^{-t}$

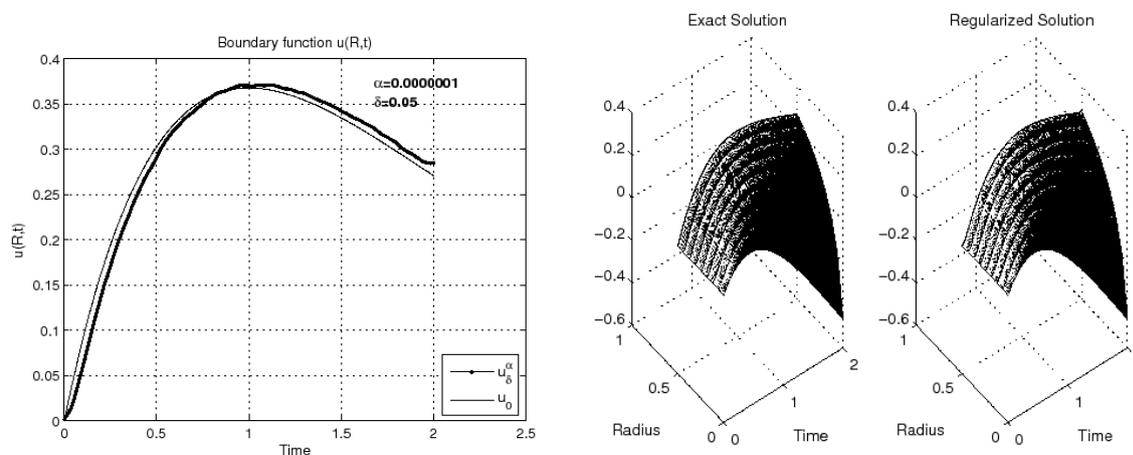


Рис. 2. Результаты численного решения нелинейной обратной граничной задачи для тестовых функций $u(0,t) = t(e^{-t} - e^{-1})$, $u(R,t) = te^{-t}$

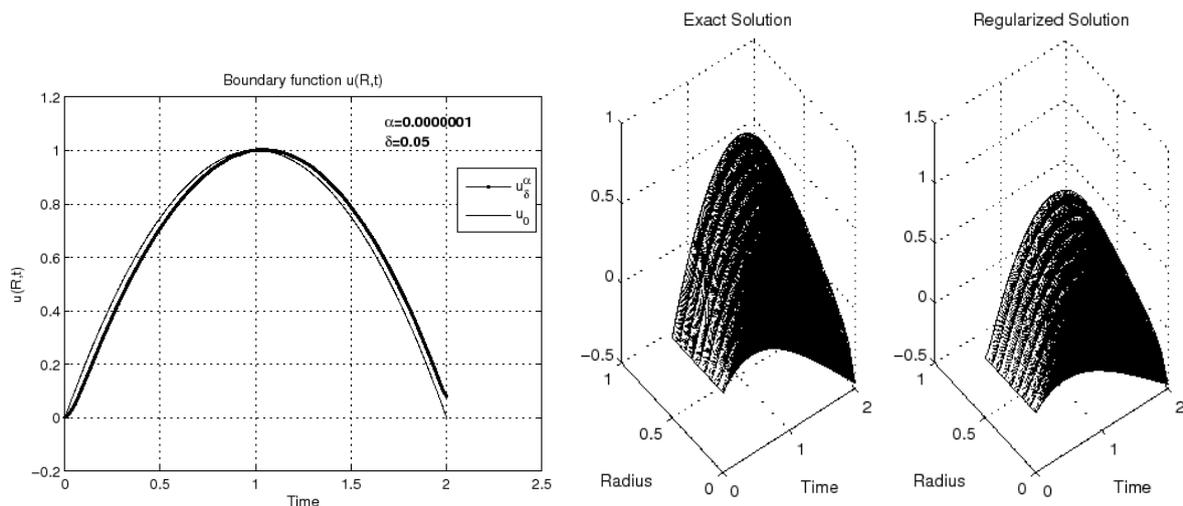


Рис. 3. Результаты численного решения нелинейной обратной граничной задачи для тестовых функций $u(0,t) = te^{-t}$, $u(R,t) = 1 - (t-1)^2$

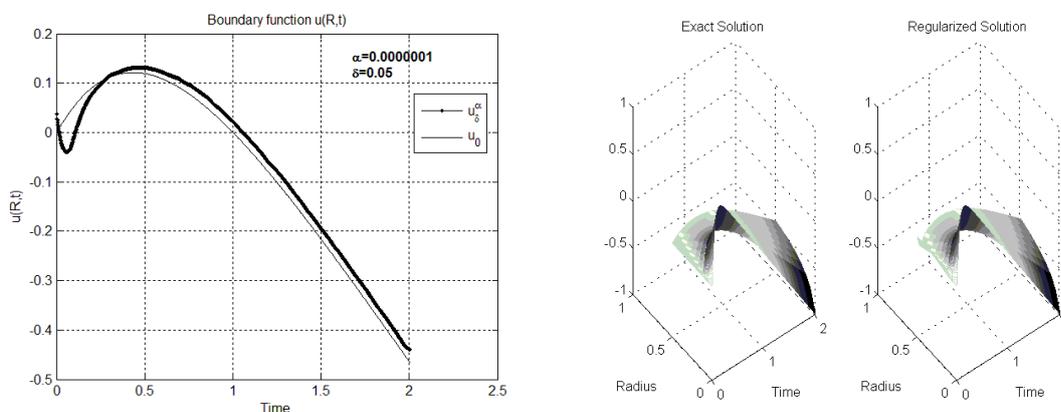


Рис. 4. Результаты численного решения нелинейной обратной граничной задачи для тестовых функций $u(0,t) = \frac{1-e^{-t/\gamma}}{1-e^{-1/\gamma}} - t$, $u(R,t) = te^{-t}$

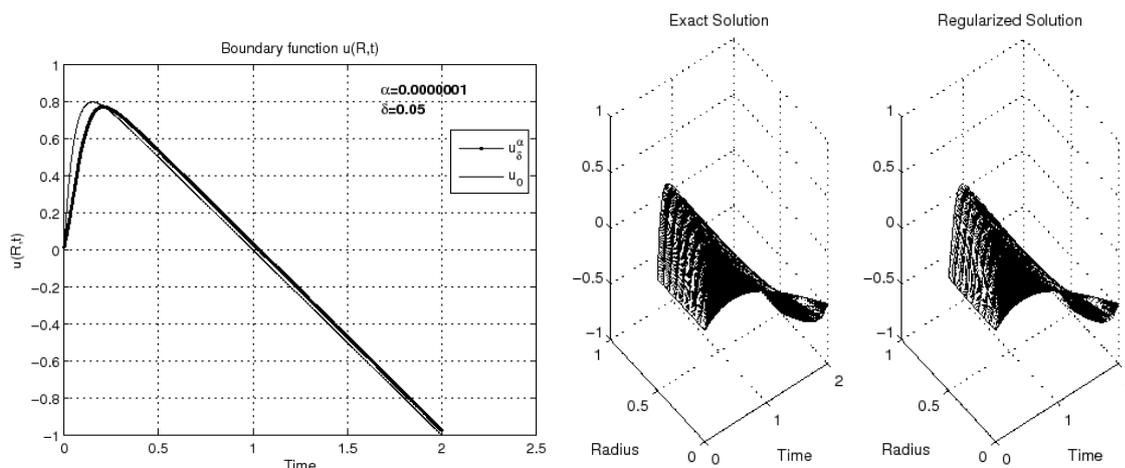


Рис. 5. Результаты численного решения нелинейной обратной граничной задачи для тестовых функций $u(0,t) = te^{-t}$, $u(R,t) = \frac{1-e^{-t/\gamma}}{1-e^{-1/\gamma}} - t$, где $\gamma > 0$

С целью получения экспериментальных оценок погрешностей были найдены величины $\Delta_\delta(N) = \|u_0 - u_\delta^\alpha\|_{C(0,T)}$, где u_0 — тестовое значение функции $u(R,t)$, а u_δ^α — численное решение задачи (4)–(6). Для краткости изложения в табл. 1 приведены некоторые средние значения $\Delta_\delta(N)$, полученные при $\delta = 0,05$ и соответствующей реализации условий (5) в тестовых функциях.

Таблица 1

Экспериментальные оценки погрешности численных решений

Тестовые функции	N	$\Delta_\delta(N)$
$u(0,t) = te^{-t}$ $u(R,t) = te^{-t}$	5	0,0377
	6	0,0346
	7	0,0282
	8	0,0252
	9	$0,5 \cdot 10^{81}$
	10	$5 \cdot 10^{208}$
$u(0,t) = \frac{1-e^{-t/\gamma}}{1-e^{-1/\gamma}} - t, \gamma = 0.05$ $u(R,t) = te^{-t},$	5	0,1084
	6	0,1026
	7	0,0805
	8	0,0765
	9	$0,5 \cdot 10^5$
	10	$2 \cdot 10^{133}$
$u(0,t) = te^{-t},$ $u(R,t) = \frac{1-e^{-t/\gamma}}{1-e^{-1/\gamma}} - t, \gamma = 0.05$	5	0,2795
	6	0,2688
	7	0,2556
	8	0,2555
	9	$2 \cdot 10^{56}$
	10	$0,5 \cdot 10^{123}$

Результаты эксперимента свидетельствуют о том, что предложенный метод дискретной регуляризации позволяет с достаточной точностью определять неизвестную граничную функцию, а также находить требуемую функцию $u(r,t)$ во всей рассматриваемой области при условии согласования величин шагов дискретизации и параметра α .

Заключение

В статье рассмотрена обратная граничная задача для нелинейного параболического уравнения с неизвестными начальными условиями. Для численного решения задачи предложен метод дискретной регуляризации и проведено исследование устойчивости основной вычислительной схемы метода. С целью проверки эффективности предложенного метода и получения экспериментальных оценок погрешностей был проведен вычислительный эксперимент. Результаты эксперимента согласуются с полученными теоретическими оценками и свидетельствуют о том, что метод обладает свойством саморегуляризации. Предложенная вычислительная схема позволяет значительно уменьшить влия-

ние неизвестных начальных условий и, соответственно, получать численные решения в соответствующей подобласти с достаточной точностью. Результаты данного исследования могут быть использованы при решении прикладных задач, возникающих, например, в металлургии, в метрологии, а также при исследовании наноструктур.

Для уточнения оценок погрешностей предложенного метода в дальнейшем планируется провести исследование устойчивости полной вычислительной схемы и оценить влияния саморегуляризирующих свойств алгоритма на величину погрешностей численных решений.

Литература

1. Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена. М.: Машиностроение, 1988. 280 с.
2. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2009. – 784 с.
3. Прокудина Л.А., Вяткин Г.П. Самоорганизация возмущений в жидких пленках // Доклады Академии наук. 2011. Т. 439, № 4. С. 481–484.
4. Булгакова Г.Т., Кондратьева Н.Р. Аналитическая модель вертикального вытеснения нефти водой с учетом вязкостных, гравитационных и капиллярных // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2012. № 1. С. 208–213.
5. Шестаков А.Л. Методы теории автоматического управления в динамических измерениях. Министерство образования и науки Российской Федерации, Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2013. 257 с.
6. Мартинсон Л.К., Чигирева О.Ю. Температурное поле цилиндрического тела в режиме периодического разогрева // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки. 2015. № 3 (60). С. 88–98.
7. Dorofeev K.Y., Nikolaeva N.N., Titarenko V.N., Yagola A.G. New approaches to error estimation to Ill-posed problems with application to inverse problems of heat conductivity // Journal of Inverse and Ill-posed problems. 2002. Vol. 10. No 2. P.155–169.
8. Танана В.П. Об оценке погрешности метода решения одной обратной задачи для параболического уравнения // Сибирский журнал вычислительной математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 451–465.
9. Табаринцева Е.В. О решении граничной задачи для параболического уравнения методом вспомогательных граничных условий // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2011. №32 (249). С. 68–76.
10. Танана В.П., Гайнова И.А., Сидикова А.И. Об оценке погрешности приближенного решения одной переопределенной обратной задачи тепловой диагностики // Сибирский журнал индустриальной математики. 2012. Т. XV, № 1. С. 145–154.
11. Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Прямые и итерационные методы решения обратных и некорректных задач // Сибирские электронные математические известия. 2008. Т. 5. С. 595–608.

12. Zhang Y., Lukyanenko D.V., Yagola A.G. Using Lagrange principle for solving two-dimensional integral equation with a positive kernel // *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2015. DOI: 10.1080/17415977.2015.1077445.
13. Солодуша С.В., Япарова Н.М. Численное решение обратной граничной задачи теплопроводности с помощью уравнений Вольтерра I рода // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2015. Т. 18, № 3. С. 327–335.
14. Дрозин А.Д., Дудоров М.В., Роцин В.Е., Гамов П.А., Менихес Л.Д. Математическая модель образования кристаллических зародышей в переохлажденном расплаве эвтектического сплава // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*. 2012. № 11 (270). С. 66–77.
15. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. СПб.: Лань. 2009. 608 с.
16. Вабищевич П.Н. Монотонные разностные схемы для задач конвекции / диффузии // *Дифференциальные уравнения*. 1994 Т. 30, №3. С. 503–515.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд-во МГУ, 1999. 799 с.
18. Камонт З., Кропельницка К. Неявные разностные методы для эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2011. Т. 14, № 4. С. 361–379.
19. Глазырина О.В., Павлова М.Ф. Исследование сходимости метода конечных элементов для решения параболических уравнений с нелинейным нелокальным пространственным оператором // *Дифференциальные уравнения*. 2015. Т. 51, №7. С. 876.
20. Япарова Н.М. Численный метод решения некоторых обратных задач теплопроводности с неизвестными начальными условиями // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника*. 2015. Т. 15, № 2. С. 55–65.
21. Япарова Н.М. Метод решения некоторых многомерных обратных граничных задач параболического типа без начальных условий // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника*. 2015. Т. 15, № 2. С. 97–108.
22. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.
23. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. 1967. 736 с.
24. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. Изд-во МГУ, 1990. 115 с.

Япарова Наталья Михайловна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра прикладной математики, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), ddjy@math.susu.ac.ru

Поступила в редакцию 30 декабря 2015 г.

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING AN INVERSE PROBLEM FOR NONLINEAR PARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN INITIAL CONDITIONS

N.M. Yaparova, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The paper is devoted to the inverse problem for a nonlinear parabolic equation with unknown initial conditions. A computational scheme for solving this problem is proposed. This approach allows obtain the numerical solution in internal points of domain and the unknown boundary function. The proposed scheme is based on the using of finite-difference equations and regularization technique. We investigate the stability of computational method. We obtained the dependence of stability on the discretization steps and level error of the initial data. The proposed scheme proved the basis for development of numerical method and for the computational experiment. The experimental results are also presented in this paper, and confirm the effectiveness of the method.

Keywords inverse problem, numerical method, regularization method, error estimate, computational scheme.

FOR CITATION

Yaparova N.M. Numerical Method for Solving an Inverse Problem for Nonlinear Parabolic Equation with Unknown Initial Conditions. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2016. vol. 5, no. 2. pp. 43–58. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160204.

References

1. Alifanov O.M. *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse Heat Transfer Problems]. Moscow, Mashinostroenie, 1988. 280 p. (in Russian)
2. Samarskiy A.A., Vabishchevich P.N. *Vychislitel'naya teploperedacha* [Computational Heat Transfer]. Moscow, Editorial URSS, 2003. 784 p. (in Russian)
3. Prokudina L.A., Vyatkin G.P. Self-Organization of Perturbations in Fluid Films. *Doklady Akademii nauk* [Doklady Physics]. 2011. vol. 56, no. 8. pp. 444–447.
4. Bulgakova G.T., Kondrat'eva N.R. Analiticheskaya model' vertikal'nogo vytesneniya nefti vodoj s uchetom vyazkostnyh, gravitacionnyh i kapillyarnyh sil [Analytical Model of Vertical Oil-Water Displacement with the Account of Viscous, Capillary and Gravity Forces]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences]. 2012. no. 1. pp. 208–213. (in Russian)
5. Shestakov A.L. *Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya v dinamicheskikh izmereniyah* [The Methods of Control Theory in Dynamic Measurements]. Chelyabinsk, Publishing of the South Ural State University, 2013. 257 p. (in Russian)
6. Martinson L.K., Chigiryova O.Y. *Temperaturnoe pole cilindricheskogo tela v rezhime periodicheskogo razogreva* [Thermal Fields of a Cylindrical Body During Cyclic Heating].

- Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.EH. Baumana. Seriya: Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series: Natural Sciences]. 2015. no. 3(60). pp. 88–98. (in Russian)
7. Dorofeev, K.Y., Nikolaeva N.N., Titarenko V.N., Yagola A.G. New Approaches to Error Estimation to Ill-Posed Problems with Application to Inverse Problems of Heat Conductivity. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*. 2002. vol. 10, no. 2. pp. 155–169.
 8. Tanana V.P. An order-optimal method for solving an inverse problem for a parabolic equation. *Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki* [Numerical Analysis and Applications]. 2010. vol. 3, no. 4. pp. 367–371.
 9. Tabarinceva E.V. O reshenii granichnoj zadachi dlya parabolicheskogo uravneniya metodom vspomogatel'nyh granichnyh uslovij [About Solution of the Boundary Inverse Problem for Parabolic Equation by Means of Subsidiary Boundary Conditions Method]. *Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"* [Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematics. Mechanics. Physics]. 2011. no. 32(249). pp. 68–76. (in Russian)
 10. Tanana V.P., Gajnova I.A., Sidikova A.I. Ob otsenke pogreshnosti priblizhennogo resheniya odnoy pereopredelennoj obratnoj zadachi teplovoy diagnostiki [The Estimation of Approximate Solutions an Overdetermined Inverse Problem of Thermal Diagnostics]. *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki* [Journal of Applied and Industrial Mathematics]. 2012. vol. XV, no. 1. pp. 145–154. (in Russian)
 11. Kabanihin S.I., Shishlenin M.A. Pryamye i iteratsionnye metody resheniya obratnykh i nekorrektnykh zadach [Direct and Iterati on Methods for Solving Inverse and Ill-Posed Problems]. *Sibirskie ehlektronnye matematicheskie izvestiya* [Siberian Electronic Mathematical Reports]. 2008. vol. 5, pp. 595–608. (in Russian)
 12. Zhang Y., V. Lukyanenko D.V., Yagola A.G. Using Lagrange Principle for Solving Two-Dimensional Integral Equation with a Positive Kernel. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2015. DOI: 10.1080/17415977.2015.1077445.
 13. Solodusha S.V., Yaparova N.M. Numerical Solving an Inverse Boundary Value Problem of Heat Conduction Using Volterra Equations of the First Kind. *Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki* [Numerical Analysis and Applications]. 2015. vol. 8, no. 3. pp. 267–274.
 14. Drozin A.D., Dudorov M.V., Roshchin V.E., Gamov P.A., Menihes L.D. Matematicheskaya model' obrazovaniya kristallicheskiz zardyshey v pereokhlazhdennom rasplave evtekticheskogo splava [Mathematical Description of the Nucleation in Supercooled Eutectic Melt]. *Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"* [Bulletin of the South Ural State University, Series: Mathematics. Mechanics. Physics]. 2011. no. 11(270). pp. 66–77. (in Russian)
 15. Marchuk G.I. *Metody vychislitel'noj matematiki* [Methods of Computational Mathematics]. St. Petersburg, Publishing of the Lan', 2009. 608 p. (in Russian)
 16. Vabishchevich P.N. Monotone Finite-Difference Schemes on Triangular Grids for Convection-Diffusion Problems. *Differencialnye Uravneniya* [Differential Equations]. 1994. vol. 42, no. 9. pp. 1317–1330.
 17. Tihonov A.N. Samarskij A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physics]. Moscow, Publishing of the Moscow State University, 1999. 799 p. (in Russian)

18. Kamont Z., Kropelnicka K. Neyavnye raznostnye metody dlya evolyutsionnykh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy [Implicit Difference Methods for Evolution Functional Differential Equations]. *Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki* [Numerical Analysis and Applications]. 2011. vol. 14, no. 4. pp. 361–379. (in Russian)
19. Glazyrina O.V. Pavlova M.F. Study of the Convergence of the Finite-Element Method for Parabolic Equations with a Nonlinear Nonlocal Spatial Operator. *Differentsialnye Uravneniya* [Differential Equations]. 2015. vol. 51, no. 7. pp. 872–885.
20. Yaparova N.M. Chislenny metod resheniya nekotorykh obratnykh zadach teploprovodnosti s neizvestnymi nachal'nymi usloviyami [Numerical Method for Solving Some Inverse Heat Conduction Problems with Unknown Initial Conditions]. *Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika"* [Bulletin of the South Ural State University, Series: Computer Technologies, Automatic Control and Radioelectronics]. 2015. no. 2. pp. 55–65. (in Russian)
21. Yaparova N.M. Metod resheniya nekotorykh mnogomernykh obratnykh granichnykh zadach parabolicheskogo tipa bez nachal'nykh usloviy [Method for Solving Some Multi-dimensional Inverse Boundary Value Problems for Parabolic PDEs Without Conditions]. *Vestnik Yuzho-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Komp'yuternye tekhnologii, upravlenie, radioelektronika"* [Bulletin of the South Ural State University, Series: Computer Technologies, Automatic Control and Radioelectronics]. 2015. no. 3. pp. 97–108. (in Russian)
22. Samarskij A.A. Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem [The Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1971. 552 p. (in Russian)
23. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uralceva N.N. Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolicheskogo tipa [Linear and Quasi-Linear Parabolic Equations]. Moscow, Nauka, 1967. 736 p. (in Russian)
24. Tihonov A.N., Goncharskij A.V., Stepanov V.V., YAgola A.G. Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach [Numerical Methods for the Solution of Ill-Posed Problems]. Moscow, Publishing of the Moscow State University, 1990. 115 p. (in Russian)

Received December 30, 2015.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОАЛИЦИОННОЙ ИГРЫ В ПРОГРАММНЫХ СТРАТЕГИЯХ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Е.Д. Насонова

Игровые модели конфликтных ситуаций находят широкое применение на практике при решении задач управления системами различной природы. В работе построена математическая модель дифференциальной игры двух коалиций при неопределенности в программных стратегиях, рассмотрен вариант антагонистического взаимодействия между коалициями. Дано определение решения с использованием принципа гарантированного результата. Применение метода штрафов позволило преобразовать исходную максиминную задачу на связанных множествах к задаче на максимум. Доказаны теоремы существования решения для задач со штрафами, получена оценка погрешности, условия согласования штрафных констант и необходимые условия оптимальности.

Ключевые слова: коалиционная игра, неопределенность, метод штрафов.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Насонова Е.Д. Решение одной коалиционной игры в программных стратегиях при неопределенности // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 2. С. 59–67. DOI: 10.14529/cmse160205.

Введение

Задачи принятия решений в технических, политических, экономических системах, в военном деле характеризуются многими факторами, к которым следует отнести структурную сложность управляемой системы, наличие нескольких заинтересованных сторон, динамический характер системных процессов, влияние на процесс управления неконтролируемых факторов различной природы (неопределенность следующего хода оппонента или постановки цели, помехи на каналах связи, погодные условия, и пр.). Процесс поиска решения происходит в условиях столкновения интересов различных групп, что является естественной формой состояния сложной системы. Начало исследований игровых моделей конфликтных ситуаций было положено достаточно давно в работах Дж. фон Неймана, О. Моргенштерна, Р. Айзекса, Г. Оуэна, Н.Н. Воробьева и др. Однако в настоящее время существуют сравнительно мало исследованные направления теории игр, например, дифференциальные игры, в которых функционирование управляемой системы задается с помощью системы дифференциальных уравнений.

Одним из направлений теории игр являются коалиционные игры, которые являются наименее изученными. Коалиционные структуры состоят из нескольких игроков, принимающих решения совместно, при этом между коалициями может существовать конкуренция, либо присутствуют иерархические связи. Первые постановки задач и определения решений для коалиционных игр без учета возмущений были сформулированы в [1,2]. Рассматривались игры с фиксированной коалиционной структурой в условиях неопределенности, для которых были сформулированы определения решения на основе принципов оптимальности по Парето, угроз-контругроз, Бержу, а также доказаны достаточные условия оптимальности [3,4]. Однако следует отметить, что практически все

исследования проводились для позиционных игр, которые позволяют учитывать при принятии решения обратную связь. Тем не менее, если по каким-либо причинам (например, из-за помех) эта информация становится недоступной, следует использовать программные управления. Игровые задачи с дифференциальными ограничениями при неопределенности в программных стратегиях ранее практически не изучались, исключение составляют работы [5,6], в которых рассматривалась кооперативная и иерархическая игры.

В данной работе рассматривается антагонистическое взаимодействие двух коалиций с произвольным числом участников при неопределенности в условиях отсутствия обмена информацией между коалициями. Решение строится на множестве программных стратегий. Внутри коалиции отношения между игроками являются доброжелательными, и решение принимается на основе желания максимизировать общий выигрыш коалиции. Подобная кооперация дает возможность использовать для формирования общего критерия свертку Карлина [7]. Для определения решения используется принцип гарантированного результата, который позволяет сформулировать игру в виде максиминной задачи на связанных множествах.

Вывод необходимых условий оптимальности осуществляется с использованием метода штрафов [8-10], позволяющего снять дифференциальные связи и осуществить переход к задаче на максимум. Данный метод является, пожалуй, единственно возможным, так как информационная изолированность коалиций не позволяет использовать другие подходы, например равновесные, к определению решения игры.

В разделе 1 рассматривается постановка задачи и описывается способ сведения исходной максиминной задачи со связанными переменными к обычной задаче на максимум методом штрафов, рассматривается оценка погрешности метода. В разделе 2 приведена теорема о необходимых условиях оптимальности для дифференциальной коалиционной игры в условиях неопределенности. В заключении обобщаются полученные результаты и указываются возможные направления для дальнейших исследований.

1. Постановка задачи и применение метода штрафных функционалов

Рассмотрим дифференциальную игру N лиц в условиях неопределенности

$$\Gamma = \langle P, \Sigma, \{U_i\}_{i=\overline{1,N}}, Z, J_i(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}, z)_{i=\overline{1,N}} \rangle,$$

которая имеет заданную коалиционную структуру $P = \{K_1, K_2\}$, где $K_1 = \{1, \dots, k\}$, $K_2 = \{k + 1, \dots, N\}$ — коалиции игроков.

Динамика управляемой системы Σ описывается обыкновенным векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}, z, x, t), x(t_*) = x_*, t \in [t_*, \vartheta], \quad (1)$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор, набор $u^{(1)}, \dots, u^{(N)} \in R^r$ — соответствующие управляющие воздействия игроков, $z \in R^m$ — неопределенный фактор, R^l ($l = n, m, r$) — евклидово векторное пространство, t_*, ϑ — фиксированные моменты времени начала и окончания игры соответственно.

В качестве программной стратегии i -го игрока $u^{(i)}(\cdot)$ будем рассматривать ограни-

ченную измеримую функцию из допустимого множества D_i , принимающую значения на множестве U_i , то есть $u^{(i)}(t) \in U_i$, $i = \overline{1, N}$. Ситуация игры представляет собой набор $(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot))$, а неконтролируемый фактор z является точкой множества $Z \subset R^m$.

Определим функции выигрыша игроков:

$$J_i(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) = \Phi_i(x(\vartheta)) + \int_{t_*}^{\vartheta} F_i(u^{(1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, x(t), t) dt, i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где $x(t)$ — решение системы (1).

Рассмотрим ход игры. Будем предполагать, что внутри каждой коалиции информация о стратегиях друг друга доступна игрокам, а информация об управляющих воздействиях игроков другой коалиции является недоступной. На весь период времени $[t_*, \vartheta]$ внутри коалиций игроки совместно выбирают свой конкретный набор допустимых стратегий $u^{(i)}(\cdot)$, то есть здесь предполагается кооперативный вариант взаимодействия. В каждый момент времени на управляемую систему Σ независимо от выбора этих стратегий действует некоторая неопределенность $z \in Z$. При заданном наборе допустимых стратегий $u^{(i)} = u^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, N}$, $t \in [t_*, \vartheta]$, и при любых $z \in Z$ строится решение $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, системы (1). С учетом выбранной фазовой траектории игроки каждой коалиции независимо друг от друга определяют свои выигрыши, считая, что было реализовано «наихудшее» значение неопределенного фактора. Между коалициями отношения строятся на основе конкуренции (антагонистическое взаимодействие).

Внутри коалиций решение принимается совместно, то есть предполагается создание двух «больших коалиций», что позволяет определить оптимальные стратегии игроков каждой коалиции, руководствуясь принципом Парето с учетом неопределенного фактора [5], это позволяет определять функции выигрыша каждой коалиции с помощью взвешенных критериев:

$$J_{K_1}(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) = \sum_{i=1}^k \alpha_i J_i(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z), \quad (3)$$

$$J_{K_2}(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) = \sum_{j=k+1}^N \alpha_j J_j(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z), \quad (4)$$

где $\alpha_s > 0$, $s = \overline{1, N}$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, $\sum_{j=k+1}^N \alpha_j = 1$.

Тогда гарантированный результат первой коалиции примет вид:

$$J_{K_1}^* = \max_{(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot)) \in D_1 \times \dots \times D_k} \min_{(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot)) \in D_{k+1} \times \dots \times D_N} \min_{z \in Z} J_{K_1}(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z), \quad (5)$$

а гарантированный результат второй коалиции:

$$J_{K_2}^* = \max_{(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot)) \in D_{k+1} \times \dots \times D_N} \min_{(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot)) \in D_1 \times \dots \times D_k} \min_{z \in Z} J_{K_2}(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z). \quad (6)$$

Решением игры Γ назовем набор $\{(u^{(1)*}, \dots, u^{(k)*}, u^{(k+1)*}, \dots, u^{(N)*}, (J_{K_1}^*, J_{K_2}^*)\}$, включающий в себя стратегии игроков, реализующие равенства (5) и (6), и суммарные выигрыши коалиционных групп.

В связи с недоступностью игрокам информации о стратегиях коалиции противника, стратегии $u^{(1)*}, \dots, u^{(k)*}$ будем находить, решая задачу (1), (5), действуя с точки зрения первой коалиции. Стратегии $u^{(k+1)*}, \dots, u^{(N)*}$ будем находить, решая аналогичную задачу (1), (6), действуя с точки зрения второй коалиции. Затем вычисляем выигрыши игроков $J_{K_1}^*$ и $J_{K_2}^*$. Найденные неопределенности в первой и второй задаче могут не совпадать.

Для обеспечения существования и единственности решения уравнения (1) будем предполагать:

- 1) множества $U_i, i = \overline{1, N}$, — выпуклые замкнутые и ограниченные множества, множество Z — замкнуто и ограничено;
- 2) вектор-функция f непрерывна по всем своим аргументам, удовлетворяет условию Липшица по x в каждой ограниченной области фазового пространства;
- 3) вектор-функция f при любых $t, x, u^{(j)}, j = \overline{1, N}, z$ удовлетворяет условию

$$\|f(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}, z, x, t)\| \leq A(1 + \|x\|),$$

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма, A — некоторая константа.

Далее, предполагаются выполненными следующие условия, которые являются достаточными для применения метода штрафов и формулирования необходимых условий оптимальности [5]:

- 4) функции $u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot)$ принадлежат $L_2[t_*, \vartheta]$ — пространству функций с интегрируемым на $[t_*, \vartheta]$ квадратом, а $x(\cdot)$ принадлежит $W_2^{(1)}$ — пространству абсолютно непрерывных на $[t_*, \vartheta]$ функций с производными из $L_2[t_*, \vartheta]$;
- 5) вектор-функция f линейна по каждому $u^{(i)}$ и измерима по t ;
- 6) функции F_i строго вогнуты по соответствующему $u^{(i)}$, удовлетворяют условию Липшица по x и совокупности управлений $u^{(j)}, j = \overline{1, N}$, и измеримы по t ;
- 7) вектор-функция f и функции $\Phi_i, F_i, i = \overline{1, N}$, непрерывно дифференцируемы по x , ограничены вместе со своими производными по x и $u^{(j)}, j = \overline{1, N}$, при любых ограниченных $(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), x(\cdot))$;
- 8) вектор-функция f и функции F_i измеримы и ограничены по z .

Будем решать задачу с точки зрения первой коалиции, для второй результат формулируется аналогично. Для снятия дифференциальных связей (1) введем целевой функционал со штрафом:

$$V(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), x(\cdot), \lambda) = \min_{(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot)) \in D_{k+1} \times \dots \times D_N} \min_{z \in Z} J_{K_1}(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) - \quad (7)$$

$$- \lambda \int_{Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N} \int_{t_*}^{\vartheta} (\dot{x}(t) - f(u^{(1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, x(t), t))^2 dt \mu(dz \times du^{(k+1)} \times \dots \times du^{(N)}),$$

где $\lambda > 0$ — параметр штрафа, $\mu(dz \times du^{(k+1)} \times \dots \times du^{(N)})$ — мера Лебега, заданная на множестве $Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N$. Получим семейство максиминных задач

$$\tilde{V}(\lambda) = \max_{x(\cdot), u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot)} V(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), x(\cdot), \lambda), \quad (8)$$

где максимум берется по всем абсолютно непрерывным функциям $x(\cdot)$, производные которых принадлежат множествам $L_2[t_*, \vartheta]$, и по управлениям $u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot) \in L_2[t_*, \vartheta]$.

Теорема 1. Решение задачи (7), (8) существует, и имеет место равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{V}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \max_{x(\cdot), u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot)} V(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), x(\cdot), \lambda) = J_{K_1}^*,$$

причем для достаточно больших λ имеет место оценка погрешности

$$0 \leq E(\lambda) = \tilde{V}(\lambda) - J_{K_1}^* \leq \frac{k^2 L^2}{4\lambda M \mu(Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N)}.$$

Доказательство аналогично [6], отметим лишь некоторые особенности.

Существование решения доказывается подобно [8]. Введем множество

$$P = \{(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), x(\cdot)) \mid x(t) \in R^n, x(\cdot) \in W_2^{(1)}[t_*, \vartheta], u^{(i)}(t) \in U_i \subset R^n, u^{(i)}(\cdot) \in L_2[t_*, \vartheta], \\ i = \overline{1, N}, \dot{x}(t) = f(u^{(1)}, \dots, u^{(N)}, z, x, t), x(t_*) = x_*, t \in [t_*, \vartheta], z \in Z\}.$$

Так как функционалы $J_i, i = \overline{1, k}$, удовлетворяют условию Липшица по x и совокупности управлений $u^{(j)}, j = \overline{1, N}$, то для любого вектора $(\tilde{u}^{(1)}(\cdot), \dots, \tilde{u}^{(k)}(\cdot), \tilde{x}(\cdot)) \in P, u^{(i)}(t) \in U_i \subset R^n, u^{(i)}(\cdot) \in L_2[t_*, \vartheta], i = \overline{k+1, N}$, и $z \in Z$ будем иметь:

$$|J_{K_1}(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) - J_{K_1}(\tilde{u}^{(1)}(\cdot), \dots, \tilde{u}^{(k)}(\cdot), u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z)| \leq \\ \leq L \left(\sum_{j=1}^k \|u^{(j)}(\cdot) - \tilde{u}^{(j)}(\cdot)\|_{L_2} + \|x(\cdot) - \tilde{x}(\cdot)\|_{W_2^{(1)}} \right),$$

где L — максимальная константа Липшица, k — число игроков первой коалиции.

Пусть $\rho_{L_2} = \|u(\cdot) - \tilde{u}(\cdot)\|$ — метрика в L_2 , $\rho_{W_2^{(1)}} = \|x(\cdot) - \tilde{x}(\cdot)\|$ — метрика в $W_2^{(1)}$. Тогда

$$|J_{K_1}(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) - J_{K_1}(\tilde{u}^{(1)}(\cdot), \dots, \tilde{u}^{(k)}(\cdot), u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z)| \leq \\ \leq L (k\rho_{L_2} + \rho_{W_2^{(1)}}) \leq Lk\rho,$$

где ρ — метрика в $L_2^k \times W_2^{(1)}$, равная сумме метрик L_2 и $W_2^{(1)}$ и, в силу свойств целевых функционалов и множеств допустимых стратегий игроков, получим

$$\min_{(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot)) \in D_{k+1} \times \dots \times D_N} \min_{z \in Z} J_{K_1}(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) \leq J_{K_1}^* + Lk\rho.$$

Также аналогично [9] имеем оценку

$$\lambda \int_{Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N} \int_{t_*}^{\vartheta} |\dot{x}(t) - f(u^{(1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, x(t), t)|^2 dt \mu(dz \times du^{(k+1)} \times \dots \times du^{(N)}) \geq \\ \lambda M \mu(Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N) \rho^2,$$

где M — положительная константа. Таким образом, получаем оценку погрешности

$$E(\lambda) = V(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), x(\cdot), \lambda) - J_{K_1}^* \leq Lk\rho - \lambda M \mu(Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N) \rho^2.$$

Найдем максимум функции $l(\rho) = Lk\rho - \lambda M \mu(Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N) \rho^2$, получим точку

$$\rho^* = \frac{kL}{2\lambda M \mu(Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N)}.$$

Отсюда при $\rho = \rho^*$ получаем искомую оценку погрешности. Следовательно, для сходимости метода достаточно выполнения условия $\lambda \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Для сведения максиминной задачи к обычной задаче на максимум используем функционал

$$W(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), x(\cdot), \omega, \lambda, v) = \omega - \tag{9}$$

$$-v \int_{Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N} (\min[0, J_{K_1}(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) - \omega])^2 \mu(dz \times du^{(k+1)} \times \dots \times du^{(N)}) - \\ -\lambda \int_{Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N} \int_{t_*}^{\vartheta} (\dot{x}(t) - f(u^{(1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, x(t), t))^2 dt \mu(dz \times du^{(k+1)} \times \dots \times du^{(N)}).$$

Получаем задачу:

$$\tilde{W}(\lambda, \nu) = \max_{\substack{(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), x(\cdot)) \in L_2^k \times W_2^{(1)} \\ -\infty < \omega < \infty}} W(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), x(\cdot), \omega, \lambda, \nu). \quad (10)$$

Теорема 2. Решение задачи (9), (10) существует, и имеет место равенство

$$\lim_{\lambda, \nu \rightarrow \infty} W(\lambda, \nu) = \lim_{\lambda, \nu \rightarrow \infty} \max_{(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), x(\cdot)) \in L_2^k \times W_2^{(1)}} W(u^{(1)}(\cdot), \dots, u^{(k)}(\cdot), x(\cdot), \omega, \lambda, \nu) = J_{K_1}^*.$$

Доказательство аналогично теореме 1.

2. Необходимые условия оптимальности

Теорема 3. Для того чтобы ситуация $(u^{(1)*}(\cdot), \dots, u^{(k)*}(\cdot)) \in D_1 \times \dots \times D_k$ была оптимальной в задаче (1), (5) при соответствующих траекториях $x^*(\cdot)$, необходимо существование такой измеримой функции $p(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) \geq 0$, что

$$\int_{Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N} p(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) \mu(dz \times du^{(k+1)} \times \dots \times du^{(N)}) = 1,$$

а также не равных нулю одновременно чисел $\theta \geq 0$ и вектор-функции ограниченной вариации $\psi(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z, \cdot)$ таких, что

1) при любом фиксированном $z \in Z$ и наборе $(u^{(k+1)}(t), \dots, u^{(N)}(t)) \in U_{k+1} \times \dots \times U_k$ вектор-функция $\psi(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z, \cdot)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(u^{(k+1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, t) = & -\theta p(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) \times \\ & \times \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} F_i(u^{(1)*}(t), \dots, u^{(k)*}(t), u^{(k+1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, x^*(t), t) - \\ & - \left(\frac{\partial}{\partial x} f(u^{(1)*}(t), \dots, u^{(k)*}(t), u^{(k+1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, x^*(t), t) \right)^T \psi(u^{(k+1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, t) \end{aligned}$$

с условием трансверсальности

$$\psi(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z, \vartheta) = \theta p(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial}{\partial x} \Phi_i(x^*(\vartheta));$$

2) для любых $u^{(j)}(t) \in U_j$, $j = \overline{1, k}$, и почти всех $t \in [t_*, \vartheta]$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \left\langle \int_{Z \times D_{k+1} \times \dots \times D_N} \int_{t_*}^{\vartheta} \left[\left(\frac{\partial}{\partial u^{(j)}} f(u^{(1)*}(t), \dots, u^{(k)*}(t), u^{(k+1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, x^*(t), t) \right)^T \times \right. \right. \\ \left. \times \psi(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z, t) + \theta p(u^{(k+1)}(\cdot), \dots, u^{(N)}(\cdot), z) \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=1}^k \alpha_i \frac{\partial}{\partial u^{(j)}} F_i(u^{(1)*}(t), \dots, u^{(k)*}(t), u^{(k+1)}(t), \dots, u^{(N)}(t), z, x^*(t), t) \right] dt \times \\ \left. \mu(dz \times du^{(k+1)} \times \dots \times du^{(N)}), u^{(j)}(t) - u^{(j)*}(t) \right\rangle \leq 0. \end{aligned}$$

Доказательство аналогично [5].

Заключение

В статье было представлено решение задачи антагонистического взаимодействия двух коалиций игроков в условиях неопределенности, которая была формализована как максиминная задача на связанных множествах. С использованием метода штрафов данная игра была редуцирована к задаче на максимум, что позволило сформулировать для нее необходимые условия оптимальности. В дальнейшем планируется исследование других видов игр, сочетающих в себе коалиционные структуры и другие виды взаимодействия, например, коалиционно-иерархическое.

Литература

1. Вайсборд Э.М. О коалиционных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения. 1974. Т. 10, № 4. С. 613–623.
2. Клейменов А.Ф. Равновесные коалиционные контрстратегии в дифференциальных играх // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 5. С. 714–721.
3. Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. М.: Изд-во МНИИПУ, 1997. 461 с.
4. Максимушкина Е.В., Тараканов А.Ф. Коалиционная дифференциальная игра при неопределенности и устойчивость коалиционной структуры // Известия РАН. Теория и системы управления. 2004. № 1. С. 77–83.
5. Баратова Е.Д., Тараканов А.Ф. Метод штрафов и необходимые условия оптимальности в дифференциальной кооперативной игре при неопределенности // Известия вузов. Математика. 2004. № 12(511). С. 66–74.
6. Баратова Е.Д., Тараканов А.Ф. Метод штрафов и необходимые условия оптимальности в дифференциальной иерархической игре при неопределенности // Известия РАН. Теория и системы управления. 2003. № 3. С. 30–36.
7. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М.: Мир, 1964. 838 с.
8. Горелик В.А. Максиминные задачи на связанных множествах в банаховых пространствах // Кибернетика. 1983. № 1. С. 64–67.
9. Горелик В.А., Тараканов А.Ф. Метод штрафов и принцип максимума для негладких задач управления с переменной структурой // Кибернетика и системный анализ. 1992. № 3. С. 125–130.
10. Федоров В.В. Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.

Насонова (Баратова) Екатерина Дмитриевна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра физики и информационных технологий, Балашовский институт (филиал) Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского (Балашов, Саратовская обл., Российская Федерация), baratovaed@mail.ru.

Поступила в редакцию 22 октября 2015 г.

SOLUTION OF THE COALITION GAME IN THE PROGRAM STRATEGY UNDER UNCERTAINTY

E.D. Nasonova, Balashov Institute (Branch) of the Saratov National Research State University, Balashov, Russian Federation

The abstract game models of conflict are widely used in practice in solving problems of management systems of different nature. The paper constructs a mathematical model of differential game of two coalitions with uncertainty in program strategies, considers antagonistic interaction between coalitions, defines the solutions using the principle of a guaranteed result. Application of the method of penalty functions has transformed the original maxmin problem in the related sets to the task for maximum. The paper proves the existence theorem for solutions to problems with penalties, an estimate of the error, matching conditions penalty constants and optionally-necessary condition of optimality.

Keywords: coalition game, the uncertainty, the method of penalties.

FOR CITATION

Nasonova E.D. Solution of the Coalition Game in the Program Strategy Under Uncertainty. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2016. vol. 5, no. 2. pp. 59–67. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160205.

References

1. Vaysbord E.M. O koalitsionnykh differentsialnykh igrakh [About the Coalition Differential Games] // *Differentsialnye uravneniya* [Differential Equations]. 1974. vol. 10, no. 4. pp. 613–623. (in Russian)
2. Kleymenov A.F. Ravnovesnye koalitsionnye kontrstrategii v differentsialnykh igrakh [Equilibrium Coalition Counter-Strategies in Differential Games]. *Prikl. matematika i mehanika* [Applied Mathematics and Mechanics]. 1982. vol. 46, no. 5. pp. 714–721. (in Russian)
3. Zhukovskiy V.I. Vvedenie v differentsialnye igry pri neopredelennosti [Introduction to Differential Games with Uncertainty]. M.: Publishing of MNIIPU, 1997. 461 p. (in Russian)
4. Maksimushkina E.V., Tarakanov A.F. Coalition Differential Game under Uncertainty and Stability of the Coalition Structure. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2004. no. 1, vol. 43. pp. 72–78.
5. Baratova E.D., Tarakanov A.F. Metod shtrafov i neobhodimye usloviya optimalnosti v differentsialnoy kooperativnoy igre pri neopredelennosti [The Method of Penalties and Optionally-Necessary Condition of Optimality in a Differential Cooperative Game with Uncertainty]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [Universities News. Mathematics]. 2004. No. 12(511). P. 66–74. (in Russian)

6. Baratova E.D., Tarakanov A.F. Penalty Function Method and Necessary Conditions of Optimality in a Differential Hierarchical Game under Uncertainty. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2003. no. 3, vol. 42. pp. 342–348.
7. Karlin Samuel. *Matematicheskie metody v teorii igr, programmirovani i ekonomike* [Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics]. M.: Mir. 1964. 838 p. (in Russian)
8. Gorelik V.A. Maksiminnye zadachi na svyazannyh mnozhestvah v banahovyh prostranstvah [Maximin Problems in the Related Sets in Banach Spaces]. *Kibernetika* [Cybernetics]. 1983. no. 1. pp. 64–67. (in Russian)
9. Gorelik V.A., Tarakanov A.F. Metod shtrafov i princip maksimuma dlya negladkih zadach upravleniya s peremennoj strukturoj [The Method of Penalties and Maximum Principle for Nonsmooth Control Problems with Variable Structure]. *Kibernetika i sistemnyj analiz* [Cybernetics and System Analysis]. 1992. no. 3 pp. 125–130. (in Russian)
10. Fedorov V.V. *Chislennye metody maksimuma* [Numerical Methods of Maximin]. M.: Nauka, 1979. 280 p. (in Russian)

Received October 22, 2015.

TOWARDS A QUANTITATIVE MODEL OF CLOUD COMPUTING RISKS AND BENEFITS¹

Y. A. Zelenkov, Financial University under the Government of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation

Migrating to the cloud is the main direction of enterprise IT optimization today. Many research papers confirm that cloud computing provides economic benefits, because it enhances flexibility and reduces costs. In other studies, cloud-specific risks are identified and their impact on the customer business is evaluated. However, most often, benefits and risks are considered separately. Model that allows simultaneously evaluate these factors is proposed here. Key factors of tangible and intangible benefits and risks are identified that allows to estimate joint impact of costs and risks on cloud adoption. Simple rules that help to quantify these factors and compute consistent pairwise comparison matrices are also proposed. Usage of proposed method is demonstrated with simple example.

Keywords: cloud computing, cloud computing risks, cloud computing benefits, multi criteria decision making.

FOR CITATION

Zelenkov Y.A. Towards a Quantitative Model of Cloud Computing Risks and Benefits. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 2. pp. 68–83. DOI: 10.14529/cmse160206.

Introduction

Migrating to the cloud is the main trend of enterprise IT optimization today. Many research papers show that cloud computing provides significant tangible and intangible economic benefits, namely reduced costs and enhanced flexibility of enterprise IT [1].

An increasing number of companies choose a model of public clouds, physical resources (servers, data storages...) in that model are owned cloud service provider. Public clouds have given consumers the potential advantage of reallocating their large capital IT expenditures and upfront planning overheads into manageable operational spending and planning. For public cloud providers as well, there are advantages, owing to economies of scale and better utilization of their resources [2, 3].

Literature analysis shows that research papers can be split into two directions. The first examines the economical benefits of the cloud, the second studies the risks that arise in the migration of information resources in the cloud. In both directions the models, which help to assess the efficiency of the clouds, are developed. However, there are very few studies that consider the economical benefits and risks together.

Very often a very complex theoretical models that involve the collection of large amounts of data and complex calculations are proposed. However, in practice it is difficult to collect and measure all required parameters, so such sophisticated techniques are of limited use.

¹ The article was recommended for publication by the program committee of the International Scientific Conference «Parallel Computing Technologies – 2016»

Therefore, practice requires a fairly simple method that allows to compare different alternatives (public cloud, private cloud, own IT, etc.) on the basis of simple expert evaluations of potential benefits and risks.

Comparison of few alternatives is the problem of Multi Criteria Decision Making (MCDM). Solution of any MCDM problem consists from few steps [4]. The first step is to define the set of alternatives and the set of decision criteria that the alternatives need to be evaluated with. Definition of alternatives in practice usually does not cause the difficulties. Following options usually should be analyzed in particular case of cloud computing: the usage of own IT services, transfer of IT services to the cloud, and different combination of these scenarios.

Next very critical step is to accurately estimate the pertinent data. Very often these data cannot be known in terms of absolute values, and it is very difficult to quantify it correctly. Therefore, many MCDM methods attempt to determine relative importance of alternatives.

Last step is to compare identified alternatives with help of one of MCDM method.

Goals of presented research are: (1) to propose a simple set of criteria to assess the feasibility of cloud computing that can be used in practice, and (2) to propose rules to determine relative importance of alternatives in terms of each criterion involved in a MCDM problem.

1. Research literature review

Many articles contributing to technical aspects have appeared in research literature of cloud computing. But in a related review, Yang and Tate [5] concluded that the organization of research pertaining to business aspects of cloud computing is still in a nascent stage, as compared to technical aspects.

Karunakaran et al [3] collected 155 articles related to business view of cloud, which were published until 2012, and classified them into a classification framework that is a refinement of that found in Marston et al. [1]. According to their findings main themes of research are: pricing (32 papers), adoption (24 papers), economic value (20 papers), and sourcing (17 papers). Both issues what are the subject of our research (economic benefits and risks) are studied together only in several papers concerned to cloud service provider selection (the sourcing theme in classification of [3]). Nevertheless, Karunkaran et al. [3] argue, that the themes cost, quality of service (QoS) and risks appear intertwined and hence future research should focus on providing holistic solutions.

1.1. Economical benefits of cloud computing

Most common used methods within economical estimation of cloud computing are: profitability indicators (such as ROI—Return of Investment), NPV (Net Present Value), TCO (Total Cost of Ownership) and productivity per employee.

For example, Tak et al. [6] identify a comprehensive set of factors affecting the costs of a deployment choice (in-house, cloud, and combination), and use NPV-based cost analysis for adoption recommendations. Due to the complexity of quantifying associated security risk encountered with deployment choices, they do not include the risk factor in their current version of analysis.

KhajehHosseini et al. [7] compare TCO reduction for different scenarios of IT services deployment (purchasing a physical servers, leasing, using the cloud), similar approach is used by Williams [8]

Mirsa and Mondal [9] developed a general ROI model, which takes into consideration various intangible impacts of Cloud Computing, apart from the cost. Their model includes some of the key characteristics of the resources possessed by a company: (1) Size of the IT resources, (2) The utilization pattern of the resources, (3) Sensitivity of the data they are handling, and (4) Criticality of work done by the company. Based on this position they developed weighted sum model of economical benefits.

Maresova [10] adopted general steps of Cost-Benefit Analysis (CBA) for cloud computing purposes. She proposed a system of criteria, which is divided into three levels: economic, operational and technical criteria, to specify a cloud computing deployment. These criteria should help to decide which subjects are related to the impacts of the project, describe the differences between current IT and cloud computing, and identify and quantify all related costs and benefits. Examples of costs are: expenditure of time for implementation, support service, User-dependent basic charges, storage capacity, data transfer and etc. Examples of benefits: reduction in operating costs of IT department, energy saving, etc.

There are also studies that evaluate the effectiveness of the clouds with the help of non-economic criteria. Garg et al. [11] propose a framework that measure the quality and rank cloud services offering by different providers. They use parameters like service response time, sustainability, suitability, accuracy, etc. Each individual parameter affects the service selection process, and its impact on overall ranking depends on its priority in the overall selection process. To address this MCDM problem, they propose an Analytic Hierarchy Process (AHP) based ranking mechanism to solve the problem of assigning weights to features considering the interdependence between them, thus providing a much-needed quantitative basis for the ranking of cloud services.

Sundarraaj and Venkatraman [12] integrate an information system success model [13] with preference elicitation techniques drawn from MCDM literature. This helps them to combine in one model four technical qualitative criteria viz. information quality, system quality, service quality and risk mitigation features with financial quantitative criteria (NPV).

Note, however, that in all cited works threats associated with the possible loss of information or with unauthorized access to it are not considered.

1.2. Security risks of cloud computing

A lot of research is devoted to the identification of cloud-specific risks and assessment of their impact on the business of the customer. Here are some of them.

Takabi et al. [14] argue that although clouds allow customers to avoid start-up costs, reduce operating costs, and increase their agility by immediately acquiring services and infrastructural resources when needed, their unique architectural features also raise various security and privacy concerns. They note that cloud computing environments are multidomain environments in which each domain can use different security, privacy, and trust requirements and potentially employ various mechanisms, interfaces, and semantics. They identified six security and privacy challenges, namely: authentication and identity management, access control accounting, trust management and policy integration, secure-service management, privacy and data protection, and organization security management.

European Network and Information Security Agency (ENISA) report [15] discusses assessment of the security risks and benefits of using cloud computing-providing security guidance for potential and existing users of cloud computing. It identifies most important classes of cloud-specific risks, between them:

- Lost of governance, when client necessarily cedes control to the Cloud Provider (CP) on a number of issues which may affect security;
- Lock-in of standards and procedures that can make it difficult for the customer to migrate from one provider to another or migrate data and services back to an in-house IT environment;
- Isolation failure. This risk category covers the failure of mechanisms separating storage, memory, routing and even reputation between different tenants;
- Management interface compromise: customer management interfaces of a public cloud provider are accessible through the Internet and mediate access to larger sets of resources (than traditional hosting providers) and therefore pose an increased risk, especially when combined with remote access and web browser vulnerabilities;
- Cloud computing poses several data protection risks for cloud customers and providers;
- Insecure or incomplete data deletion;
- Malicious insider.

Risk level in cited paper [15] is measured as a sum of qualitative estimations of the business impact and likelihood of the incident.

Subashine et al. [16] present a survey of the different security risks that pose a threat to the cloud. They conclude that there are yet many practical problems which have to be solved, and an integrated security model targeting different levels of security of data for a typical cloud infrastructure is under research.

Hashizume et al. [17] argue, that cloud computing presents an added level of risk because essential services are often outsourced to a third party, which makes it harder to maintain data security and privacy, support data and service availability, and demonstrate compliance. Cloud computing leverages many technologies (SOA, virtualization, Web 2.0); it also inherits their security issues.

In practitioner publications also lot of cloud risks are mentioned, see for example [18] and [19], but hereinafter we will follow Martens and Teuteberg [20], which formalized three most common IT security objectives: confidentiality, integrity and availability.

1.3. Models of the joint assessment of economic benefit and risk

Different authors offer a different approach, which allows to consider various aspects of the problem, but we must admit that none of them is both holistic and simple.

Given security and reliability concerns, Kantarcioglu et al. [21] explored the optimal decision rule for moving certain IT function to public clouds. They assumed that value from the cloud computing adoption are governed by a mixed Brownian/jump process with mean arrival rate of the loss and size of the loss, which are set as parameters. On base of this model they concluded that entrepreneur will attempt to shift to cloud computing sooner than later if he anticipates the probability of negative events is high and the loss is substantial in traditional on-site deployment. But concrete monetization model for the benefits of both computing paradigms, the cloud computing deployment and the traditional on-site computing deployment, is not presented in this paper.

Saripalli and Pingalli [22] argue, that cloud adoption decisions tend to involve multiple, conflicting criteria (attributes) with incommensurable units of measurements, which must be compared among multiple alternatives using imprecise and incomplete available information. They present a multi-attribute decision making framework for cloud adoption. It requires

the definition of Attributes, Alternatives and Attribute Weights, to construct a Decision Matrix and arrive at a relative ranking to identify the optimal alternative. Several important attributes are taken in consideration in this paper, but possible risks did not include in that attribute list.

Martens and Teuteberg [20] developed a sophisticated formal mathematical decision model that supports the selection of cloud computing services in a multisourcing scenario. They consider cost as well as risk factors which are relevant to the decision scope. Coordination costs, IT service costs, maintenance costs and the costs of taken risks were compared. Risks are modeled by means of the three common security objectives: integrity, confidentiality and availability. In cited work, each IT service is considered separately as well as its sourcing options, the relative importance of service is calculated as number of business processes that depend from it. This model can be viewed as an enough full presentation of problem, but the number of its parameters is extremely big, so its usage in practice, most likely, is highly limited.

2. Decision making model for selection of cloud services

We can conclude from discussion in previous section that all reviewed models and methods have some drawbacks. Part of them is based on only qualitative assessments, in quantitative models point estimations are used very often that leads to the flaw of averages [23], the risks and benefits are estimated separately. To close this gap new approach is needed, which can estimate jointly risks and benefits on one hand, and which is simple enough to be used in practice on other.

As it was stated before, selection of optimal way of IT services development is the MCDM problem. The most important steps are: the definition of criteria to make an informed choice from the available alternatives, and quantitative assessment of each alternative under the selected criteria. Usually these steps cause the greatest difficulties in practice.

Many researchers state that advantages of cloud computing can be split on two parts: tangible and intangible economic benefits. Tangible benefits are due to reduction of costs of ownership. Intangible benefits arise as a result of increasing the speed of changes, improving flexibility and the ability to adapt new technologies. Since the cloud computing is associated with the risks, they also have to be included in consideration.

Thus, the minimum acceptable set of criteria should include:

- Tangible economical benefits or cost saving;
- Intangible benefits or flexibility;
- Risks.

The relative importance of the criteria depends on the requirements and priorities of a particular company and is determined for each practical case separately. To determine relative performance of alternatives in terms of each single criterion we will use approach that is based on pairwise comparisons, which was proposed by Saaty [24]. But for the comparative evaluations of alternatives for each criterion the rules are needed, which form the basis for the comparison. The main problem here is to ensure the consistency of all judgments.

Let A_1, A_2, \dots, A_n be n entities (alternatives or criteria) to be compared. To evaluate the relative weights of the above entities they are compared with each other in terms of a single common characteristic. Results of comparison are represented in matrix \mathbf{A} , each entry of which represents a pairwise comparison (judgment). Specifically, the entry a_{ij} denotes the

number that estimates the relative importance of element A_i when it is compared with element A_j , and $a_{ij} = w_i/w_j$, where w_k denotes the actual weight of importance of element A_k . Obviously, $a_{ij} = 1/a_{ji}$ and $a_{ii} = 1$. For consistent case following condition should be satisfied:

$$a_{ij} = a_{ik}a_{kj}, \quad i \in [1, n], \quad j \in [1, n], \quad k \in [1, n].$$

Fulfillment of this condition is difficult to achieve in practice, because when the set of entities to be compared contains n elements, the estimation of $n(n-1)/2$ pairwise comparisons is required. A measure of closeness to the consistency for the pairwise comparison matrix has been provided by Saaty [24] in terms of the principal eigenvalue λ_{\max} :

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1},$$

and right eigenvector $w = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ associated with λ_{\max} has been considered as weighting vector. Here CI - consistency index and n - number of entities in matrix. Saaty shows that more CI is close to zero, the more the ratios w_i/w_j are close to the preference ratio a_{ij} . Many techniques of deriving consistent comparison matrix A are developed [4], but all of them are based on a-posteriori quantifying of qualitative non-consistent data. These approaches are based on subjective judgments and require enough sophisticated calculations, that sometimes causes difficulties in practice. So practitioners need a simple method of consistent evaluation of all criteria and alternatives.

To solve formulated problem, according to the above considerations, it is necessary to propose rules of consistent matrices C, S, F and R calculation. Entries c_{ij} of matrix C represent a relative weights of criteria, entries s_{ij} of matrix S represent a relative weights of alternatives under the cost saving criterion, entries f_{ij} of matrix F represent a relative weights of alternatives under the flexibility criterion, and entries r_{ij} of matrix R represent a relative weights of alternatives under the risk criterion. Procedures for assessing all of these parameters should be as simple as possible and based on available data. For this it is necessary to do two things: firstly, to select those parameters which can be easily quantified, and secondly, to determine measurement scale for each parameter.

2.1. Evaluation of cost saving criterion

To quantify the cost reductions, the discounted cash flows, which form the total cost of ownership, are generally considered, and their Net Present Value (NPV) is calculated [8-10]:

$$NPV_j = \sum_{i=1}^n \frac{TCO_{ij}}{(1 + R)^i}.$$

Here NPV_j is NPV of alternative j ; TCO_{ij} is the net cash flow, which is defined as total cost of ownership for alternative j in time period i ; R is the discount rate; n is the number of time periods.

The relative cost of ownership of two alternatives A_k and A_l in time period i is:

$$d_{i,kl} = TCO_{ik}/TCO_{il}.$$

Suppose, that TCO_{ij} is the normally distributed random variable with mean m_j and variance σ_j , its value can be presented via $\psi(\alpha)$ - inverse cumulative distribution function of standard normal distribution [25]: $TCO_{ij}(\alpha; m_j, \sigma_j) = m_j + \sigma_j\psi(\alpha)$, here α is probability. So, relative attractiveness of two alternatives in any time period can be estimated as:

$$d_{kl} = \frac{m_k + \sigma_k\psi(\alpha)}{m_l + \sigma_l\psi(\alpha)}. \quad (1)$$

Therefore, relative cost of two different alternatives can be obtained if mean and variance of their TCO are known. When these data are not available, preliminary estimation of the expected mean can be used. We can conclude also from the equation (1) that linear scale should be used for comparing the relative costs of alternatives.

Obviously, lower value of TCO corresponds to the more attractive alternative. Therefore, in order to transform this problem into a problem of maximization, we should consider the cost saving value $s_{kl} = 1/d_{kl}$ for comparison of alternatives.

2.2. Evaluation of flexibility criterion

As was stated above, this criterion assesses the speed of response to changes in IT services requirements. In order to form a basis for it, we will use following considerations. In the context of the contemporary turbulent business environment most important challenge is the need to keep track of coming changes and update IT services accordingly. Once a business

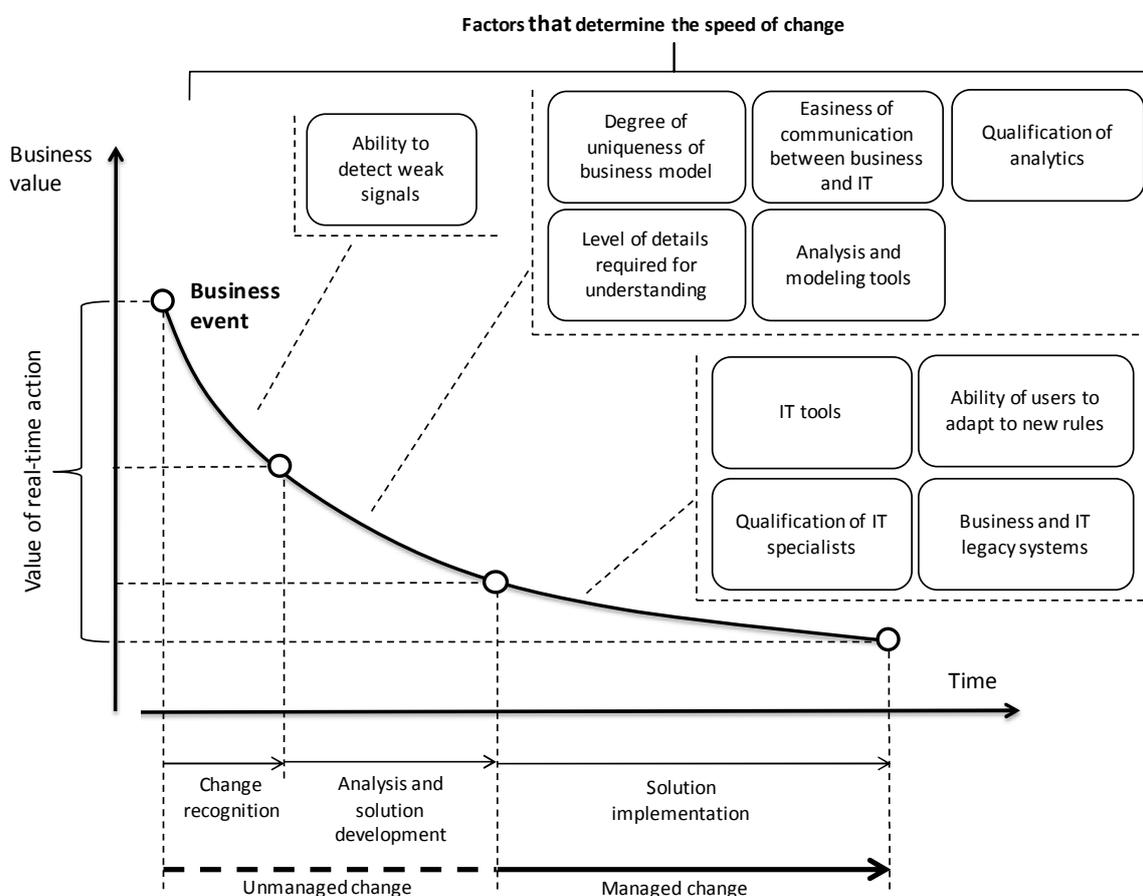


Fig. 1. General model of IT service change

event occurs, the value-add of reacting to that event decreases over time. Therefore, it would be in a business's best interest to reduce the time between business events and decisions made about them [26–28]. Zelenkov [29] reviewed the process of IT service change, he postulated that this time gap is made up of three components: change detection, change analysis and solution development, and solution implementation. General model of change, which summarizes the results of [26–29], is presented in Fig. 1.

If the implementation of the changes is delayed, users are trying to adapt existing applications to new challenges [30]. In that case changes are unmanageable, that leads to fragmentation of enterprise IT system, harmony of its original design is lost [31] due to the unforeseen scenarios of usage, incremental improvements, patches, etc. In such situation, the management should be focused on ensuring compliance of IT with the requirements of the organization [32] and, therefore, on managed evolution of enterprise IT system [33]. The rate of change of enterprise IT services must match the speed of changes in the requirements of business [29]. Cloud computing in this case can provide additional value in the form of intangible benefits which are the result of acceleration of IT services change.

To estimate the losses, associated with a delay of changes, let us consider the following variables:

- v_0 — the value that an organization would have received if the change were implemented immediately, at the moment of business event;
- τ — the time spent on the implementation of changes;
- $v(\tau)$ — the value that an organization receives if the change is realized over time τ .

It is followed from Fig. 1 that the desired function must satisfy the following conditions:

$$\begin{aligned} \tau = 0: & \quad v(\tau) = v_0 \\ \tau \rightarrow \infty: & \quad v(\tau) \rightarrow 0 \end{aligned} .$$

For example, power law $v(\tau) = v_0 e^{-\tau}$ satisfy these conditions, where e is the base of of the natural logarithm (Euler's number). Hence, loss due to delays in the implementation of the changes over time τ are:

$$L(\tau) = v_0 - v(\tau) = v_0 - v_0 e^{-\tau} = v_0(1 - e^{-\tau}) . \quad (2)$$

It follows from equation (2) that the quick reaction to the changes provide a significant impact to the organization, but after a while, the potential of IT service change is exhausted. This may mean that users found alternative way of action under the new conditions, for example, they acquired the IT tools from third-party, without the consent of the IT department, or developed own applications based on spreadsheets and etc.

Equation (2) can be used as a basis for comparison of the intangible benefits of different options of sourcing IT services. Suppose that the expected values of reaction time of the two alternatives A_k and A_l are τ_k and τ_l respectively. Therefore, relative performance of alternatives under flexibility criterion is:

$$f_{kl} = \frac{v_0 e^{-\tau_k}}{v_0 e^{-\tau_l}} = e^{(\tau_l - \tau_k)} .$$

So exponential scale should be used for comparing the alternatives and relative performance of alternative is defined by reduction of reaction time, which it promises. These data

can be obtained from the system of change tracing (for existing IT services), service level agreements (for service in the cloud), or on the basis of expert assessments.

2.3. Evaluation of risk criterion

To develop a method for evaluating the potential risks of various alternatives, we will use the seminal model of Gordon and Loeb [34] with additions made Matsuura [35].

Let us consider a one-period economic model of a firm contemplating the additional security efforts to protect a given information set. The information set is characterized by the following three parameters:

- λ — the monetary loss conditioned on a breach occurring.
- t — the threat probability, defined as the probability of a threat occurring, since t is a probability, $0 \leq t \leq 1$. So the potential loss L is defined as $L = \lambda t$.
- v — the vulnerability, defined as the conditional probability that a threat once realized would be successful. Since v is a probability, $0 \leq v \leq 1$.

Let $z > 0$ denote the monetary investment in information security to protect the given information set, measured in the same units used to measure the potential loss L . The purpose of the investment z is to lower the probability that the information set will be breached. Let $S(z, v)$ denote the probability that an information set with vulnerability v will be breached, conditional on the realization of a threat and given that the firm has made an information security investment of z to protect that information. The expected benefits of an investment in information security, denoted as EBIS, are equal to the reduction in the firm's expected loss attributable to the extra security. That is:

$$EBIS(z) = [v - S(z, v)]L = \lambda[v - S(z, v)]t.$$

Matsuura [35] noted that the information security investment z can reduce the threat probability and that the reduction depends only on the investment z and the current level of threat probability t . So let $T(z, t)$ denote the probability that a threat occurring, given that the firm has made an investment of z . So in his extended model:

$$EBIS(z) = \lambda[v - S(z, v)]T(z, t). \tag{3}$$

Equation (3) can be used as a basis for quantitative comparison of risks of various alternatives.

Suppose that the expected values of threat and vulnerability of the two alternatives A_k and A_l are $v_k t_k$ and $v_l t_l$ respectively. Therefore, relative performance of alternatives is:

$$r_{kl} = \frac{v_l t_l}{v_k t_k}.$$

Lower value of $v_j t_j$ corresponds to the more attractive alternative, therefore, in order to go to the maximization problem, we should consider the reciprocal values under risk criterion. Linear scale should be used for comparing the alternatives under risk criterion.

2.4. Evaluation of priorities of criteria

In case of relative importance of criteria comparison, it is necessary to take in consideration a requirement of normality:

$$w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1,$$

where w_i — the actual weight of importance of criterion C_i .

As formulated above, in case of cloud computing we deal with only $n = 3$ parameters. Therefore, following simple procedure can be used in practice. The first step is to assign weights w_i and w_j to two random criteria C_i and C_j based on their relative importance. The values of the weights are selected to satisfy the conditions $0 \leq w_i + w_j \leq 1$. The third criterion weight is calculated as $w_k = 1 - (w_i + w_j)$. Easy to check that in this case condition of consistency is satisfied, because $c_{ij} = c_{ik}/c_{kj} = (w_i/w_k)/(w_k/w_j)$. If obtained values c_{ij} do not satisfy the decision maker for some reasons, the entire procedure must be performed again, starting with the definition of new values of actual weights $w_i, i = 1, \dots, n$.

3. Example

For example, suppose, that some company considers three options:

- Use of its own IT infrastructure (alternative A_1);
- Migration of all IT services to the public cloud (alternative A_2);
- Migration of only non-critical IT services to a public cloud (alternative A_3).

Absolute values of alternatives in terms of each criterion were estimated by experts, these values are shown in Table 1.

Table 1

Absolute values of alternatives

Criterion	TCO (million dollars per month)	τ (days)	vt (probability)
A_1	0,5	3	0,20
A_2	0,2	1	0,30
A_3	0,4	2	0,22

In accordance with rules proposed in Section 3, the entries of S, F and R can be calculated as follows:

$$s_{ij} = TCO_j/TCO_i, \quad f_{ij} = e^{(\tau_j - \tau_i)}, \quad r_{ij} = v_j t_j / v_i t_i.$$

Matrices S, F and R are presented in Table 2.

Suppose that after discussion company experts decided that actual weight of cost saving importance is $w_s = 0,3$ and actual weight of flexibility is $w_f = 0,15$. In accordance with Section 3.4, actual weight of risk is $w_r = 1 - (w_s + w_f) = 0,55$.

Table 2

Pairwise comparison matrices

Alternatives	A ₁	A ₂	A ₃
Matrix S			
A ₁	1	0,4	0,8
A ₂	2,5	1	2
A ₃	1,25	0,5	1
Matrix F			
A ₁	1	0,135	0,368
A ₂	7,389	1	2,718
A ₃	2,718	0,368	1
Matrix R			
A ₁	1	1,500	1,100
A ₂	0,667	1	0,733
A ₃	0,909	1,364	1

Let use weighted production model (WPM) to define relative attractiveness of alternatives. WPM is one of best known and simplest MCDM method for evaluating number of alternatives in terms of a number decision criteria. Suppose that a given MCDM problem is defined on m alternatives and n decision criteria, and all the criteria are benefit criteria, that is, the higher the values are, the better it is. Let w_j denotes the relative weight of importance of the criterion C_j and a_{jkl} is the relative performance value of alternative A_k regarding alternative A_l when they are evaluated in terms of criterion C_j . So, to compare the two alternatives A_k and A_l the following product has to be calculated [4]:

$$P(A_k/A_l) = \prod_{j=1}^n a_{jkl}^{w_j} \quad \text{for } k, l = 1, 2, \dots, m.$$

If the ratio $P(A_k/A_l)$ is greater than or equal to the value 1, then it indicates that alternative A_k is more desirable than alternative A_l , the best alternative is the one that is better than or at least equal to all other alternatives.

With given C, S, F and R: $P(A_1/A_2) = 0,703$, $P(A_1/A_3) = 0,848$, and $P(A_2/A_3) = 1,206$. Therefore, with given criteria priorities and parameters estimations the best alternative is A_2 , because it is superior to all the other alternatives. The ranking of alternatives is as follows: $A_2 > A_3 > A_1$.

Conclusion

The main goal of paper is to propose simple model that can be used in practice. Three criteria (cost of ownerships saving, intangible benefits that associated with speed of reaction to change and security risks) that have been proposed here are enough simple and all necessary data can be obtained from accounting system, contract conditions, statistics and expert opinions. The proposed method helps easy to get a consistent matrix of pairwise comparisons. All of this leads to the conclusion that the proposed method can be used in practice.

References

1. Marston S., Li Z., Bandyopadhyay S., Zhang J., Ghalsasi A. Cloud Computing: The Business Perspective. *Decision Support Systems*. 2011. vol. 51, no. 1. pp. 176–189.
2. Armbrust M., Fox A., Griffith R., Joseph A. D., Katz R., Konwinski A. A View of Cloud Computing. *Communications of the ACM*. 2010. vol. 53, no. 4. pp. 50–58.
3. Karunakaran S., Krishnaswamy V., Sundarraj R.P. Business View of Cloud: Decisions, Models and Opportunities – a Classification and Review of Research. *Management Research Review*. 2015. vol. 38, no. 6. pp. 582–604.
4. Triantaphyllou E. *Multi-Criteria Decision Making: A Comparative Study*. Kluwer, 2000. 320 p.
5. Yang H., Tate M. A Descriptive Literature Review and Classification of Cloud Computing Research. *Communications of the Association for Information Systems*. 2012. vol. 31, no. 1. Paper 2.
6. Tak B.C., Uргаonkar B., Sivasubramaniam A. To Move or not to Move: The Economics of Cloud Computing. *Proceedings of the 3rd USENIX Conference on Hot Topics in Cloud Computing*. 2011. pp. 5–5.
7. Khajeh-Hosseini A., Greenwood D., Smith J. W., Sommerville I. The Cloud Adoption Toolkit: Supporting Cloud Adoption Decisions in the Enterprise. *Software: Practice and Experience*. 2012. vol. 42, no. 4. pp. 447–465.
8. Williams B. *The Economics of Cloud Computing*. Cisco Press, 2011.
9. Misra S. C., Mondal A. Identification of A Company’s Suitability for The Adoption of Cloud Computing and Modelling Its Corresponding Return on Investment. *Mathematical and Computer Modelling*. 2011. vol. 53, no. 3. pp. 504–521.
10. Marešová P. Cost Benefit Analysis Approach for Cloud Computing. *Advanced Computer and Communication Engineering Technology*. Springer, 2016. pp. 913–923.
11. Garg S. K., Versteeg S., Buyya R. A Framework for Ranking of Cloud Computing Services. *Future Generation Computer Systems*. 2013. vol. 29, no. 4. pp. 1012–1023.
12. Sundarraj R.P., Venkatraman S.: On Integrating an IS Success Model and Multicriteria Preference Analysis into a System for Cloud-Computing Investment Decisions. *Outlooks and Insights on Group Decision and Negotiation*. Springer, 2015. pp. 357–368.
13. Delone W.H., McLean E.R. The Delone and Mclean Model of Information Systems Success: A Ten-Year Update. *Journal of management information systems*. 2003. vol. 19, no. 4. pp. 9–30.
14. Takabi H., Joshi J.B., Ahn G.J. Security and Privacy Challenges in Cloud Computing Environments. *IEEE Security & Privacy*. 2010. no. 6. pp. 24–31.
15. Catteddu D., Hogben G. Cloud Computing: Benefits, Risks and Recommendations for Information Security. ENISA, 2009. URL: www.enisa.europa.eu/act/rm/files/deliverables/cloud-computing-risk-assessment/at_download/fullReport (accessed: 07.02.2016).
16. Subashini S., Kavitha V. A Survey on Security Issues in Service Delivery Models of Cloud Computing. *Journal of Network and Computer Applications*. 2011. vol. 34, no. 1. pp. 1–11.
17. Hashizume K., Rosado D.G., Fernández-Medina E., Fernandez E.B. An Analysis of Security Issues for Cloud Computing. *Journal of Internet Services and Applications*. 2013. vol. 4, no.1. pp. 1–13.

18. Angeles S. 8 Reasons to Fear Cloud Computing. Business News Daily, 2013. URL: <http://www.businessnewsdaily.com/5215-dangers-cloud-computing.html> (accessed: 07.02.2016).
19. Grimes R. The 5 Cloud Risks You Have to Stop Ignoring. InfoWorld, 2013. URL: <http://www.infoworld.com/article/2614369/security/the-5-cloud-risks-you-have-to-stop-ignoring.html> (accessed: 07.02.2016).
20. Martens B., Teuteberg F.: Decision-Making in Cloud Computing Environments: A Cost and Risk Based Approach. Information Systems Frontiers. 2012. vol. 14, no. 4. pp. 871–893.
21. Kantarcioglu M., Bensoussan A., Hoe S. Impact of Security Risks On Cloud Computing Adoption. 49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. IEEE, 2011. pp. 670–674.
22. Saripalli P., Pingali G.: MADMAC: Multiple Attribute Decision Methodology for Adoption of Clouds. 2011 IEEE International Conference on Cloud Computing. IEEE, 2011. pp. 316–323.
23. Savage S. L. The Flaw of Averages: Why We Underestimate Risk in The Face of Uncertainty. John Wiley & Sons, 2009.
24. Saaty T. L. Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process. Management Sciences. 1986. no. 32. pp. 841–855.
25. Aivazyan S.A., Yenyukov I.S., Meshalkin L.D. Applied statistics. Bases of modeling and initial data processing. Financy i statistica, 1983. 471 p.
26. Bonham S. S. Actionable Strategies Through Integrated Performance, Process, Project, And Risk Management. Artech House, 2008.
27. Hackathorn R.: Minimizing Action Distance. Data Administration Newsletter, February 1, 2004. URL: www.tdan.com/i025fe04.htm (accessed: 07.02.2016).
28. Zelenkov Y. Components of Enterprise IT Strategy: Decision-Making Model and Efficiency Measurement. International Journal of Information Systems and Change Management. 2014. vol. 7, no. 2. pp. 150–166.
29. Zelenkov Y. Business and IT Alignment in Turbulent Business Environment. Business Information Systems Workshops, LNBIP. Springer, 2015. vol. 228. pp. 101–112.
30. Ciborra C. The Labyrinths of Information: Challenging the Wisdom of System. Oxford University Press, 2002.
31. Maurer C. Goodhue D. A Theoretical Model of the Enterprise System Agility Life Cycle. AMCIS 2010 Proceedings, 2010. Paper 231.
32. Luftman J., Kempaiah R. An Update on Business-IT Alignment: “A Line” Has Been Drawn. MIS Quarterly Executive. 2007. vol. 6, no. 3. pp. 165–177.
33. Murer S., Bonati B., Furrer F.J. Managed Evolution: A Strategy for Very Large Information Systems. Springer, 2011.
34. Gordon L.A., Loeb M.P. The Economics of Information Security Investment. ACM Transactions on Information and System Security, 2002. vol. 5, no. 4. pp. 438–457.
35. Matsuura K. Productivity Space of Information Security in an Extension of the Gordon-Loeb’s Investment Model. M.E. Johnson (ed.), Managing Information Risk and the Economics of Security. Springer, 2009. pp. 99–119.

Received March 1, 2016.

О КОЛИЧЕСТВЕННОЙ МОДЕЛИ РИСКОВ И ПРЕИМУЩЕСТВ ОБЛАЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Ю.А. Зеленков

Перенос вычислительной инфраструктуры в облака стал сегодня одним из ключевых направлений оптимизации корпоративных ИТ. Обширный ряд исследований доказывает, что облачные вычисления обеспечивают экономическую выгоду, поскольку они повышают гибкость инфраструктуры и снижают затраты на ее поддержание. Другие исследовательские работы посвящены обсуждению рисков, связанных с облаками, и их влиянию на бизнес. Однако, в большинстве случаев преимущества и риски облачных вычислений обсуждаются отдельно. В работе предложена модель, которая позволяет оценить одновременное влияние всех факторов. Идентифицированы материальные и нематериальные преимущества и риски адаптации к облаку, предложены простые правила, позволяющие оценить их количественно и построить непротиворечивую матрицу попарного сравнения. Использование предложенного метода иллюстрируется на простом примере.

Ключевые слова: облачные вычисления, риски облачных вычислений, преимущества облачных вычислений, мультикритериальное принятие решений.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Zelenkov Y.A. Towards a Quantitative Model of Cloud Computing Risks and Benefits // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 2. С. 68–83. DOI: 10.14529/cmse160206.

Литература

- 1 Marston S., Li Z., Bandyopadhyay S., Zhang J., Ghalsasi A. Cloud Computing: The Business Perspective // Decision Support Systems. 2011. Vol. 51, No. 1. P. 176-189.
- 2 Armbrust M., Fox A., Griffith R., Joseph A.D., Katz R., Konwinski A. A View of Cloud Computing // Communications of the ACM. 2010. Vol. 53, No. 4. P. 50-58.
- 3 Karunakaran S., Krishnaswamy V., Sundarraj R.P. Business View of Cloud: Decisions, Models and Opportunities – a Classification and Review of Research // Management Research Review. 2015. Vol. 38, No. 6. P. 582-604.
- 4 Triantaphyllou E. Multi-Criteria Decision Making: A Comparative Study. Kluwer, 2000. 320 p.
- 5 Yang H., Tate M. A Descriptive Literature Review and Classification of Cloud Computing Research // Communications of the Association for Information Systems. 2012. Vol. 31, No. 1. Paper 2.
- 6 Tak B.C., Urgaonkar B., Sivasubramaniam A. To Move or not to Move: The Economics of Cloud Computing // Proceedings of the 3rd USENIX conference on Hot topics in cloud computing. 2011. P. 5-5.

- 7 Khajeh-Hosseini A., Greenwood D., Smith J.W., Sommerville I. The Cloud Adoption Toolkit: Supporting Cloud Adoption Decisions in the Enterprise // *Software: Practice and Experience*. 2012. Vol. 42, No. 4. P. 447-465.
- 8 Williams B. *The Economics of Cloud Computing*. Cisco Press, 2011.
- 9 Misra S.C., Mondal A. Identification of A Company's Suitability for The Adoption of Cloud Computing and Modelling Its Corresponding Return On Investment // *Mathematical and Computer Modelling*. 2011. Vol. 53, No. 3. P. 504-521.
- 10 Marešová P. Cost Benefit Analysis Approach for Cloud Computing. // *Advanced Computer and Communication Engineering Technology*. Springer, 2016, P. 913-923.
- 11 Garg S. K., Versteeg S., Buyya R. A Framework for Ranking of Cloud Computing Services // *Future Generation Computer Systems*. 2013. Vol. 29, No. 4. P. 1012-1023.
- 12 Sundarraj R.P., Venkatraman S. On Integrating an IS Success Model and Multicriteria Preference Analysis into a System for Cloud-Computing Investment Decisions // *Outlooks and Insights on Group Decision and Negotiation*. Springer, 2015. P. 357-368.
- 13 Delone W.H., McLean E.R. The Delone and Mclean Model of Information Systems Success: A Ten-Year Update // *Journal of management information systems*. 2003. Vol. 19, No. 4. P. 9-30.
- 14 Takabi H., Joshi J.B., Ahn G.J. Security and Privacy Challenges in Cloud Computing Environments // *IEEE Security & Privacy*. 2010. No. 6. P. 24-31.
- 15 Catteddu D., Hogben G. *Cloud Computing: Benefits, Risks and Recommendations for Information Security*. ENISA, 2009. URL: www.enisa.europa.eu/act/rm/files/deliverables/cloud-computing-risk-assessment/at_download/fullReport (accessed: 07.02.2016).
- 16 Subashini S., Kavitha V. A Survey on Security Issues in Service Delivery Models of Cloud Computing // *Journal of Network and Computer Applications*. 2011. Vol. 34, No. 1. P. 1-11.
- 17 Hashizume K., Rosado D.G., Fernández-Medina E., Fernandez E.B. An Analysis of Security Issues for Cloud Computing // *Journal of Internet Services and Applications*. 2013. Vol. 4, No.1. P. 1-13.
- 18 Angeles S. 8 Reasons to Fear Cloud Computing // *Business News Daily*, 2013. URL: <http://www.businessnewsdaily.com/5215-dangers-cloud-computing.html> (accessed: 07.02.2016).
- 19 Grimes R. The 5 Cloud Risks You Have to Stop Ignoring // *InfoWorld*, 2013. URL: <http://www.infoworld.com/article/2614369/security/the-5-cloud-risks-you-have-to-stop-ignoring.html> (accessed: 07.02.2016).
- 20 Martens B., Teuteberg F.: Decision-Making in Cloud Computing Environments: A Cost and Risk Based Approach // *Information Systems Frontiers*. 2012. Vol. 14, No. 4. P. 871-893.
- 21 Kantarcioglu M., Bensoussan A., Hoe S. Impact of Security Risks On Cloud Computing Adoption // *49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing*. IEEE, 2011. P. 670-674.
- 22 Saripalli P., Pingali G.: MADMAC: Multiple Attribute Decision Methodology for Adoption of Clouds // *2011 IEEE International Conference on Cloud Computing*. IEEE, 2011. P. 316-323.

- 23 Savage S.L. The Flaw of Averages: Why We Underestimate Risk in The Face of Uncertainty. John Wiley & Sons, 2009.
- 24 Saaty T.L. Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process // Management Sciences. 1986. No. 32. P. 841-855.
- 25 Aivazyan S.A., Yenyukov I.S., Meshalkin L.D. Applied statistics. Bases of modeling and initial data processing. Financy i statistica, 1983. 471 p.
- 26 Bonham S. S. Actionable Strategies through Integrated Performance, Process, Project, And Risk Management. Artech House, 2008.
- 27 Hackathorn R. Minimizing Action Distance // Data Administration Newsletter, February 1, 2004. URL: www.tdan.com/i025fe04.htm (accessed: 07.02.2016).
- 28 Zelenkov Y. Components of Enterprise IT Strategy: Decision-Making Model and Efficiency Measurement // International Journal of Information Systems and Change Management. 2014. Vol. 7, No. 2, P.150–166.
- 29 Zelenkov Y. Business and IT Alignment in Turbulent Business Environment // Business Information Systems Workshops, LNBIP, vol. 228. Springer, 2015. P. 101-112.
- 30 Ciborra C. The Labyrinths of Information: Challenging the Wisdom of System. Oxford University Press, 2002.
- 31 Maurer C., Goodhue D. A Theoretical Model of the Enterprise System Agility Life Cycle // AMCIS 2010 Proceedings, 2010. Paper 231.
- 32 Luftman J., Kempaiah R. An Update on Business-IT Alignment: “A Line” Has Been Drawn // MIS Quarterly Executive. 2007. Vol. 6, No. 3. P. 165-177.
- 33 Murer S., Bonati B., Furrer F.J. Managed Evolution: A Strategy for Very Large Information Systems. Springer, 2011.
- 34 Gordon L.A., Loeb M.P. The Economics of Information Security Investment // ACM Transactions on Information and System Security, 2002. Vol. 5, No. 4. P. 438-457.
- 35 Matsuura K. Productivity Space of Information Security in an Extension of the Gordon-Loeb’s Investment Model // M.E. Johnson (ed.), Managing Information Risk and the Economics of Security. Springer, 2009. P. 99 – 119.

Зеленков Юрий Александрович, д.т.н., заведующий кафедрой прикладной информатики, Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, yzelenkov@fa.ru

Поступила в редакцию 1 марта 2016 г.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ РЕЗЕРВЫ «СПЛЮЩЕННЫХ» СИСТЕМНЫХ СЕТЕЙ¹

М.Ф. Каравай, В.С. Подлазов

Рассматривается метод изменения топологии 2-шаговой системной сети «сплющенная бабочка» (*Flattened Butterfly*), обеспечивающий уменьшение размеров составляющих ее коммутаторов и, как следствие, уменьшение схемной сложности и энергопотребления при сохранении числа абонентов (процессоров), диаметра сети и коммутационных свойств. При сохранении размеров коммутаторов предлагаемый метод позволяет существенно увеличить число абонентов при сохранении диаметра сети.

Ключевые слова: системные сети, сплющенные сети, полные графы, квазитолные графы и орграфы, обобщенные сети Клоза, сложность и энергопотребление, число абонентов, диаметр, коммутационные свойства.

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Топологические резервы «сплющенных» системных сетей // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 2. С. 84–94. DOI: 10.14529/cmse160207.

Введение

Сеть *Flattened Butterfly* с n шагами (FBn) [1] считается перспективной для создания плоских (однокаскадных) системных сетей на базе больших многопортовых коммутаторов-маршрутизаторов. Эта сеть получается «сплющиванием» n -каскадной k -ичной бабочки в плоскую сеть, при котором все коммутаторы с одинаковыми номерами в разных каскадах бабочки объединяются в один из расширенных коммутаторов FBn , а симплексные каналы между каскадами бабочки становятся дуплексными каналами между разными расширенными коммутаторами.

Общее число абонентов (процессоров), объединяемых FBn , составляет величину $N=k^n$, а ее диаметр (число скачков по сети между абонентами) — величину $D=n$. Сеть FBn состоит из $M=N/k=k^{n-1}$ расширенных коммутаторов, каждый из которых состоит из n коммутаторов $k \times k$ и имеет $m=n(k-1)+1$ дуплексных портов. Из них k портов используются для подсоединения k абонентов и $(n-1)(k-1)$ порт — для связи прямыми дуплексными каналами с другими коммутаторами сети. Поэтому число сетевых дуплексных каналов в FBn составляет величину $R=(n-1)(k-1)N/k$.

Принято считать, что сложность s и энергопотребление w коммутатора пропорциональны квадрату числа портов, поэтому сложность и энергопотребление расширенного коммутатора составляет величины $s=b(n(n-1)+1)k^2$ и $w=c(n(n-1)+1)k^2$. Тогда сложность S сети FBn задается как $S=b(n(n-1)+1)k^2N/k=b(n(n-1)+1)k^{n+1}=b(n(n-1)+1)N^{(n+1)/n}$. Аналогично, для энергопотребления — $W=c b(n(n-1)+1)N^{(n+1)/n}$.

К современным системным сетям предъявляется требование минимизации диаметра. Этому требованию удовлетворяет сеть $FB2$. Обратим внимание на то, что она имеет топологию полного графа (рис. 1). В ней величины S и W задаются как $S=b3k^2N/k=3bk^3$ и

¹Статья рекомендована к публикации программным комитетом Международной конференции «Суперкомпьютерные дни в России – 2015».

$W=3ck^3$, т.е. величинами пропорциональными кубу числа портов отдельного коммутатора. Поэтому уменьшение числа портов коммутаторов (даже при некотором увеличении их числа) может понизить сложность и энергопотребление сети *FB2*.

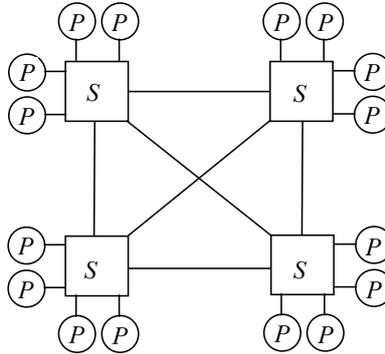


Рис. 1. Исходная сеть *FB2* при $k=4$ ($N=16$ и $m=7$)

В результате мы приходим к следующей постановке задачи для сети *FB2*, как сети с наименьшим диаметром. Практически не изменяя число абонентов сети N , число каналов R и диаметр D , требуется уменьшить сложность S и энергопотребление W сети за счет изменения ее топологии, при котором имеет место уменьшение числа портов отдельных коммутаторов. Двойственной постановкой является требование увеличить число абонентов сети, не меняя ее сложности и коммутационных возможностей.

Возможность такой постановки задачи открывает разработка [2, 3] сетей с прямыми каналами, имеющих топологию квазиполных графов и орграфов, которые позволяют эффективно заменять в топологии сети полный граф с числом узлов $N=k$ на квазиполный граф с числом узлов $N^*=k^*(k^*-1)/\sigma-1$ (где σ — число независимых прямых каналов между любыми двумя узлами) или квазиполный орграф с $N^*=(k^*)^2$ (только с одним прямым каналом $\sigma=1$). В случае $N=N^*$ это приводит к уменьшению степени узлов от k до $k^* \approx (\sigma m)^{1/2}$. При схемной реализации степень узла задает число его портов.

Обоснованность такой постановки подтверждается тем, что сеть с топологией квазиполного графа или орграфа является неблокируемой при самомаршрутизации пакетов каждым источником. Это означает, что она равносильна сети с топологией полного графа на произвольных перестановках пакетов и близка к ней на случайном равномерном трафике между абонентами [4]. Последний вид трафика и имеет место между коммутаторами в *FB2*.

Дело в том, что сеть *FBn* наследует коммутационные свойства сети n -каскадная k -ичная бабочка. Поэтому сеть *FBn* не является ни неблокируемой, ни даже перестраиваемой, имеет только один путь между любыми двумя процессорами и, как следствие, не обеспечивает равных задержек передачи разным абонентам. Для преодоления этого недостатка приходится использовать специальные алгоритмы маршрутизации, которые и приводят к равномерной рандомизации трафика между коммутаторами. Эти алгоритмы снижают пропускную способность сети до двух раз или аналогично повышают ее эффективный диаметр (реальные задержки передачи) [1].

Статья имеет следующую структуру. Раздел 1 содержит основные понятия, используемые для описания топологии предлагаемой сплюсненной сети. Эта топология задается квазиполными графами и орграфами. В разделе 1 приводится краткий обзор свойств и характеристик сетей с рассматриваемой топологией. В разделе 2 рассматривается мо-

дификация сети сплюснутая бабочка за счет замены полного графа на распределенный полный коммутатор и рассматриваются ее свойства и характеристики. В разделе 3 рассматривается обобщенная многокаскадная сеть, получаемая из распределенного коммутатора, и строится новая сплюснутая сеть, полученная сплюсчиванием обобщенной сети минимального диаметра. Здесь же сравниваются характеристики сплюснутых сетей минимального диаметра — «сплюснутой бабочки» и сплюснутой обобщенной сети. В заключении подводятся итоги проведенного исследования.

1. Квазиполные графы и орграфы

Квазиполный граф $QFG(M^*, k^*, \sigma^*)$ — это однородный двудольный граф, каждую долю которого составляют M^* узлов степени k^* . Значение k^* выбирается минимальным, при котором любые два узла в одной доле связаны $\sigma^* \leq k^*$ прямыми путями длины 2 через разные узлы в другой доле. Если такой граф существует, то его параметры связаны соотношением $M^* = k^*(k^* - 1) / \sigma^* + 1$. На рис. 2 представлена сеть с топологией квазиполного графа $QFG(7, 4, 2)$, т.е. с двумя путями между узлами одной доли.

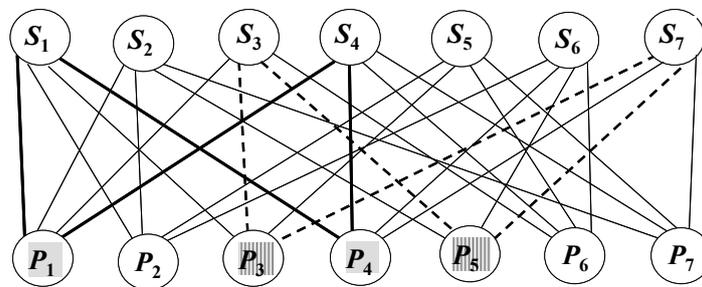


Рис. 2. Сеть с топологией квазиполного графа $QFG(7, 4, 2)$

Квазиполные графы изоморфны симметричным блок-схемам, исследуемым в комбинаторике [2, 3]. Их построение сводится к построению соответствующих блок-схем, и осуществляется обычно комбинаторными методами, являющимися NP -сложными по k^* .

При схемной реализации узлы одной доли — это абоненты с k^* дуплексными портами, а узлы другой доли — это полные коммутаторы $k^* \times k^*$ с k^* дуплексными портами. Таблицей инцидентности квазиполного графа является симметричная блок-схема $B(M^*, k^*, \sigma^*)$, которую задает табл. 1 для графа $QFG(7, 4, 2)$.

Эта таблица задает схему межсоединений узлов разных долей в сети. Первая колонка задает коммутаторы, а строки — номера подсоединенных к ним абонентов.

Таблица 1

Межсоединения в $QFG(7, 4, 2)$

Блоки 4×4	$B(7, 4, 2)$ $QFG(7, 4, 2)$			
1	1	2	3	4
2	1	2	5	7
3	1	3	5	6
4	1	4	6	7
5	2	3	6	7
6	2	4	5	6
7	3	4	5	7

Нахождение прямого пути между любыми двумя абонентами сводится к нахождению номеров выходных портов абонентов и коммутаторов, однозначно задающих этот путь. Прокладка прямого канала — это просто передача короткого пакета-зонда по выбранному пути с подтверждением его приема.

Основные коммутационные свойства сети с топологией квазиполного графа состоят в следующем [2, 3]. Во-первых, это сеть с прямыми каналами. Во-вторых, эти каналы находятся и строятся путем самомаршрутизации. В-третьих, эта сеть является неблокируемой, т.е. обеспечивает бесконфликтную реализацию любой перестановки пакетов данных между абонентами, т.е. равносильна сети с топологией полного графа. В-четвертых, эта сеть является (σ^*-1) -отказоустойчивой по каналам, т.е. отказ (σ^*-1) -го канала у любых абонентов сохраняет первые три свойства. Более того, они сохраняются и при отказе любых (σ^*-1) -го коммутаторов.

Квазиполный орграф определяется только при $\sigma^*=1$ и для направленных дуг. Квазиполный орграф $QFDG(M^*, k^*)$ — это однородный двудольный граф, каждую долю которого составляют M^* узлов степени k^* . Значение k^* выбирается минимальным, при котором любые два узла в одной доле связаны прямыми путями длины 2 через разные узлы в другой доле.

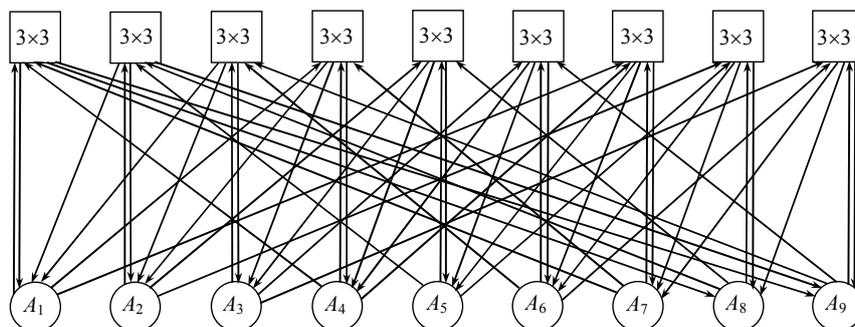


Рис. 3. Квазиполный орграф $QFDG(9, 3)$, полученный из 2-мерного 3-ичного мультикольца [3]

Такой орграф всегда существует, и его параметры связаны соотношением $M^*=(k^*)^2$. На рис. 3 и рис. 4 даны примеры разных квазиполных орграфов $QFDG(9, 3)$. В этих орграфах схемы межсоединений задают табл. 2 и табл. 3 соответственно.

Таблица 2

Межсоединения в квазиполном орграфе по рис. 3

Коммутаторы 3×3	Дуги от абонентов			Дуги к абонентам		
	1	2	3	1	2	3
1	1	9	8	1	4	7
2	2	1	9	2	5	8
3	3	2	1	3	6	9
4	4	3	2	4	7	1
5	5	4	3	5	8	2
6	6	5	4	6	9	3
7	7	6	5	7	1	4
8	8	7	6	8	2	5
9	9	8	7	9	3	6

В общем случае при произвольном k^* на пересечении i -ой строки ($1 \leq i \leq M^*$) и j -го столбца ($1 \leq j \leq k^*$) в левой части таблицы содержится номер $(i-j) \bmod (M^*+1)$, а в правой — номер $[i+(j-1)k^*] \bmod (M^*+1)$.

При произвольном k^* на пересечении i -й строки ($1 \leq i \leq M^*$) и j -го столбца ($1 \leq j \leq k^*$) в левой части таблицы содержится номер $\lfloor i/k^* \rfloor k^* + j$, а в правой — номер $(i) \bmod (k^*+1) + (j-1)k^*$.

Заметим специально, что при схемной реализации квазиполного орграфа встречные пути между каждой парой абонентов на участке абонент-коммутатор задаются парой встречных симплексных каналов, которые могут быть подсоединены к разным коммутаторам и могут не образовывать дуплексных каналов. Поэтому далее в работе связи между абонентами и коммутаторами для квазиполного графа подсчитываются в числе дуплексных каналов, а для квазиполного орграфа — в числе пар встречных симплексных каналов.

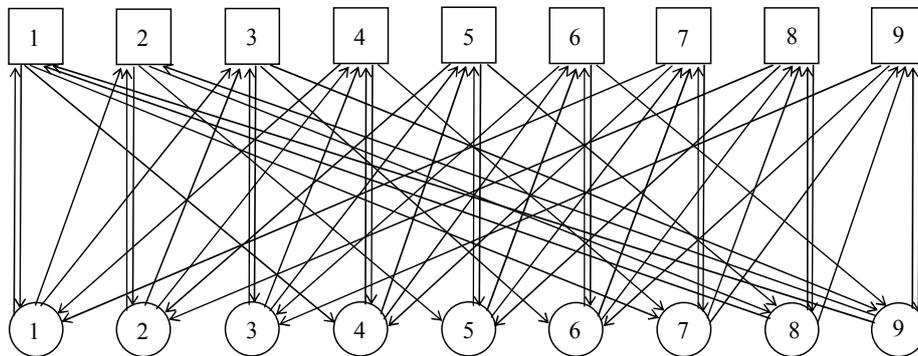


Рис. 4. Квазиполный орграф $QFDG(9, 3)$, полученный из 2-мерного 3-ичного обобщенного гиперкуба

Таблица 3

Межсоединения в квазиполном орграфе по Рис. 4

Коммутаторы 3×3	Дуги от абонентов			Дуги к абонентам		
	1	2	3	1	4	7
1	1	2	3	1	4	7
2	1	2	3	2	5	8
3	1	2	3	3	6	9
4	4	5	6	1	4	7
5	4	5	6	2	5	8
6	4	5	6	3	6	9
7	7	8	9	1	4	7
8	7	8	9	2	5	8
9	7	8	9	3	6	9

2. Предлагаемое решение

Сначала рассмотрим вариант изменения топологии для сети $FB2$, сложность и энергопотребление которой составляют величины $S=3bN^{3/2}$ и $W=3cN^{3/2}$. Для этого расширим $FB2$, заменив в ней полный граф на квазиполный граф или орграф, в котором расширенные коммутаторы $FB2$ являются абонентами (рис. 5). Расширенную сеть $FB2$ будем обозначать как $EB2$.

В $EB2$ к каждому расширенному коммутатору с $m^*=2k^*-1$ дуплексными портами добавляется вторичный коммутатор с k^*-1 портами. Каналы между расширенными и вторичными коммутаторами прокладываются согласно таблицам межсоединений в квазиполном графе или орграфе [3]. На рис. 5 используется квазиполный граф (рис. 2), который обеспечивает два прямых пути между любыми двумя первичными коммутаторами.

Любые два расширенных коммутатора в $EB2$ связаны через один вторичный коммутатор, поэтому формально диаметр $EB2$ задается как $D^*=1,5D$. Однако передачи пакетов через вторичные коммутаторы осуществляются по прямым каналам без их буферизации, и задержки в сетях $FB2$ и $EB2$ различаются только на очень малую часть длительности пакетов, т.е с практической точки зрения можно принять, что $D^* \approx D$.

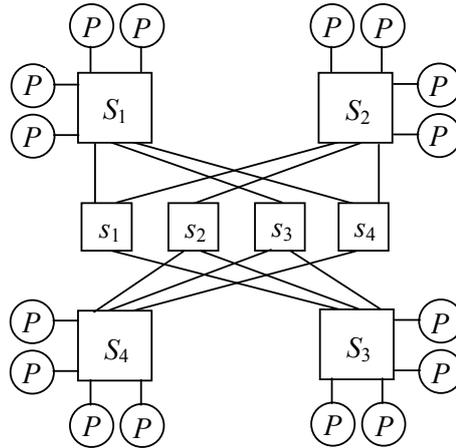


Рис. 5. Сеть $EB2$ при $k=4$ ($M^*=16$ и $m=7$). S_i и s_i — это составные и вторичные коммутаторы соответственно. Связи между s_i задает $QFG(4, 3, 2)$

При использовании топологии квазиполного орграфа сеть $EB2$ будет содержать $M^*=(k^*-1)^2$ расширенных и $M^*=(k^*-1)^2$ вторичных коммутаторов, и объединять $N^*=k^*M^*=k^*(k^*-1)^2$ абонентов и использовать $R^*=M^*(k-1)$ дуплексных каналов.

Сложность каждой спарки расширенного и вторичного коммутаторов составляет величину $s^*=3b(k^*)^2+b(k^*-1)^2 \approx 4b(k^*)^2$, а сложность всей сети — величину $S^*=N^*s^*/k^* \approx 4b(N^*)^{4/3}$. По постановке задачи $N \approx N^*$, поэтому имеет место оценка $S/S^* \approx 3(N)^{1/6}/4$. При $N^*=10^3 \approx N=1024$ имеет место оценка $S/S^* \approx 2,4$, а при $N=32K$ и $N^*=33K$ ($K=1024$) — оценка $S/S^* \approx 4,3$. Аналогично для энергопотребления.

В сети $EB2$ с топологией квазиполного орграфа для $N^*=1100$ имеем $k^*=11$ и $W^*=c10^2(3 \cdot 11^2+10^2)$. В сети $FB2$ для $N=1024$ имеем $k=32$ и $W=3c32^3$. Поэтому при $N^* \approx N$ имеем $W/W^* \approx 2,4$.

Вариант сети $FB2$ при $N \approx 32K$ в настоящее время технически нереализуем, т.к. требует составных коммутаторов с 363 портами, тогда как самой большой однокристалльный коммутатор $YARC$ [5] имеет только 64 дуплексных порта. В этом случае придется использовать сеть FBn с $n > 2$.

Сравним характеристики сетей $EB2$ и $FB3$ при $N^*=33K$ и $N=32K$ ($K=1024$). Для $EB2$ имеем: $k^*=33$, $M^*=(k^*-1)^2=K$, $R^*=(k^*-1)^3=32K$ и $W^*=cK(3 \cdot 33^2+32^2)$. Для $FB3$ имеем $k=32$, $M=k^2=K$, $R=2M(k-1)=62K$ и $W=7cK32^2$. Теперь $W/W^* \approx 1,8$ при $R/R^*=1,94$ и $D/D^*=1,5$, здесь более высокое энергопотребление сопровождается еще увеличением числа каналов и задержек передачи.

В случае использования топологии квазиполного графа появляется возможность иметь несколько прямых каналов через разные вторичные коммутаторы. В частности, для *EFB2* при $\sigma=2$ можно выбрать $k^*=13$ и получить $M^*=1027$ и $W^*=c12^2(3 \cdot 13^2 + 12^2)$, т.е. иметь $W/W^* \approx 1,3$ при $N=1024$. При $\sigma=2$ также можно реализовать вариант с $k^*=32$ и $M^*=16401$. Правда, необходимые для этого *QFG(79, 13, 2)* и *QFG(513, 32, 2)* еще необходимо построить [6, 7].

3. Сплющивание обобщенной сети

Обобщенными мы называем сложенные многокаскадные сети, в которых межкаскадные соединения имеют топологию квазиполного графа или орграфа [8]. В частности, 2-каскадная обобщенная сеть получается из квазиполного графа или орграфа по рис. 2 — рис. 4 заменой каждого абонента на дуплексный коммутатор $k^* \times k^*$ (коммутатор ВВ), каждого узла другой доли — на коммутатор $k^* \times k^*$ (коммутатор хребта), а ребра — на дуплексные каналы для графа или пары симплексных каналов для орграфа. Такая сеть объединяет $N^*=k^*[k^*(k^*-1)/\sigma+1]$ абонентов, если она получена из квазиполного графа, и $N^*=(k^*)^3$ абонентов, если она получена из квазиполного орграфа.

При сплющивании 2-каскадной обобщенной сети одноименные коммутаторы ВВ и хребта объединяются в один расширенный коммутатор с $m^*=2k^*-1$ дуплексными портами. Такая сплюснутая сеть состоит из $M^*=N^*/k^*$ расширенных коммутаторов, любые два из которых связаны $2(k^*-1)$ парами симплексных каналов, использует $R^*=2M^*(k^*-1)$ таких пар каналов и формально имеет диаметр $D^*=3$. Обозначим такую сплюснутую обобщенную сеть как *FG2*.

При использовании топологии квазиполного орграфа сложность сети *FG2* задается выражением $S^*=4b(k^*)^4=4b(N^*)^{4/3}$. *FG2*, как и сеть *FB2*, не является перестраиваемой и имеет только один путь между любыми двумя абонентами. Отношение сложностей *FB2* и *FG2* при $N \approx N^*$ задается выражением $S/S^*=3bN^{1/6}/4$, т.е. таким же соотношением как и для *FB2* и *EB2* в предыдущем параграфе. Число сетевых портов составного коммутатора в *FB2* задается величиной $r=k-1=N^{1/2}-1$, а в *FG2* — величиной $r^*=2(k^*-1)=2(N^{1/3}-1)$.

В табл. 4 сравниваются характеристики сетей *FB2* и *FG2* при одинаковых размерах расширенных коммутаторов. Видно, что *FG2* имеет в 6÷10 раз большее число абонентов при немного меньшей удельной схемной сложности.

Таблица 4

Сравнительные характеристики сетей *FB2* и *FG2* для квазиполного орграфа ($K=1024$)

<i>FB2</i>	m	k	N	M	R/N	S/N
<i>FG2</i>	m^*	k^*	N^*	M^*	R^*/N^*	S^*/N^*
<i>FB2</i>	31	16	$K/4$	16	0,94	48
<i>FG2</i>		11	$1,3K$	121	1,82	44
<i>FB2</i>	47	24	$0,56K$	24	0,96	72
<i>FG2</i>		16	$4K$	256	1,88	64
<i>FB2</i>	63	32	K	32	0,97	96
<i>FG2</i>		22	$10,4K$	484	1,81	88

Энергопотребление сетей $FB2$ и $FG2$ при одинаковом числе абонентов $N=1024 \approx N^*=1000$ имеем $k=32$, $k^*=10$ и $W/W^* \approx 2,5$. При этом в сети $FB2$ используется $R=k(k-1)=992$ дуплексных канала (1984 симплексных канала). В сети $FG2$ используется $R^*=2(k^*)^2(k^*-1)=1800$ пар симплексных каналов, т.е. почти в два раза больше, чем в сетях $FB2$ и $EB2$. При этом каждый составной коммутатор в $FB2$ имеет $r=31$ сетевой порт, а в $FG2$ — только $r^*=20$ сетевых портов.

В случае использования топологии квазиполного графа в сети появляется возможность иметь несколько прямых каналов через разные коммутаторы хребта. Для этого абоненты одного расширенного коммутатора должны связываться с друг другом только через другие расширенные коммутаторы. При этом $s=3bk^2$. В частности, для $FB2$ с $N=1024$ в $FG2$ с $\sigma^*=2$ можно выбрать $k^*=13$ и получить $M^*=79$, $N^*=1027$ и $W^*=c3M^*13^2$. Поэтому $W/W^* \approx 2,4$ и $R^*=2M^*(k^*-1)=1896$ пар симплексных каналов, т.е. $R^* \approx 1,91R$. Здесь опять в $FB2$ $r=31$, а в $FG2$ только $r^*=24$.

В табл. 5 сравниваются характеристики сетей $FB2$ и $FG2$ при одинаковых размерах расширенных коммутаторов (в скобках приведены параметры $FB2$). Видно, что $FG2$ имеет в несколько раз большее число абонентов, в полтора раза меньшую удельную сложность и повышенную канальную отказоустойчивость и/или пропускную способность.

Таблица 5

Сравнительные характеристики сетей $FB2$ и $FG2$
для топологии квазиполного графа ($K=1024$)

σ	m^*	k^*	$N^* (N)$	M^*	R^*/N^*	$S^*/N^* (S/N)$
2	31	11	616 ($K/4$)	56	1,82	33 (48)
3			407 ($K/4$)	37		
2	47	16	1936 ($0,56K$)	121	1,88	48 (72)
3			1296 ($0,56K$)	81		
2	63	22	5104 (K)	232	1,91	66 (96)
3			3410 (K)	155		

Для топологии квазиполного графа отдельным случаем является вариант с $\sigma^*=k^*/2$, при котором обобщенная сеть становится 2-каскадной сложенной неблокируемой сетью [8, 9]. Она обозначается как $FN2$. Для этого достаточно использовать дуплексные коммутаторы ВВ $(k^*/2) \times k^*$ с $1,5k^*$ дуплексными портами и хребтовые коммутаторы $k^* \times k^*$ с k^* дуплексными портами. Сложность и тех и других задается как $b(k^*)^2$. Число таких коммутаторов задается как $M^*=2k^*-1$.

Сплющивание такой неблокируемой сети порождает неблокируемую сеть объединяющую $N^*=M^*k^*/2=k^*(k^*-1/2)$ абонентов, состоящую из M^* расширенных коммутаторов с $m^*=2,5k^*-1$ дуплексными портами каждый при сложности $s=2b(k^*)^2$.

В табл. 6 сравниваются характеристики сетей $FB2$ и $FN2$ при одинаковых размерах расширенных коммутаторов. Видно, что $FN2$ имеет в примерно в полтора раза меньшее число абонентов и немного большую удельную сложность.

Неблокируемая сеть $FN2$ не требует использования специальных алгоритмов маршрутизации и не испытывает сокращения пропускной способности и увеличения задержек передачи на произвольном равномерном трафике, как это имеет место у $FB2$.

Таблица 6

Сравнительные характеристики сетей $FB2$ и $FN2$
для топологии квазиполного орграфа ($K=1024$)

$FB2$	m	k	N	M	R/N	S/N
$FN2$	m^*	k^*	N^*	M^*	R^*/N^*	S^*/N^*
$FB2$	31	16	$K/4$	16	0,94	48
$FN2$		14	189	27	1,82	46
$FB2$	47	24	$0,56K$	24	0,96	72
$FN2$		20	390	39	1,88	80
$FB2$	63	32	K	32	0,97	96
$FN2$		26	663	51	1,81	104

Заключение

Предложена модификация сети в расширенную сеть $EB2$, которая состоит в замене топологии полного графа на топологию квазиполного графа или орграфа, осуществляемая за счет введения промежуточного слоя малых коммутаторов. Она может осуществляться без изменения числа абонентов (процессоров), диаметра сети и числа используемых каналов, и обеспечивать более чем трехкратное снижение энергопотребления сети. Эта модификация позволяет многократно увеличить число абонентов при использовании коммутаторов одинакового размера без увеличения удельного энергопотребления.

Предложена новая сплюснутая сеть минимального диаметра $FG2$, полученная из 2-каскадной обобщенной сети, имеющая характеристики сети $EB2$. Сеть $FG2$ имеет в несколько раз большее число абонентов при равной и меньшей удельной сложности, чем сеть $FB2$. Сеть $FG2$ может иметь несколько независимых каналов между абонентами, что обеспечивает большую канальную отказоустойчивость и большую пропускную способность. Накладными расходами при этом является двукратное увеличение удельного числа проводов.

Рассмотрен предельный по числу каналов вариант сети $FG2$, полученный сплюсыванием нового вида неблокируемой сети — сеть $FN2$. По сравнению с $FB2$ она имеет примерно равное удельное энергопотребление и меньшие задержки передачи, но и меньшее число абонентов. Возможность эффективного применения сети $FN2$ требует дальнейшего исследования.

Литература

1. Kim J., Dally W.J., Abts D. Flattened Butterfly: A Cost-Efficiently Topology for High-Radix Networks. URL: http://www.cs.berkeley.edu/~kubitron/courses/cs258-S08/handouts/papers/ISCA_FBFLY.pdf (дата обращения: 3.09.2015).
2. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Метод инвариантного расширения системных сетей многопроцессорных вычислительных систем. Идеальная системная сеть // АиТ. 2010. № 12. С. 166–176.
3. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Распределенный полный коммутатор как «идеальная» системная сеть для многопроцессорных вычислительных систем // Управление большими системами: сборник трудов (электронный журнал). М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. 2011. Вып. 34. С. 92–116.

4. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Расширенный обобщенный гиперкуб как отказоустойчивая системная сеть для многопроцессорных систем // Управление большими системами: сборник трудов (электронный журнал). М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. 2013. Вып. 45. С. 344–371.
5. Scott S., Abts D., Kim J., Dally W. The Black Widow High-radix Clos Network // Proc. 33rd Intern. Symp. Comp. Arch. (ISCA'2006). 2006. URL: http://cva.stanford.edu/publications/2006/ISCA_YARC.pdfm (дата обращения: 3.09.2015).
6. Каравай М.Ф., Пархоменко П.П., Подлазов В.С. Комбинаторные методы построения двудольных однородных минимальных квазиполных графов (симметричных блок-схем) // АиТ. 2009. № 2. С. 153–170.
7. Каравай М.Ф., Подлазов В.С. Расширенные блок-схемы для идеальных системных сетей // Проблемы управления. 2012. № 4. С. 45–51.
8. Подлазов В.С., Соколов В.В. Обобщенные сети Клоза // АиТ. 2009. № 10. С. 158–170.
9. Подлазов В.С. Новый вид неблокируемой сети // АиТ. 2014. № 10. С. 139–152.

Каравай Михаил Фёдорович, заведующий лабораторией технической диагностики и отказоустойчивости, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва, Российская Федерация), mkaravay@ipu.ru

Подлазов Виктор Сергеевич, главный научный сотрудник, лаборатория технической диагностики и отказоустойчивости, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (Москва, Российская Федерация), podlazov@ipu.ru

Поступила в редакцию 17 сентября 2015 г.

*Bulletin of the South Ural State University
Series “Computational Mathematics and Software Engineering”
2016, vol. 5, no. 2, pp. 84–94*

DOI: 10.14529/cmse160207

TOPOLOGICAL RESERVES OF FLATTENED NETWORKS

M.F. Karavay, V.A. Trapeznikov Institute of Control Science of RAS, Moscow, Russian Federation

V.S. Podlazov, V.A. Trapeznikov Institute of Control Science of RAS, Moscow, Russian Federation

A method of modification the topology of double-hop system network type of Flattened Butterfly is considered. The method ensures diminution of component switch sizes and as a consequence of that feature decrease in hardware complexity and power consuming, preserving number of network nodes (processors), network diameter and functional characteristics. In case of retain the original component switch size the method gives a possibility to enhance number of network nodes dramatically with preservation of network diameter.

Keywords: system-area networks, flattened networks, full graphs, quasyfull graphs and digraphs, generalized Clos networks, complexity and power consumption, number of subscribers (processors), diameter, switching features.

FOR CITATION

Karavay M.F., Podlazov V.S. Topological Reserves of Flattened Networks. Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering. 2016. vol. 5, no. 2. pp. 84–94. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160207.

References

1. Kim J., Dally W. J., Abts D. Flattened Butterfly: A Cost-Efficiently Topology for High-Radix Networks. URL: http://www.cs.berkeley.edu/~kubitron/courses/cs258-S08/handouts/papers/ISCA_FBFly.pdf (accessed: 3.09.2015).
2. Karavay M. F., Podlazov V. S. An Invariant Extension Method for System Area Networks of Multicore Computational Systems. An Ideal System Network. Automation and Remote Control. 2010. vol. 71, no. 12. pp. 2644–2654.
3. Karavay M. F., Podlazov V. S. Raspredeleenny polnyy kommutator kak «ideal'naya» sistemnaya set' dlya mnogoprotsessornykh vychislitel'nykh sistem [Distributed Full Switch as Ideal System Area Network for Multiprocessor Computers]. *Upravlenie bol'shimi sistemami: sbornik trudov (elektronnyy zhurnal)* [Large-scale Systems Control: Transaction (electronic journal)]. Moscow, Publishing of V.A. Trapeznikov Institute of Control Science of RAS. 2011. vol. 34. pp. 92–116. (in Russian)
4. Karavay M. F., Podlazov V. S. Rasshirennyy obobshchennyy giperkub kak otkazoustoychivaya sistemnaya set' dlya mnogoprotsessornykh sistem [Extended Generalized Hypercube as Fail-safe System Network for Multiprocessor Systems]. *Upravlenie bol'shimi sistemami: sbornik trudov (elektronnyy zhurnal)* [Large-scale Systems Control: Transaction (electronic journal)]. Moscow, Publishing of V.A. Trapeznikov Institute of Control Science of RAS. 2013. vol. 45. pp. 344–371. (in Russian)
5. Scott S., Abts D., Kim J., and Dally W. The Black Widow High-radix Clos Network. Proc. 33rd Intern. Symp. Comp. Arch. (ISCA'2006). 2006. URL: <http://cva.stanford.edu/people/jjk12/isca06.pdf> (accessed: 3.09.2015).
6. Karavay M. F., Parkhomenko P. P., Podlazov V. S. Combinatorial Methods for Constructing Bipartite Uniform Minimal Quasicomplete Graphs (Symmetrical Block Designs). Automation and Remote Control. 2009. vol. 70, no. 2. pp. 312–327.
7. Karavay M. F., Podlazov V. S. Rasshirennyye blok-skhemyy dlya ideal'nykh sistemnykh setey [Expanded Block-Diagrams for Ideal System Area Networks]. *Problemy Upravleniya* [Control Sciences]. 2012. no. 4. pp. 45–51. (in Russian)
8. Podlazov V. S., Sokolov V. V. Generalized Clos Networks. Automation and Remote Control. 2009. vol. 70, no. 10. pp. 1737–1748.
9. Podlazov V. S. A New Form of an Unblockable Network. Automation and Remote Control. 2014. vol. 75, no. 10. pp. 1826–1836.

Received September 17, 2015.

РАЗРАБОТКА КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВОЙЛОЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В БРОНЕЗАЩИТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Н.Ю. Долганина, М.О. Кибель

Статья посвящена разработке численными методами моделей войлочных материалов, применяемых в бронезащитных элементах. Для создания сетки конечных элементов войлочных материалов разработан программный комплекс на языке C++, спроектирован и реализован, проведено тестирование. Программный комплекс позволяет создавать численные модели войлочного материала с прямолинейными волокнами, либо с искривленными волокнами по ломаной линии. Были созданы модели войлочных материалов, проведено суперкомпьютерное моделирование ударного нагружения войлочного материала из высокопрочных высококомодульных волокон в пакете программ LS-DYNA, проведено сравнение полученных данных с экспериментальными, получены графики ускорений.

Ключевые слова: численные методы, метод конечных элементов, суперкомпьютерное моделирование, войлок, волокно, броня

ОБРАЗЕЦ ЦИТИРОВАНИЯ

Долганина Н.Ю., Кибель М.О. Разработка компьютерных моделей войлочных материалов, применяемых в бронезащитных элементах // Вестник ЮУрГУ. Серия: Вычислительная математика и информатика. 2016. Т. 5, № 2. С. 95–104. DOI: 10.14529/cmse160208.

Введение

Современные бронезащитные элементы имеют сложную структуру, они состоят из нескольких слоев различных материалов. Как правило, в качестве верхних слоев используют металлические или керамические элементы, а в качестве тыльных слоев используют тканые или нетканые (войлочные) материалы из высокопрочных высококомодульных волокон. Прочность тканых материалов при ударном нагружении зависит от размера бронезащитного элемента [1] в отличие от нетканых (войлочных) материалов. Поэтому в настоящее время в качестве тыльных слоев в бронезащитных элементах все чаще применяются войлочные материалы.

Войлочные материалы имеют сложную структуру и могут состоять из десятков тысяч отдельных волокон, хаотически расположенных по объему образца. Волокна в данных материалах могут быть относительно прямыми или искривленными.

Экспериментальное исследование поведения войлочного материала при высокоскоростном ударном нагружении, как правило, не позволяет определить влияние различных факторов на его работу [2]. Поэтому сегодня широко применяется компьютерное и суперкомпьютерное моделирование подобных задач с последующей экспериментальной проверкой полученных данных. Например, в работах [3–5] исследовано поведение войлочных материалов при растяжении, где войлок моделируют сплошной средой.

В настоящее время самый распространенный способ создания компьютерных моделей исследуемых объектов — это использование стандартных функций, имеющихся в САД/САЕ программах. Однако, в некоторых случаях данный подход не позволяет по-

строить необходимую модель, например, когда исследуемый объект имеет очень сложную геометрию. В данном случае исследователи разрабатывают собственные программы или подпрограммы. В работах [6–8] для создания сетки конечных элементов в пакете программ Magc авторами была написана подпрограмма для создания 2-D модели войлочного материала с прямолинейными волокнами и проведено исследование полученных моделей образцов на растяжение. Однако, войлочные материалы имеют 3-D структуру, которую необходимо учитывать при исследовании данных материалов при разных видах нагружения.

В статье описана разработка численными методами 3-D модели войлочных материалов, применяемых в бронезащитных элементах, для расчета в пакете программ LS-DYNA. Для генерации сетки конечных элементов написан программный комплекс на языке C++, с помощью разработанного программного комплекса создана модель войлочного материала (Twaron® felt #9, баллистический войлок), рассчитан процесс высокоскоростного удара на суперкомпьютере в пакете программ LS-DYNA, проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными, получены графики ускорения.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приведена постановка задачи. В разделе 2 описывается реализация задачи. В разделе 3 обсуждаются результаты исследований. В заключении суммируются основные результаты, полученные в данной работе.

1. Постановка задачи

Создание вручную модели войлочного материала является чрезвычайно сложной задачей, поэтому для разработки 3-D моделей войлочных материалов был создан программный комплекс, который позволяет генерировать сетку конечных элементов. Функциональные требования к данному программному комплексу заключаются в том, что он должен предоставлять пользователю возможность выбрать один из двух графических интерфейсов: первый интерфейс для создания войлочного материала с прямолинейными волокнами, а второй интерфейс для создания войлочного материала с искривленными волокнами по ломаной линии. В каждом интерфейсе у пользователя должна быть возможность задать: размеры ограничивающего объема, длину волокон, размер конечных элементов, количество генерируемых волокон, размер прямолинейного участка (только в интерфейсе для создания войлочного материала с искривленными волокнами по ломаной линии).

Программный комплекс должен обеспечивать создание k-файла (входного файла для расчета в пакете программ LS-DYNA) с координатами узлов и стержневыми конечными элементами войлочного материала с прямолинейными волокнами или с искривленными волокнами по ломаной линии.

Программный комплекс должен иметь модульную структуру:

– *Модуль построения модели* предназначен для генерации конечных элементов модели войлочного материала в соответствии с заданными параметрами.

– *Модуль генерации узлов* предназначен для вычисления координат узлов генерируемых конечных элементов. Он выполняет следующие функции: случайная генерация угла отклонения отрезка, вычисление координат следующего узла, проверка принадлежности генерируемого узла ограничивающему объему.

– *Модуль вывода* предназначен для записи вычисленных координат узлов и конечных элементов в выходной k-файл. Данные в модуль вывода поступают из модуля построения модели.

На рис. 1. представлена схема взаимодействия между модулями программного комплекса. Стрелками обозначены потоки данных от одного модуля к другому. *Основная программа* предоставляет пользователю интерфейс для ввода параметров вычисления. Эти параметры обрабатываются и передаются в *модуль построения модели*.

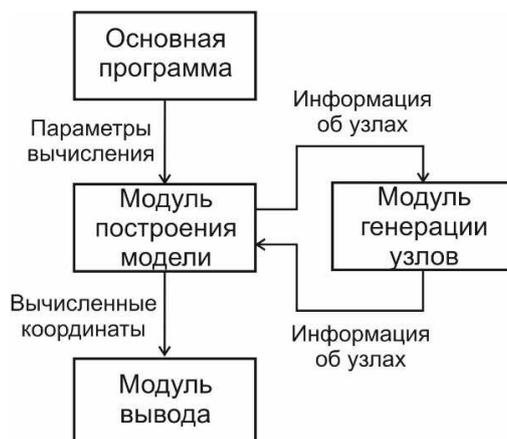


Рис. 1. Схема взаимодействия модулей программного комплекса

Небольшой образец из войлочного материала (Twaron® felt #9) размером 100x100x3,5 мм содержит более 450 000 арамидных волокон диаметром 11 мкм, хаотически распределенных по объему образца. Волокна в данном материале преимущественно прямые длиной 50 мм (среднее значение). Данный материал имеет межслойные связи, которые возникают после пробивания иглами (рис. 2).



Рис. 2. Фотография поверхности войлочного материала (Twaron® felt #9)

Волокна войлочного материала (Twaron® felt #9) созданы с помощью разработанного в данной работе программного комплекса. Межслойные связи в модели учтены следующим образом: созданы стержневые конечные элементы, расположенные на ребрах параллелепипедов, которые не соединены между собой. Размеры параллелепипедов составляют в плоскости 2 × 2 мм и 3,5 мм по толщине образца. Размеры и диаметр ребер приняты, исходя из количества отверстий, оставленных после пробивания иглами и количества волокон в отверстиях в поперечном направлении. Поперечное сечение волокон в модели увеличено в 7 раз по сравнению с реальным размером, чтобы снизить размер-

ность задачи. Материал волокон упругий вплоть до разрушения. Предел прочности на растяжение равен 2,53 ГПа (определено экспериментально), коэффициент сухого трения между волокнами равен 0,4 [9]. Модуль упругости равен 90 ГПа, коэффициент Пуассона 0,2, плотность 1440 кг/м³ [10]. Образец в модели не закреплен. Ударник в модели имеет сферическую форму диаметром 6,35 мм массой 1,05 г, материал – сталь. Скорость ударника варьировалась от 300 до 600 м/с. Моделирование ударного нагружения баллистического войлока проведено с использованием явной схемы интегрирования.

2. Реализация

Для создания модели войлочного материала пользователю необходимо ввести в пользовательский интерфейс разработанного программного комплекса размеры ограничивающего объема по осям x , y и z , длину волокон, размер прямолинейного участка, размер конечных элементов и количество генерируемых волокон. После этого программный комплекс создаст модель на основе введенных параметров. Интерфейс для создания войлочного материала с прямолинейными волокнами включает в себя те же поля ввода, что и интерфейс для создания войлочного материала с искривленными волокнами по ломаной линии за исключением поля для ввода размера прямолинейного участка.

Алгоритм работы программного комплекса включает в себя следующие шаги:

1. Считывание входных параметров, описывающих модель.
2. Генерация заданного количества волокон:
 - 2.1) генерация координат начального узла для каждого волокна,
 - 2.2) генерация угла отклонения отрезка,
 - 2.3) вычисление координат следующего узла на основе сгенерированного угла (для войлочного материала с искривленными волокнами (ломаная линия) каждый раз генерируется новый угол, для войлочного материала с прямолинейными волокнами угол остается прежним) и проверка принадлежности узла ограничивающему объему.

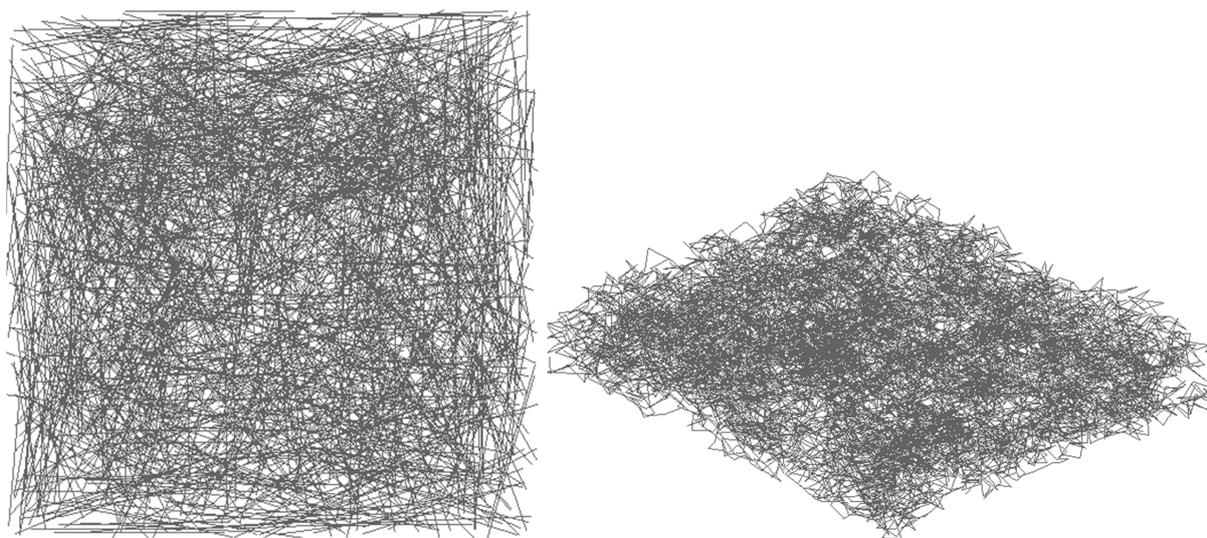
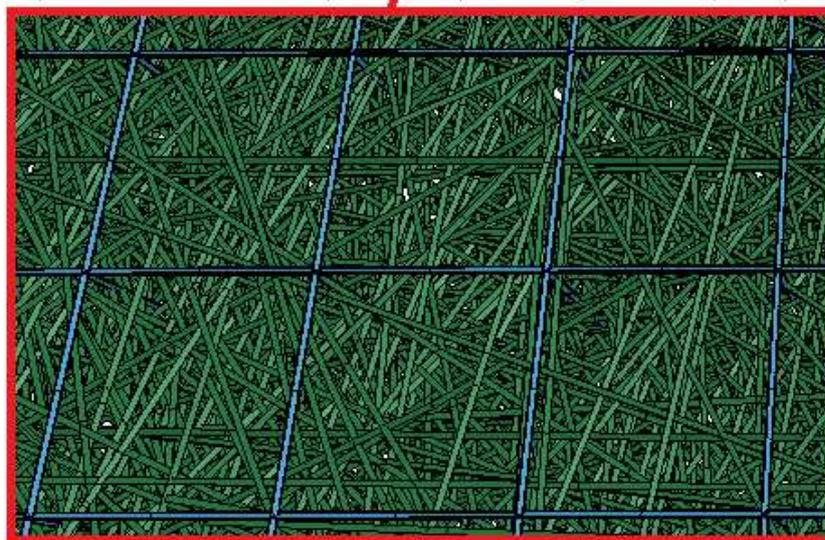
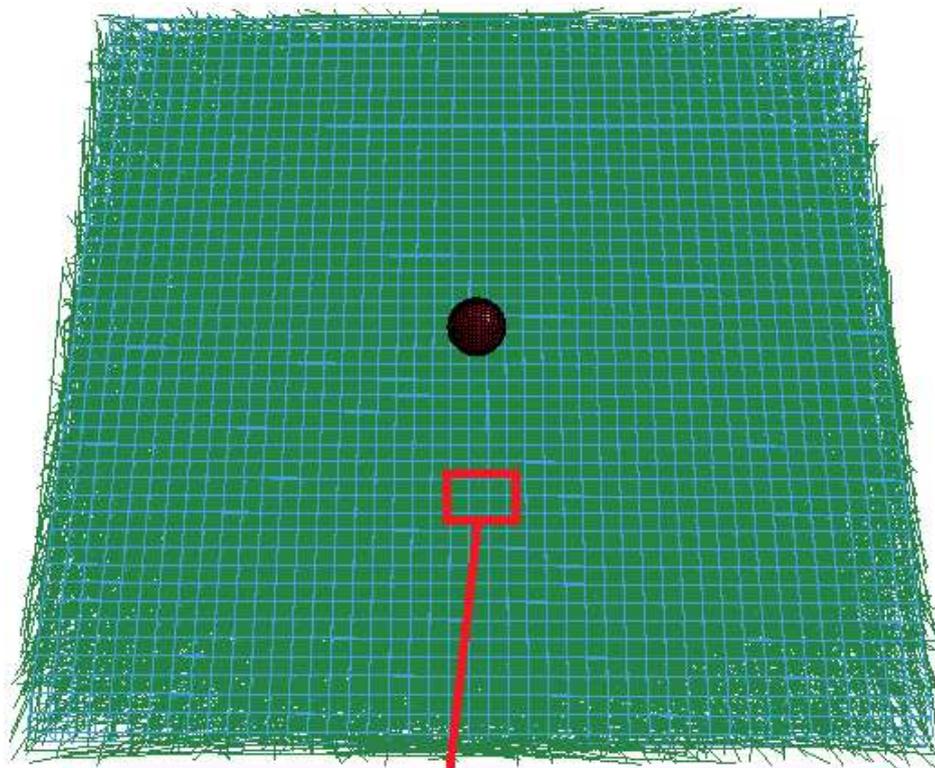


Рис. 3. Визуализация модели войлочного материала с прямолинейными волокнами (слева) и с волокнами, искривленными по ломаной линии (справа)

На рис. 3 представлено построение модели войлочного материала с прямолинейными волокнами размером $0,15 \times 0,15 \times 0,001$ м, длина волокон 0,06 м, размер конечных элементов 0,002 м, из 1500 волокон и с искривленными волокнами по ломаной линии размером $0,05 \times 0,05 \times 0,01$ м, длина волокон 0,05 м, размер прямолинейного участка 0,002 м, размер конечных элементов 0,001 м, из 500 волокон.



Вид сверху



Вид сбоку

Рис. 4. Сетка конечных элементов

Сетка конечных элементов 3D модели войлочного материала (Twaron® felt #9) размером $100 \times 100 \times 3,5$ мм показана на рис. 4.

3. Результаты исследований

Вычисления по определению остаточных скоростей после пробоя баллистического войлока были проведены на суперкомпьютере «Торнадо ЮУрГУ» [11] с пиковой производительностью 473 Тфлопс в пакете программ LS-DYNA. Расчетные данные по остаточным скоростям отлично согласуются с экспериментальными данными, разница не превышает 1 %.

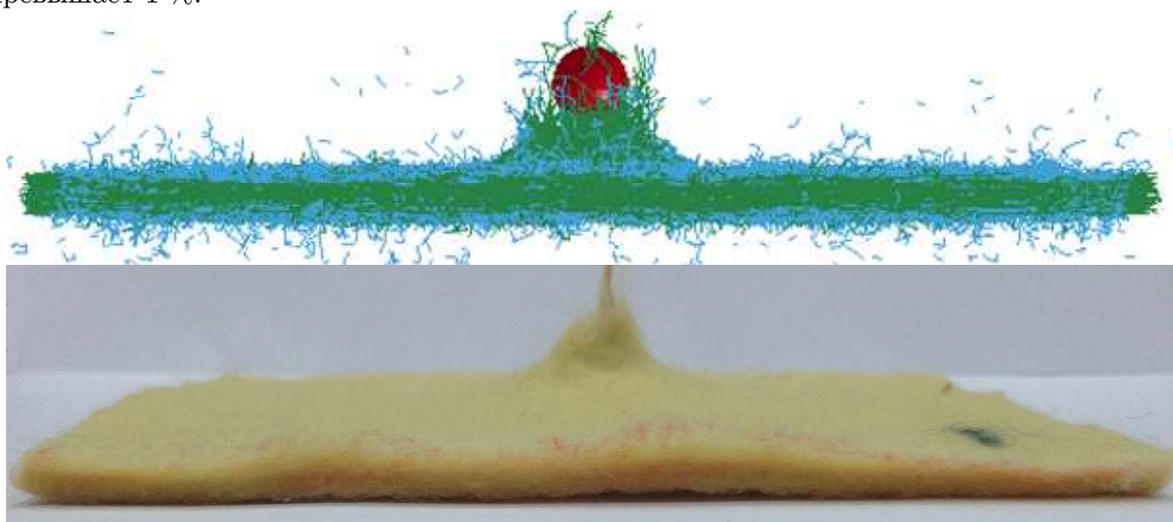


Рис. 5. Картины деформирования и разрушения войлочного материала (1 слой, начальная скорость ударника 497 м/с, сверху – расчет, снизу – эксперимент)

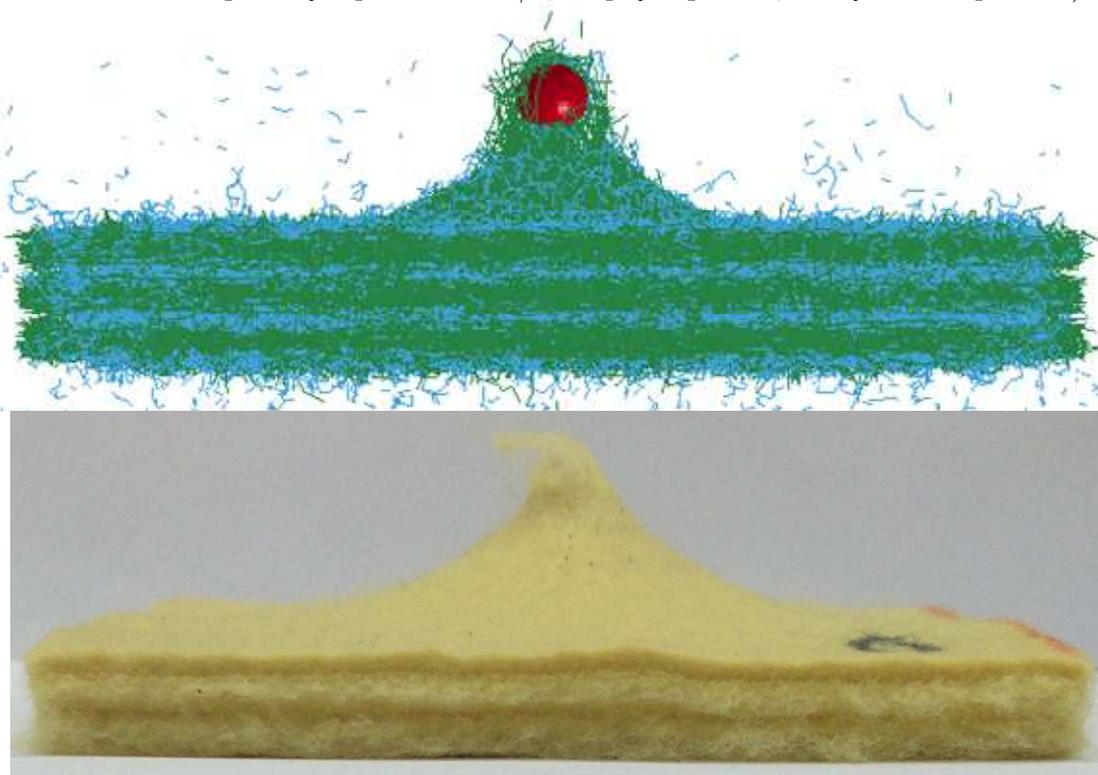


Рис. 6. Картины деформирования и разрушения войлочного материала (3 слоя, начальная скорость ударника 519 м/с, сверху – расчет, снизу – эксперимент)

На рис. 5, 6 приведено сравнение картин деформирования и разрушения баллистического войлока (1 и 3 слоя) при ударном нагружении.

График ускорения для задач ударного нагружения одного и трех слоев войлочного материала представлен на рис. 7. Данная задача была распараллелена до 48 ядер, это связано с имеющейся лицензией на пакет программ LS-DYNA. Время решения задач на одном ядре составляет 15 245 с и 201 719 с для одного и трех слоев войлочного материала соответственно.

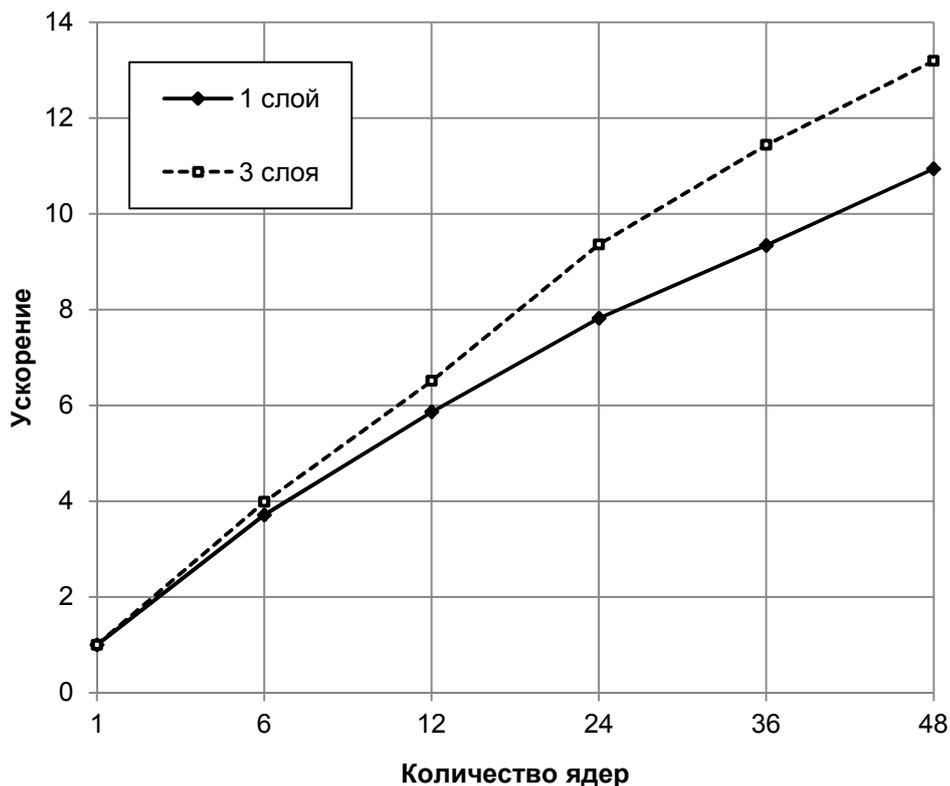


Рис. 7. Ускорение решения задачи ударного нагружения

Заключение

Разработан программный комплекс для создания компьютерных моделей войлочных материалов с прямолинейными волокнами, а также с искривленными волокнами по ломаной линии. В ходе работы были решены следующие задачи: спроектирован и реализован программный комплекс для создания компьютерных моделей войлочных материалов, проведено тестирование программного комплекса с различными параметрами. Программный комплекс позволяет создавать модели войлочных материалов с прямолинейными волокнами и с искривленными волокнами по ломаной линии.

Разработаны малопараметрические численные суперкомпьютерные (детализированные) модели баллистического войлока для проведения расчетных исследований по определению скоростей после пробоя. Выполнена реализация моделей баллистического войлока с проведением расчетов по определению остаточных скоростей после пробоя на суперкомпьютере. Проведено сопоставление экспериментальных и расчетных данных полученных при баллистическом ударе по войлоку. Получено, что экспериментальные и расчетные данные по остаточным скоростям после пробоя отлично согласуются между собой. Расчетные картины пробоя войлочных образцов близки к экспериментальным.

Получены графики ускорения для задач ударного нагружения одного и трех слоев войлочного материала. Полученные модели позволяют с достаточной точностью прогнозировать остаточную скорость ударника после пробоя и характер деформирования и разрушения исследуемых материалов.

Исследование выполнено в Южно-Уральском государственном университете (национальном исследовательском университете) за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-19-00327).

Литература

1. Долганина Н.Ю., Сапожников С.Б. Исследование влияния типа переплетения нитей на прочность тканевых преград при локальном ударе // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. 2013. Т. 13, № 2. С. 95–104.
2. Chocron S., Pintor A., Galvez F., Rosello C., Cendon D., Sanchez-Galvez V. Lightweight Polyethylene Non-Woven Felts for Ballistic Impact Applications: Material Characterization // Composites. 2008. Part B 39. P. 1240–1246.
3. Ridruejo A., González C., Llorca J. Failure Locus of Polypropylene Nonwoven Fabrics under in-plane Biaxial Deformation // Comptes Rendus Mecanique. 2012. Vol. 340. P. 307–319.
4. Ridruejo A., González C., Llorca J. A Constitutive Model for the in-plane Mechanical Behavior of Nonwoven Fabrics // International Journal of Solids and Structures. 2012. Vol. 49. P. 2215–2229.
5. Demirci E., Acar M., Pourdeyhimi B., Silberschmidt V.V. Finite Element Modelling of Thermally Bonded Bicomponent Fibre Nonwovens: Tensile Behaviour // Computational Materials Science. 2011. Vol. 50. P. 1286–1291.
6. Farukh F., Demirci E., Sabuncuoglu B., Acar M., Pourdeyhimi B., Silberschmidt V.V. Numerical Analysis of Progressive Damage in Nonwoven Fibrous Networks under Tension // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. P. 1670–1685.
7. Sabuncuoglu B., Acar M., Silberschmidt V.V. Finite Element Modelling of Fibrous Networks: Analysis of Strain Distribution in Fibres under Tensile Load // Computational Materials Science. 2013. Vol. 79. P. 143–158.
8. Ridruejo A., Gonzalez C., Llorca J. Damage Micromechanisms and Notch Sensitivity of Glass-Fiber Non-Woven Felts: An Experimental and Numerical Study // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2010. Vol. 58. P. 1628–1645.
9. Martinez M.A., Navarro C., Cortes R., Rodriguez J., Sanchez-Galvez V. Friction and wear behaviour of Kevlar fabrics // Journal of materials science. 1993. Vol. 28. P. 1305–1311.
10. Ballistics material handbook. Teijin Aramid. URL: <http://www.teijinaramid.com/wp-content/uploads/2013/05/Teijin-Aramid-Ballistics-Material-Handbook-English1.pdf> (дата обращения: 15.09.15).
11. Костенецкий П.С., Сафонов А.Ю. Суперкомпьютерный комплекс ЮУрГУ // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2016): труды международной научной конференции (28 марта – 1 апреля 2016 г., г. Архангельск). Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ. 2016. С. 561–573.

Долганина Наталья Юрьевна, к.т.н., доцент, кафедра системного программирования, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), dolganinani@susu.ru

Кибель Мария Олеговна, магистрант, Южно-Уральский государственный университет (Челябинск, Российская Федерация), mary.kibel@gmail.com

Поступила в редакцию 11 декабря 2015 г.

Bulletin of the South Ural State University
Series "Computational Mathematics and Software Engineering"
2016, vol. 5, no. 2, pp. 95–104

DOI: 10.14529/cmse160208

THE DEVELOPMENT OF COMPUTER MODELS OF FELT MATERIALS USED IN ARMOR

N. Yu. Dolganina, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

M. O. Kibel, South Ural State University, Chelyabinsk, Russian Federation

The article is devoted to the development of models of felt materials used in armor by numerical methods. To create a finite element mesh of felt material software in C++ was developed, designed, implemented and tested. The software allows you to create numerical models of felt material with straight fibers or twisted fibers with a broken line. Models of felt materials are created, conducted supercomputer simulations of impact loading felt material in the software LS-DYNA and compared with experimental data. Work is devoted to the development a system to create a computer models of felts, which are used in armor. The system was designed and implemented. System testing was performed. This system allows to create models of felts with the straight fibers or with the curved fibers in a broken line. The resulting models are designed for the supercomputer simulation shock loading of felts in the framework of the LS-DYNA software package.

Keywords: numerical methods, finite element method, modeling, felt, fiber, armor.

FOR CITATION

Dolganina N.Yu., Kibel M.O. The Development of Computer Models of Felt Materials Used in Armor. *Bulletin of the South Ural State University. Series: Computational Mathematics and Software Engineering*. 2016. vol. 5, no. 2. pp. 95–104. (in Russian) DOI: 10.14529/cmse160208.

References

1. Dolganina N.Yu., Sapozhnikov S.B. Issledovanie vliyaniya tipa perepleteniya nitey na prochnost' tkanevykh pregrad pri lokal'nom udare [Study of the Influence of Type Weave for Strength of the Textile Armor Panel at the Local Impact] *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Mashinostroenie* [Bulletin of the South Ural State University. Series: Engineering]. 2013. vol. 13, no. 2. pp. 95–104. (in Russian)
2. Chocron S., Pintor A., Galvez F., Rosello C., Cendon D., Sanchez-Galvez V. Lightweight Polyethylene Non-Woven Felts for Ballistic Impact Applications: Material Characterization. *Composites*. 2008. Part B 39. pp. 1240–1246.

3. Ridruejo A., González C., Llorca J. Failure Locus of Polypropylene Nonwoven Fabrics under in-plane Biaxial Deformation. *Comptes Rendus Mecanique*. 2012. vol. 340. pp. 307–319.
4. Ridruejo A., González C., Llorca J. A Constitutive Model for the in-plane Mechanical Behavior of Nonwoven Fabrics. *International Journal of Solids and Structures*. 2012. vol. 49. pp. 2215–2229.
5. Demirci E., Acar M., Pourdeyhimi B., Silberschmidt V.V. Finite Element Modelling of Thermally Bonded Bicomponent Fibre Nonwovens: Tensile Behaviour. *Computational Materials Science*. 2011. vol. 50. pp. 1286–1291.
6. Farukh F., Demirci E., Sabuncuoglu B., Acar M., Pourdeyhimi B., Silberschmidt V.V. Numerical Analysis of Progressive Damage in Nonwoven Fibrous Networks under Tension. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. vol. 51. pp. 1670–1685.
7. Sabuncuoglu B., Acar M., Silberschmidt V.V. Finite Element Modelling of Fibrous Networks: Analysis of Strain Distribution in Fibres under Tensile Load. *Computational Materials Science*. 2013. vol. 79. pp. 143–158.
8. Ridruejo A., Gonzalez C., Llorca J. Damage Micromechanisms and Notch Sensitivity of Glass-Fiber Non-Woven Felts: An Experimental and Numerical Study. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2010. vol. 58. pp. 1628–1645.
9. Martinez M.A., Navarro C., Cortes R., Rodriguez J., Sanchez-Galvez V. Friction and wear behaviour of Kevlar fabrics. *Journal of materials science*. 1993. vol. 28. pp. 1305–1311.
10. Ballistics material handbook. Teijin Aramid. URL: <http://www.teijinaramid.com/wp-content/uploads/2013/05/Teijin-Aramid-Ballistics-Material-Handbook-English1.pdf> [accessed: 15.09.15].
11. Kostenetskiy P.S., Safonov A.Y. Superkomp'yuternyy kompleks Yuzhno-Ural'skogo Gosudarstvennogo universiteta [SUSU Supercomputer Resources]. *Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii (PaVT'2016): trudy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii* [Proceedings of the 10th Annual International Scientific Conference on Parallel Computing Technologies (PCT 2016)]. Arkhangelsk, Russia, March 29-31, 2016. CEUR Workshop Proceedings. 2016. vol. 1576. pp. 561-573.

Received December 11, 2015.

СВЕДЕНИЯ ОБ ИЗДАНИИ

Научный журнал «Вестник ЮУрГУ. Серия «Вычислительная математика и информатика» основан в 2012 году.

Свидетельство о регистрации ПИ ФС77-57377 выдано 24 марта 2014 г. Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Журнал включен в Реферативный журнал и Базы данных ВИНИТИ; индексируется в библиографической базе данных РИНЦ. Журнал размещен в открытом доступе на Всероссийском математическом портале MathNet. Сведения о журнале ежегодно публикуются в международной справочной системе по периодическим и продолжающимся изданиям «Ulrich's Periodicals Directory».

Решением Президиума Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации журнал включен в «Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук» (№421).

Подписной индекс научного журнала «Вестник ЮУрГУ», серия «Вычислительная математика и информатика»: 10244, каталог «Пресса России». Периодичность выхода — 4 выпуска в год (февраль, май, август и ноябрь).

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

1. Правила подготовки рукописей и пример оформления статей можно загрузить с сайта серии <http://vestnikvmi.susu.ru>. Статьи, оформленные без соблюдения правил, к рассмотрению не принимаются.
2. Адрес редакции научного журнала «Вестник ЮУрГУ», серия «Вычислительная математика и информатика»:
Россия 454080, г. Челябинск, пр. им. В.И. Ленина, 76, ЮУрГУ, факультет ВМИ,
кафедра ИТ, ответственному секретарю Цымблеру М.Л.
3. Адрес электронной почты редакции: vestnikvmi@susu.ru
4. Плата с авторов за публикацию рукописей не взимается, и гонорары авторам не выплачиваются.